GOBIERNO DE
EL SALVADOR

Matemática

Guía metodológica

Tomo 1

Guía metodológica Tomo 1 Matemática 9

GOBIERNO DE
EL SALVADOR

Matemática

Guía metodológica

ESMate

Equipo técnico autoral y de diagramación del Ministerio de Educación

Ana Ester Argueta Aranda
Erick Amílcar Muñoz Deras
Reina Maritza Pleitez Vásquez
Diana Marcela Herrera Polanco
Francisco Antonio Mejía Ramos
Norma Elizabeth Lemus Martínez
Salvador Enrique Rodríguez Hernández
César Omar Gómez Juárez

Diseño y revisión de diagramación

Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

Corrección de estilo

Mónica Marlene Martínez Contreras
Marlene Elizabeth Rodas Rosales
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Imagen de portada con fines educativos, en ella se ilustra el teorema de Pitágoras con polígonos de diferente cantidad de lados y se pueden apreciar figuras semejantes

372.704 5
M425 Matemática 9 [recurso electrónico] : tomo 1 : guía metodológica / Ana Ester Argueta Aranda, Erick Amilcar Muñoz Deras, Reina Maritza
slv Pleitez Vásquez, Diana Marcela Herrera Polanco, Francisco Antonio Mejía Ramos, Norma Elizabeth Lemus Martínez, Salvador Enrique Rodríguez Hernández, César Omar Gómez Juárez. -- 2ª ed. -- San Salvador, El Salv. : MINED, 2019.
1 recurso electrónico, (256 p. : il., 28 cm.) -- (Esmate)
Datos electrónicos (1 archivo : pdf, 61.8 mb). -- www.mined.gob.sv/index.php/esmate.
ISBN 978-99961-348-3-8 (E-Book)
1. Matemáticas-Libros de texto. 2. Matemáticas-Ejercicios, problemas, etc. 3. Educación primaria-Libros de texto. I. Argueta Aranda, Ana Ester, coaut. II. Título.

Estimadas y estimados docentes:

Reciban un cordial saludo, en el que expresamos nuestro agradecimiento y estima por la importante labor que desempeñan en beneficio de la sociedad salvadoreña.

Como Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (MINEDUCYT) a través del Proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media (ESMATE 2) se ha diseñado la guía metodológica, que será una herramienta importante para la labor docente que realizan día a día.

El objetivo principal de este recurso es brindarles orientaciones concretas y precisas para el desarrollo de las clases de esta asignatura y lograr el desarrollo del pensamiento lógico matemático en el estudiantado salvadoreño.

Es importante señalar que la Guía metodológica está en correspondencia con las actividades y secuencia para el desarrollo de las clases propuestas en el Libro de texto y Cuaderno de ejercicios diseñados para el estudiantado, concretizando de esta manera lo emanado y anhelado en el Programa de estudios de Matemática.

Aprovechamos esta oportunidad para expresar nuestra confianza en ustedes. Sabemos que leerán y analizarán esta Guía metodológica con una actitud dispuesta a aprender y mejorar, tomando en cuenta su experiencia y su formación docente. Creemos en su compromiso con la niñez y la juventud salvadoreña para que puedan desarrollarse integralmente.

Atentamente,

José Mauricio Pineda Rodríguez
Ministro de Educación, Ciencia
y Tecnología, Interino

Ricardo Cardona A.
Viceministro de Educación y de
Ciencia y Tecnología, *Ad honorem*

Índice

I. Introducción

La presente Guía metodológica (GM) forma parte de una serie de materiales elaborados por el equipo del Proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media (ESMATE) del Ministerio de Educación, con la finalidad de contribuir a la mejora de los procesos de aprendizaje en la asignatura de Matemática.

La segunda edición, contiene dos tomos, en los cuales se han incorporado las sugerencias y observaciones brindadas por los docentes de tercer ciclo del sistema educativo nacional.

En esta GM se explican con detalle todos los elementos que deben considerarse para realizar el proceso de aprendizaje, con base en la resolución de problemas planteados para lograr el desarrollo de las competencias en los estudiantes. Su uso permitirá al docente abordar la clase de forma efectiva y optimizar el uso del Libro de texto (LT) y el Cuaderno de ejercicios (CE).

Los principales objetivos que se pretenden lograr con el uso de esta guía son los siguientes:

1. Orientar la planificación de la clase a partir de una propuesta de contenidos e indicadores organizados temporalmente en lecciones y unidades.
2. Ofrecer sugerencias metodológicas concretas y pertinentes que ayuden a los docentes y estudiantes en la comprensión de los contenidos.
3. Proponer estrategias concretas para el desarrollo de los indicadores de logros que permitan el abordaje de las competencias matemáticas que deben alcanzar los estudiantes.

El MINED ofrece al sistema educativo nacional estos materiales con la convicción de que el uso pertinente de estos, permitirá fortalecer la práctica docente y así desarrollar de manera efectiva los aprendizajes de los estudiantes. Para lograr este propósito, a continuación se establecen los puntos de partida esenciales para su implementación:

1. **Importancia fundamental del aprendizaje de la matemática**: el desarrollo del razonamiento matemático genera en los estudiantes competencias para resolver problemas complejos, analizar situaciones, ser creativos, críticos, eficientes, pragmáticos y lógicos; capacidades que les permitirán vivir como ciudadanos comprometidos consigo mismos y con el desarrollo sostenible de sus comunidades, ya que los saberes matemáticos permiten reconocer que la ciencia está presente en todo lo que nos rodea, por lo que cualquier objeto de la realidad puede ser utilizado como herramienta tecnológica que ayude a resolver situaciones problemáticas, las cuales enfrentará día con día cada estudiante.

2. **Rol fundamental del docente y protagonismo del estudiante:** la labor del docente se vuelve determinante en la formación del estudiante, de ahí su importancia para que el sistema educativo logre sus propósitos; estos materiales están estructurados de tal manera que el docente tenga herramientas oportunas para "asistir" el aprendizaje, es decir, con la mirada puesta en el logro del aprendizaje de cada estudiante, lo cual implica que ellos sean los protagonistas en las clases. Este protagonismo se evidencia con el logro de los indicadores de aprendizaje en cada clase, los cuales se convierten en "peldaños" para desarrollar las competencias de unidad y para lograr que los estudiantes utilicen todos los saberes alcanzados para resolver exitosamente problemas simples y complejos. Esto tiene como base, el conocimiento y la comprensión de cada indicador y su concreción en cada una de las clases propuestas.

3. **Secuencia de la clase, experiencia auténtica del aprendizaje**: el protagonismo del estudiante se traduce en la propuesta de la secuencia de la clase, la cual contiene los siguientes pasos o momentos:

- Problema inicial
- Solución del problema inicial
- Conclusión
- Problemas y ejercicios

El análisis de esta secuencia se desarrolla describiendo la intencionalidad de cada elemento de la clase. De esta forma, se propone un itinerario para que los estudiantes, asistidos por sus docentes, construyan los conceptos y logren las competencias requeridas.

4. **Sintonía determinante con la gestión escolar**: para optimizar la efectividad de estos materiales educativos, otro aspecto fundamental a considerar es la generación de un ambiente propicio para el desarrollo de los aprendizajes, el cual está unido estrechamente con la gestión administrativa y organización de la institución educativa. Entre los elementos de dicha gestión, se destaca como determinante la cantidad de horas clase efectivas que el personal docente desarrolla en el año escolar; la propuesta de contenidos está planteada para que sean desarrollados durante al menos 160 horas clase al año, las cuales se deben garantizar como condición indispensable en el logro de los aprendizajes.

5. **Aprendizaje de los estudiantes en el hogar con el uso del Cuaderno de ejercicios**: el desarrollo de los saberes o de un contenido no solo está sujeto a la hora clase, sino que se prolonga al tiempo de estudio en sus hogares; por ello, se establece la práctica de problemas y ejercicios en los CE, para que el estudiante pueda seguir profundizando en la comprensión de los saberes matemáticos de cada una de las clases desarrolladas. Además, con esta prolongación de la clase al hogar, también se busca la implicación de la familia como espacio legítimo para la consolidación del saber e integración con la vida cotidiana.

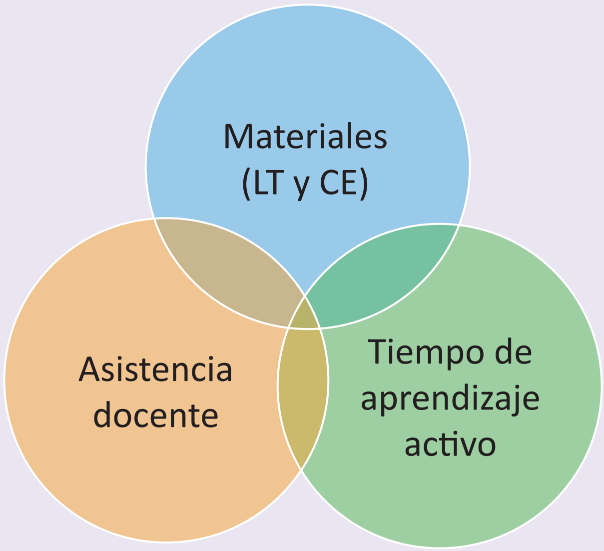
Uno de los elementos importantes a mencionar de esta guía es el apartado **IV. Estructura de la Guía metodológica**, donde se explican las partes de la clase, la cual tiene especial relevancia, ya que en ella se profundiza por qué y para qué de cada elemento de la clase; además, describe las posibles limitaciones que los estudiantes tengan al desarrollar cada uno, como una forma de orientar al docente para aprovechar las oportunidades que ofrecen los errores en la construcción del aprendizaje. De esta forma, se considera que los docentes podrán interiorizar la intencionalidad de cada elemento y así tener más recursos para mejorar los logros de los aprendizajes en cada clase. También se propone, en esta parte, un prototipo de prueba de cada unidad, formulado en correspondencia directa con los indicadores de logro y los problemas planteados en cada clase, el cual puede ser de gran utilidad como una referencia para constatar los aprendizajes de cada estudiante en coherencia con todo el proceso.

Otro elemento relevante es el apartado **V. Orientación para el desarrollo de una clase de matemática con base en la resolución de problemas**, donde se describen cada uno de los elementos de la secuencia de la clase, las principales actividades que deben realizar los estudiantes en su proceso de aprendizaje y los docentes en la asistencia o mediación de los mismos. Se destacan además los aspectos que sugieren acciones específicas en sintonía directa con el protagonismo del estudiante y la función mediadora del docente.

Esta Guía y demás materiales educativos han sido elaborados con la participación activa de muchos docentes a nivel nacional, que con su experiencia y empeño por la formación de los estudiantes, han hecho aportes significativos a cada uno de los elementos de los mismos. Siguiendo esta dinámica de participación, se considera importante asumir estos materiales como una propuesta flexible y mejorable, donde el personal docente deberá hacer las adecuaciones que considere necesarias para apoyar el aprendizaje de sus estudiantes.

La meta del uso de estos materiales educativos es el mejoramiento del aprendizaje de los estudiantes, quienes asumirán la responsabilidad del futuro del país; y como parte de la estrategia que se propone, a continuación se presentan los factores relacionados con dicha finalidad:

Tres factores fundamentales para mejorar el aprendizaje



Estos tres factores constituyen las prioridades estratégicas: los **Materiales**, como el LT y el CE, el **Tiempo de aprendizaje activo** dentro de la clase y en el hogar y la **Asistencia** o **Facilitación** del docente para propiciar el aprendizaje.

Materiales

Para garantizar la efectividad y eficiencia del aprendizaje se necesita un material que tenga la secuencia didáctica apropiada y el nivel de complejidad razonable, basado en el nivel de comprensión de los estudiantes, es decir, los contenidos de dicho material tienen que ser académica y didácticamente adecuados y al mismo tiempo ser más amigables para el aprendizaje.

Para satisfacer la primera necesidad mencionada, en los dominios cognitivos que se desarrollarán en la asignatura de Matemática deben estar estrictamente reflejadas las competencias establecidas por el MINED. Para cumplir la segunda necesidad, el contenido del LT debe corresponder lo más cercanamente posible a las necesidades académicas que tienen los estudiantes salvadoreños.

Tiempo de Aprendizaje Activo

Es importante destacar que como un paso previo a la elaboración de estos materiales de texto, el MINED realizó una investigación en las aulas y detectó una característica no favorable, que el tiempo disponible en el aula para el aprendizaje activo es insuficiente, en consecuencia, se ha limitado el desarrollo de las capacidades de los estudiantes, es así que en el LT que se ha elaborado, se recomienda a los docentes que aseguren un espacio de al menos 20 minutos para que cada uno de los estudiantes aprenda activamente por sí mismo o interactivamente con sus compañeros.

Aprendizaje Activo

1. En forma individual
   ¿En qué momento se fortalecen los aprendizajes?
   Cuando un estudiante está trabajando individualmente, leyendo el LT, resolviendo problemas en su cuaderno de apuntes etc., se aprende activamente. Por el contrario, cuando el estudiante solo está escuchando lo que está explicando el docente, se aprende menos porque su actitud de aprendizaje será pasiva en forma general.

   Por esta razón, se recomienda al docente que garantice un espacio de tiempo donde cada uno de sus estudiantes aprenda activamente en forma individual.

2. En forma interactiva
   En la práctica docente, muchas veces se provee asistencia a uno o dos alumnos en forma particular, dejando sin atención al resto de estudiantes ya que es un hecho que es difícil brindar asistencia a todos los estudiantes, aunque todos tienen la necesidad de aprender.

¿Existe otra alternativa para que todos los alumnos reciban asistencia oportuna?
Se debe generar aprendizaje interactivo entre alumnos (o aprendizaje mutuo), ya que este tiene varias ventajas, primero, el trabajo en parejas, si un estudiante no entiende un contenido, puede consultar a su compañero sin perder el tiempo (sin esperar la asistencia de parte del docente); segundo, el estudiante que explica a sus compañeros, profundiza su comprensión a través de la explicación en forma verbal; tercero, los alumnos a quienes no se puede dar asistencia en forma individual tendrán más oportunidad de aprender en forma oportuna y cuarto, se genera un ambiente de convivencia en el aula.

Por lo que se recomienda que realicen primero el trabajo individual y luego el aprendizaje interactivo.

Se espera que cada uno de los estudiantes intente resolver los problemas y ejercicios planteados en las páginas del LT, durante (por lo menos) 20 minutos en cada clase. Con esta actividad individual (o interactiva) se pretende contribuir al fortalecimiento del aprendizaje de los estudiantes y por consiguiente a mejorarlo, así como incrementar la capacidad de interpretación de la situación problemática planteada.

Antes de finalizar este punto, cabe mencionar que, además del LT el CE pretende garantizar como mínimo 20 minutos de Aprendizaje Activo en el hogar. Sumando 20 minutos en el hogar a otros 20 minutos de Aprendizaje Activo en la clase, y esforzándose durante 160 días, se espera que se cumpla la siguiente relación:

(20 minutos + 20 minutos) × 160 días = Mejora de aprendizajes.

Se les invita a todos los docentes del país a estar conscientes de esta fórmula.

Asistencia y facilitación

El MINED se propone cambiar el paradigma acerca del rol de los docentes, de **enseñar** hacia **asistir el aprendizaje**. Tradicionalmente, en el proceso de enseñanza se hacen esfuerzos por responder **¿qué es lo que hace el docente?**, en vez de preocuparse por saber **¿qué es lo que lograron los estudiantes?** Centrarse en el aprendizaje es un esfuerzo genuino, el cual debe ser la base para evaluar el desempeño docente.

Las actividades del docente deben ser planificadas para elevar el nivel de aprendizaje, y preocuparse por el resultado del aprendizaje de los estudiantes.

Elementos de una clase del Libro de texto

La siguiente página corresponde a la clase 2.7 de la unidad 2.

Indica el número de la lección.

Hace referencia al número de la clase.

Cuando aparezca este ícono, significa que los estudiantes pueden utilizar la calculadora para resolver el problema.

Indica la unidad a la que corresponde la clase.

En el primer momento de la clase, el estudiante debe pensar una solución a partir de una situación problemática, la cual permite introducir el contenido que se desarrollará.

En este segundo momento de la clase, el libro de texto propone una o varias formas de resolver el problema planteado.

Se consolida el contenido, aquí se relaciona el problema inicial y la solución, para explicar con lenguaje matemático la finalidad del contenido.

En algunas clases se propone un problema más, para mejorar la comprensión del contenido.

Se presentan problemas y ejercicios para que el estudiante fije lo aprendido.

2.7 Racionalización de denominadores

Unidad 2

P Encuentra una fracción equivalente que no tenga raíz cuadrada en el denominador para $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

S Considerando la fracción equivalente: $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Realizando la multiplicación: $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por lo tanto: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Al multiplicar y dividir una fracción por un mismo número se obtiene una fracción equivalente, es decir, que representa la misma cantidad. Por ejemplo:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{6}$$

Comprobando los valores de cada expresión en la calculadora.

$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106...$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707106...$

Observa que esta expresión en la que se simplifica la raíz cuadrada del denominador es mucho más fácil de insertar en la calculadora y también para hacer operaciones de fracciones, porque así el denominador es entero.

C El proceso en el cuál se encuentra una fracción equivalente sin raíces cuadradas en el denominador de una fracción se llama: **racionalización de denominadores.**

Para racionalizar el denominador de una fracción $\frac{b}{\sqrt{a}}$ donde $a > 0$ se siguen los pasos:

1. Se multiplica por la fracción $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.
2. Se realiza la multiplicación y se simplifica el resultado.

$$\frac{b}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$$

Por ejemplo, racionaliza $\frac{3}{\sqrt{6}}$:

1. $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$
2. $\frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Al realizar cualquier operación con radicales, siempre se debe racionalizar los radicales del denominador.

E Racionaliza los siguientes números: a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$.

a) 1. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

2. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3 \times 7}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

b) Se simplifica $\sqrt{12} : \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

1. $-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = -\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$

2. $-\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = -\left(\frac{\sqrt{5} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}\right) = -\left(\frac{\sqrt{5 \times 3}}{2 \times 3}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{6}$

Racionaliza los siguientes números.

a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ b) $-\frac{1}{\sqrt{11}}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{8}{\sqrt{20}}$

e) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ f) $\frac{7}{\sqrt{21}}$ g) $-\frac{12}{\sqrt{18}}$ h) $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{24}}$

49

Información complementaria: en el libro se utilizan algunos elementos que facilitan el aprendizaje de los contenidos, como presaberes, pistas, información adicional relacionada con la historia de la matemática, y se representan con diferentes colores:

Presaberes	Pista	Información adicional

Distribución de las clases: el libro está compuesto por 8 unidades didácticas, cada una formada por diferentes lecciones y estas últimas compuestas por distintas clases. En la numeración del título de cada clase, el primer número indica la lección y el segundo indica la clase.

Además al finalizar cada unidad o cada lección siempre aparecen algunos problemas sobre todas las temáticas abordadas, estas clases reciben el nombre de **Practica lo aprendido**.

1. Programación anual

Trimestre	Mes	Unidad (Horas)	Pág. de GM (Pág. de LT)	Contenidos
Primero	Enero Febrero Marzo	U1: Multiplicación de polinomios (29)	29 - 96 (1 - 32)	• Multiplicación de monomio por binomio. • Multiplicación de binomio por binomio. • Multiplicación de binomio por trinomio. • Multiplicación de trinomio por trinomio. • Productos de la forma $(x + a)(x + b)$. • Cuadrado de un binomio. • Suma por la diferencia de binomios. • Desarrollo de productos notables utilizando sustitución. • Combinación de productos notables. • Cuadrado de un trinomio. • Valor numérico y cálculo de operaciones. • Factorización de polinomios. • Factor común. • Factorización de trinomios de la forma: $x^2 + (a + b)x + ab$. • Factorización de trinomios cuadrados perfectos. • Factorización de diferencia de cuadrados. • Factorización utilizando cambio de variable. • Factorizaciones sucesivas. • Cálculo de operaciones aritméticas utilizando factorización.
	Marzo Abril	U2: Raíz cuadrada (24)	97 - 148 (33 - 56)	• Sentido y símbsxolo de la raíz cuadrada. • Representación de un número con el símbolo de raíz cuadrada. • Raíces cuadradas de un número. • Orden de las raíces cuadradas. • Números racionales e irracionales. • Conversión de números decimales a fracción. • Definición de los números reales. • Multiplicación y división de raíces cuadradas. • Expresión de números sin el símbolo de radical. • Simplificación de raíces cuadras inexactas. • Multiplicación de raíces cuadradas utilizando simplificación. • Racionalización de denominadores. • Suma y resta de raíces cuadradas utilizando simplificación y racionalización. • Operaciones combinadas de raíces cuadradas. • Resolución de problemas con números reales.
	Abril	U3: Ecuación cuadrática -continúa en el segundo trimestre- (4)	149 - 160 (57 - 61)	• Sentido y definición de la ecuación cuadrática. • Soluciones de una ecuación cuadrática. • Solución de ecuaciones de la forma $x^2 = c$. • Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 = c$.
Segundo	Abril	U3: Ecuación cuadrática -continuación- (3)	161 - 166 (62 - 64)	• Solución de ecuaciones de la forma: $(x + m)^2 = n$. • Solución de ecuaciones de la forma: $x^2 + bx = 0$. • Solución de ecuaciones de la forma: $x^2 + 2ax + a^2 = 0$.

Trimestre	Mes	Unidad (Horas)	Pág. de GM (Pág. de LT)	Contenidos
Segundo	Mayo	U3: Ecuación cuadrática -continuación- (14)	167- 199 (65 - 78)	• Solución de ecuaciones de la forma $(x + a)(x + b)$. • Solución de ecuaciones cuadráticas utilizando áreas. • Solución de ecuaciones completando cuadrados. • Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. • Fórmula general de la ecuación cuadrática. • Aplicación de la fórmula general de la ecuación cuadrática. • Discriminante de la ecuación cuadrática. • Uso del discriminante en resolución de problemas. • Resolución de problemas con ecuaciones cuadráticas.
	Mayo Junio	U4: Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + c$ (15)	201 - 238 (79 - 96)	• Proporcionalidad directa con el cuadrado. • La función $y = x^2$. • La función $y = ax^2$; $a > 1$, $0 < a < 1$. • La función $y = -ax^2$; $a > 0$. • Características de la función $y = x^2$. • Variación de $y = ax^2$ (máximos y mínimos). • Función $y = ax^2 + c$; $c > 0$, $c < 0$. • Condiciones iniciales para encontrar la ecuación de una función cuadrática.
	Junio Julio	U5: Figuras semejantes (26)	239 - 306 (97 - 126)	• Razón entre segmentos. • Segmentos proporcionales. • Figuras semejantes. • Características de figuras semejantes. • Construcción de figuras semejantes. • Criterios de semejanza LLL, AA, LAL. • Teorema de la base media. • Paralelogramo inscrito en un cuadrilátero. • Semejanza utilizando segmentos paralelos. • Paralelismo dados segmentos proporcionales. • Distancia entre puntos sobre mapas. • Áreas de polígonos semejantes. • Volumen de sólidos semejantes. • Problemas que se resuelven utilizando semejanza de triángulos.
Tercero	Julio Agosto	U6: Teorema de Pitágoras (17)	307 - 342 (127 - 142)	• Cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo. • Teorema de Pitágoras. • Cálculo de la medida de un cateto. • Triángulos notables. • Recíproco del teorema de Pitágoras. • Cálculo de la altura y volumen del cono. • Cálculo de la altura y volumen de una pirámide cuadrangular. • Cálculo de la medida de la diagonal de un ortoedro. • Cálculo del área de un hexágono. • Aplicación del teorema de Pitágoras.
	Agosto Septiembre	U7: Ángulo inscrito y central (7)	343 - 359 (143 - 150)	• Elementos de la circunferencia. • Definición y medida de ángulos inscritos. • Teorema del ángulo inscrito. • Arcos congruentes.

<table>
<tr><th>Trimestre</th><th>Mes</th><th>Unidad
(Horas)</th><th>Pág. de GM
(Pág. de LT)</th><th>Contenidos</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Tercero</td><td rowspan="2">Septiembre</td><td>U7: Ángulo inscrito y central
(9)</td><td>360 - 380
(151 - 158)</td><td>• Construcción de tangentes a una circunferencia.
• Cuerdas y arcos de la circunferencia.
• Aplicación con semejanza de triángulos.
• Cuatro puntos en una circunferencia.
• Ángulo semiinscrito.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">U8: Medidas de dispersión
(12)</td><td rowspan="2">381 - 430
(159 - 180)</td><td rowspan="2">• Rango para datos no agrupados.
• Desviación respecto a la media.
• Varianza para datos no agrupados.
• Desviación típica para datos no agrupados.
• Agrupación de datos.
• Media aritmética y rango para datos agrupados.
• Varianza para datos agrupados.
• Desviación típica.
• Desviación típica de una variable más una constante.
• Desviación típica de una variable multiplicada por una constante.</td></tr>
<tr><td>Octubre</td></tr>
</table>

Para desarrollar todo el contenido establecido, se debe cumplir la programación mostrada.

2. Apartados de la Unidad

a) Competencia de la unidad: describe las capacidades que los estudiantes deben adquirir al finalizar la unidad.
b) Relación y desarrollo (entre el grado anterior y el posterior): muestra en qué grado los estudiantes aprendieron los presaberes y en qué grado darán continuidad al contenido.
c) Plan de estudio de la unidad: presenta el contenido de cada clase.
d) Puntos esenciales de cada lección: describe los elementos importantes de las lecciones por unidad.

3. Prueba de la Unidad

Se presenta un ejemplo de la prueba para medir tanto el nivel de comprensión por parte de los estudiantes como el nivel de alcance del objetivo de la unidad por parte de los docentes. Si el rendimiento es bajo en algunos problemas, los docentes deben pensar en cómo mejorarlo y al mismo tiempo, tratar que este bajo rendimiento no sea un obstáculo para el siguiente aprendizaje. De esta manera, los docentes podrán utilizar esta prueba para discutir los resultados con sus colegas, ya sea de la misma institución o de otras.

4. Elementos de las páginas de la GM

Una de las novedades de la segunda edición de la GM es que la página del LT y el plan de pizarra aparece más grande con el objetivo que facilite el desarrollo de la clase a los docentes.

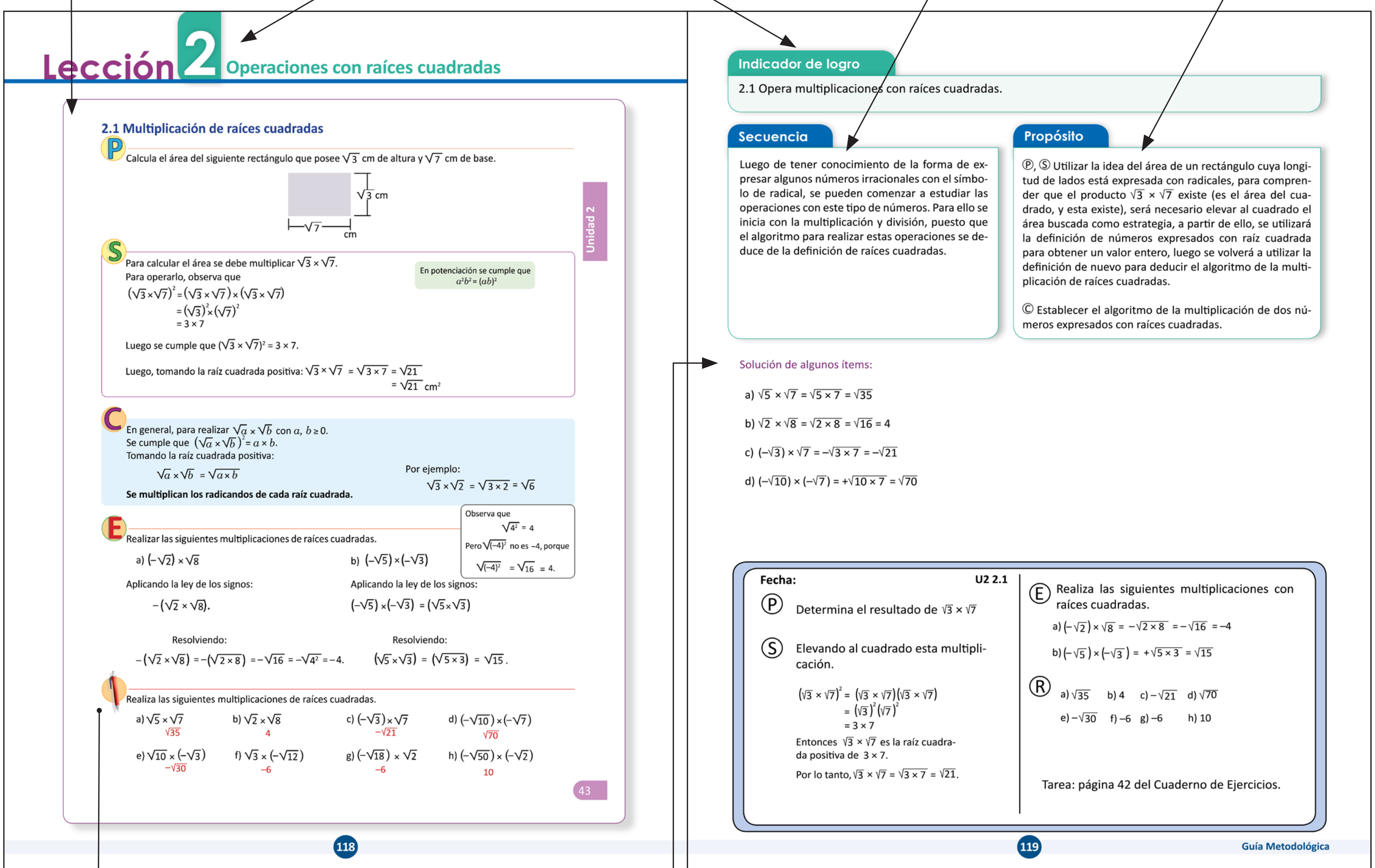
Página del libro de texto.

Número y nombre de la lección.

Indicador de logro de la clase.

Secuencia de la clase en la lección.

Propósito de la clase.



Resolución de los problemas del LT.

En el desarrollo de los problemas de algunas clases, se presenta información adicional e importante para el docente, esto se hace a través de un cuadro como el siguiente:

Información importante para el docente.

V. Orientación para el desarrollo de una clase de Matemática con base en la resolución de problemas

1. Recomendación pedagógica para el desarrollo de la clase

En consonancia con el Programa de Estudio anterior, esta nueva versión también sugiere el desarrollo de las clases de Matemática basándose en el socioconstructivismo a través del enfoque de Resolución de Problemas. En las clases impartidas con este enfoque el centro del proceso de los aprendizajes son los estudiantes, por lo que ellos mismos construyen sus conocimientos y procedimientos a partir de la situación didáctica o problemática planteada. En este proceso, el rol principal del docente es facilitar o asistir en el aprendizaje de los estudiantes; para lo cual deberá seguir el procedimiento que se detalla a continuación:

Pasos	Proceso de aprendizaje (estudiante)	Proceso de asistencia de aprendizajes (docente)	Puntos que se deben tomar en cuenta en la asistencia
1	Confirmación de la respuesta de los problemas de la tarea y recordatorio de presaberes.	Verificar la respuesta correcta de los problemas de la tarea y asegurarse que están realizando los primeros ítems de cada grupo de problemas en el CE.	Utilizar como máximo 3 minutos para este paso.
2	Resolución individual del problema inicial de la clase.	Orientar para que lean el problema inicial de la clase, confirmar el nivel de comprensión de los estudiantes sobre el tema y luego invitarles a que resuelvan de manera individual.	- Mientras los estudiantes resuelven el problema inicial, el docente debe desplazarse en el aula, para verificar los avances y las dificultades que presenten. - Si presentan dificultades, deberá indicarles que lean la solución del LT. - Utilizar como máximo 6 minutos.
3	Aprendizaje interactivo con sus compañeros.	Fomentar el trabajo entre compañeros para que consulten entre ellos las soluciones y dudas.	- En un primer momento, que trabajen por parejas, gradualmente puede aumentar el número de integrantes por equipo, hasta un máximo de cuatro. - Si tienen dificultades, indicarles que lean la solución del LT.
4	Socialización de la solución y la conclusión de la clase.	Orientar para que lean la solución y conclusión de la clase.	Si se considera necesario, se debe explicar la solución o invitarles a que socialicen la solución en plenaria.

5	Resolución del primer ítem de la sección de problemas y ejercicios (aprendizaje activo).	Indicar que resuelvan el primer ítem de la sección de problemas.	Si hay estudiantes que ya resolvieron el primer ítem, invitarles a que trabajen los demás.
6	Evaluación del primer ítem de los problemas.	Verificar la solución del primer ítem de todos los estudiantes y asegurarse que las respuestas son correctas.	- Mientras los estudiantes trabajan, el docente debe desplazarse en el aula revisando el primer ítem de todos los estudiantes. - Dependiendo de la dificultad, el docente puede explicar la solución o simplemente la respuesta.
7	Resolución del resto de ítems.	Orientar para que realicen el resto de ítems. Luego verificar si las respuestas son correctas y orientar para que hagan nuevamente los problemas en los que se equivocaron.	A los estudiantes que terminan primero, se les indica que apoyen a sus compañeros.
8	Tomar nota de la tarea para la casa.	Asignar la tarea del CE, o de los ítems que no se resolvieron del LT.	Si no se logran resolver todos los problemas de la clase del LT, se pueden asignar como tarea, pero analizando la cantidad de tareas que tengan los estudiantes.

Tal como se presentó en la estrategia para el mejoramiento de los aprendizajes de los estudiantes, se deben garantizar como mínimo 20 minutos de aprendizaje activo, esto se logrará si se sigue el proceso presentado anteriormente, sobre todo en los pasos 2, 3, 5 y 7.

2. Puntos importantes a considerar en la facilitación del aprendizaje

a. Uso adecuado del tiempo

En el Programa de Estudio se proporcionan los indicadores de logro y los contenidos que deben ser desarrollados en el número de horas de clase establecidas en este mismo documento curricular. Según el programa, se establece que una clase debe durar 45 minutos y la carga horaria anual es de 200 clases. De acuerdo con este lineamiento, en este tiempo se debe facilitar el aprendizaje de todos los contenidos planteados. En este sentido, se requiere una eficiencia en el aprendizaje en función del tiempo establecido. Alcanzar el indicador de logro en 45 minutos no es una tarea sencilla, por lo que, a continuación, se presentan algunas técnicas para la facilitación de los aprendizajes.

■ Ubicación de los pupitres de los estudiantes

La forma para ubicar los escritorios o pupitres puede variar dependiendo del propósito de la clase, sin embargo, en la clase de Matemática básicamente se recomienda que los ubiquen en filas, es decir, todos los estudiantes viendo hacia la pizarra debido a las siguientes razones:

a. Facilidad para desplazarse entre los pupitres para verificar el aprendizaje de los estudiantes.
b. Facilidad para el aprendizaje interactivo entre compañeros.
c. Comodidad en la postura de los estudiantes para ver la pizarra.

■ Distribución del LT antes de iniciar la clase

En las aulas se tienen establecidas normas de conducta, pero será necesario que se incluya una más, que oriente a los estudiantes a tener preparados los recursos o materiales necesarios antes del inicio de la clase; por ejemplo, en el caso del LT de tercer ciclo, que debe utilizarse y luego se resguarda en la escuela; esta forma de proceder garantiza que los materiales estén protegidos, pero implica tiempo para la distribución al inicio de la clase. Una vez establecida esta norma, se puede asignar a algunos estudiantes la distribución del LT, de tal manera que se responsabilicen de repartirlos antes de iniciar la clase.

■ Tiempo que puede destinar para el recordatorio o repaso

El tiempo de una clase es limitado y cada una tiene su indicador de logro que todos los estudiantes deben alcanzar. Si se destinan más de 3 minutos en la parte inicial donde se recuerdan los presaberes, en la mayoría de los casos no se logrará alcanzar el indicador por falta de tiempo y este desfase irá provocando otros desfases en las clases posteriores; por consiguiente, en el año escolar no se conseguirá abordar todos los contenidos establecidos en el Programa de Estudio.

Cuando se detectan dificultades en la parte del recordatorio, muchas veces no se logra retroalimentar en un tiempo corto, sino que se requiere más tiempo para asegurar el presaber. Por ejemplo, en tercer ciclo usualmente se tienen dificultades en las operaciones básicas, pero para reforzar este dominio, se requiere de más tiempo para resolver problemas. Al desarrollar la parte del recordatorio entonces, el docente no debe olvidar que su propósito es dar una pista para poder resolver el problema de la clase de ese día, y el reforzamiento no es su propósito principal.

■ Tiempo que se debe destinar para la resolución individual en el Problema inicial de la clase

Tal como se estableció en el punto **1. Recomendación pedagógica para el desarrollo de la clase**, se deben utilizar 6 minutos. Muchas veces los estudiantes simplemente están esperando otra orientación del docente sin que sepan qué hacer en la resolución individual. En este caso, es mejor orientar un aprendizaje interactivo, invitándoles a que consulten con sus compañeros.

Tiempo insuficiente para terminar el contenido de una clase

Es posible que haya clases donde no alcance el tiempo por lo que quedarán ítems sin ser resueltos. Algunos docentes los toman como contenidos de otra clase y otros los asignan como tarea. Al tomar la primera medida, muchas veces se provocan desfases en el plan de enseñanza, y en el segundo caso, a veces quedan sobrecargadas las tareas, ya que los estudiantes además tendrán el CE cuyo uso principal es para las tareas. Por tanto, el docente puede tomar la decisión de reservar estos problemas sin resolverlos y utilizarlos para el reforzamiento previo a las pruebas o para asignar a los estudiantes que terminan rápido.

Formación del hábito de estudio en los tiempos extra en la escuela

En ocasiones, el tiempo de las clases no alcanza para la consolidación de los aprendizajes. En este caso, además de la asignación de la tarea, puede utilizar una alternativa de aprovechamiento del tiempo extra en la escuela. Según los horarios de las escuelas no hay un tiempo extra, pero en la práctica, sí existe. Por ejemplo, cuando el docente atiende alguna visita o emergencia antes de iniciar la clase o la jornada, antes de que esta termine o cuando termina una clase en menos de 45 minutos, etc., por lo que será mejor aprovechar este espacio de tiempo para realizar los problemas pendientes del LT. Principalmente, se puede aprovechar el tiempo para reforzar los contenidos básicos donde hay mayor dificultad.

Revisión de todos los problemas resueltos, garantizando que las respuestas son correctas

Revisar todos los problemas que hayan resuelto los estudiantes no es una tarea fácil, ya que implica bastante tiempo, por lo que se debe buscar una alternativa que resuelva esta situación. Para esto, es necesario formar dos hábitos en los estudiantes:

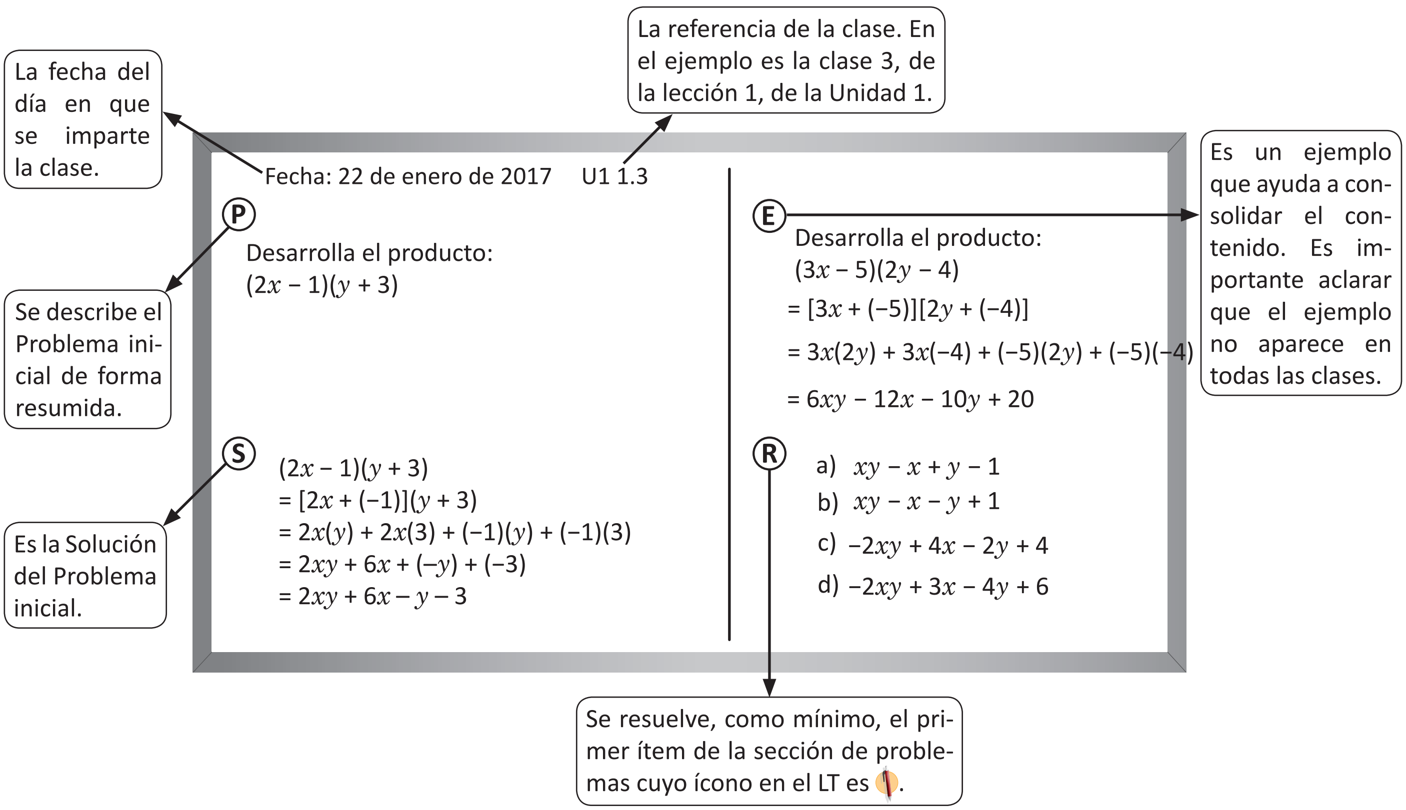
1. El hábito de autocorrección.
2. El hábito de realizar nuevamente los problemas donde se han equivocado.

Al formar el primer hábito, el docente consigue una opción para confirmar las respuestas correctas verbalmente o por escrito en la pizarra; para consolidarlo se puede invitar a los estudiantes a que intercambien los cuadernos para corregirse mutuamente. El segundo hábito permite que los estudiantes no se queden con dudas y esto ayudará a la formación de su personalidad ya que asigna valor al esfuerzo y motivación de lograr el aprendizaje.

Los siguientes puntos no se relacionan directamente con la gestión del tiempo, pero facilitarán la asistencia del docente en el proceso de aprendizaje.

b. Uso de la pizarra

La pizarra tiene la función de un cuaderno común entre el docente y los estudiantes, por lo que en ella debe ordenarse el desarrollo del aprendizaje de la clase. En esta guía se les propone utilizar la siguiente estructura en la pizarra, de acuerdo con el proceso de aprendizaje de matemática establecido en este mismo documento:



En este documento se les propone el uso de la pizarra para cada clase, la pizarra debe ser completada con la información correspondiente según sean los tiempos de cada paso de la clase y considerando los tiempos de aprendizaje activo del grupo de estudiantes.

c. Planificación

En esta guía se propone la planificación de cada clase y puede basarse en alla para impartir la clase, por lo que no es necesario elaborar en otra hoja la planificación, guión o carta didáctica. Incluso, si lo considera necesario, puede escribir algunos puntos importantes con lápiz de grafito (ya que la guía pertenece a la escuela y no al docente, por lo que no debe escribir con lapicero). En caso que considere necesario realizar una adecuación de acuerdo con la particularidad de sus estudiantes, puede elaborar un plan aparte; pero en tal caso, también puede elaborar solamente un plan de pizarra de acuerdo con la estructura anterior, ya que la pizarra es el resumen de todo el proceso de aprendizaje de una clase. A continuación se propone un ejemplo del plan de uso de la pizarra.

Fecha: ________________ Unidad: ________ Lección: ________

Indicador de logro: ____

____

Plan de pizarra:

Ⓟ

Ⓔ

Ⓢ

Ⓡ

Tarea:

Número de estudiantes que resolvieron el primer ítem:

Observaciones:

____

____

d. Uso del cuaderno del estudiante

Cada docente puede establecer el uso de cuaderno de apuntes del estudiante siempre y cuando se incluya: fecha de la clase, página del LT, tema del día, solución, problemas con respuestas correctas. A continuación se presenta un ejemplo del uso del cuaderno.

Fecha: 22 de enero de 2017 U1 1.3

Ⓟ

Desarrolla el producto:

$(2x - 1)(y + 3)$

Ⓢ

$(2x - 1)(y + 3)$

$= [2x + (-1)](y + 3)$

$= 2x(y) + 2x(3) + (-1)(y) + (-1)(3)$

$= 2xy + 6x + (-y) + (-3)$

$= 2xy + 6x - y - 3$

Ⓔ Desarrolla el producto:

$(3x - 5)(2y - 4)$

$= [3x + (-5)][2y + (-4)]$

$= 3x(2y) + 3x(-4) + (-5)(2y) + (-5)(-4)$

$= 6xy - 12x - 10y + 20$

Ⓡ

a) $xy - x + y - 1$

b) $xy - x - y + 1$

c) $-2xy + 4x - 2y + 4$

d) $-2xy + 3x - 4y + 6$

e. Evaluar y brindar orientación necesaria desplazándose en el aula

Mientras los estudiantes resuelven el problema, el docente debe desplazarse en el aula para evaluar el nivel de comprensión del contenido, revisando el trabajo de los estudiantes y observando si han comprendido el enunciado.

Muchas veces se brinda asistencia individual a algunos estudiantes que han tenido dificultad, pero no alcanza el tiempo para atender a todos. La orientación debe realizarse de la siguiente manera: si el número de estudiantes que tienen dificultad es menor a cinco, brindar orientación individual, de lo contrario es mejor brindar otro tipo de orientación, tales como: explicación en plenaria, por grupo, a la hora de revisión de la respuesta correcta, entre otras.

f. Tratamiento a los estudiantes que terminan los problemas más rápido que el resto

Una sección está conformada por un grupo heterogéneo, por lo que siempre hay diferencias entre estudiantes, especialmente en el tiempo que se tardan en resolver los problemas. En la educación pública debe garantizarse igualdad de oportunidades para aprender, y en este sentido, si no se tiene orientación sobre qué hacer con los estudiantes que terminan los problemas antes que otros, ellos estarán perdiendo tiempo y se pueden convertir en un factor negativo para la disciplina del aula por no tener qué hacer. Para evitar esta situación y aprovechar el rendimiento de estos estudiantes, el docente puede establecer el siguiente compromiso: cuando terminen todos los problemas y los hayan revisado, entonces, ellos pueden orientar a sus compañeros. De esta manera, los que tienen dificultades pueden recibir orientación de sus compañeros, mientras los estudiantes que orientan también lograrán interiorizar el aprendizaje de la clase. Así mismo, el docente puede preparar otra serie de problemas para la fijación del contenido u otro tipo de problemas que tienen carácter de desafío, para que los estudiantes puedan seguir desarrollando sus capacidades.

g. Revisión de los cuadernos de apunte

Si no se brinda un monitoreo continuo sobre el uso del cuaderno, eventualmente puede que lo utilicen de manera desordenada, por lo que es necesario que se revise periódicamente su uso, en promedio, una vez al mes. La clave para esto es aumentar el número de revisiones al inicio del año escolar, de tal manera que los estudiantes sientan que están siendo monitoreados y se forme en ellos un hábito. Si se revisa hasta el último detalle del cuaderno, tal vez se necesite más tiempo, por lo que se puede revisar si sigue solamente la estructura del cuaderno de apuntes que se enseñó al inicio del año, el nivel de comprensión en el primer ítem y escribir un comentario sencillo felicitando el buen uso del cuaderno.

h. Revisión de las tareas o CE

De la misma manera que en la revisión de los cuadernos de apuntes, es necesario brindar un monitoreo continuo sobre la realización de las tareas. Además de verificar la realización de la tarea en el primer proceso de las clases, se puede programar periódicamente la revisión de la tarea o CE, prestando especial atención a los estudiantes que hayan cumplido con todas, los que hayan autorevisado con las respuestas correctas y los que resolvieron de nuevo los problemas donde se habían equivocado.

i. Formación del hábito de estudio en el hogar

Según el resultado de la prueba de matemática en el Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE), el resultado de los alumnos q ue estudian más de 30 minutos en el hogar es claramente mejor que los que estudian menos o nada. El tiempo ideal de estudio dependerá del grado, pero por lo general se consideran necesarios 10 minutos por grado, más 10 minutos. Por ejemplo, para el caso de 3.^{er} grado deberían ser $10 \times 3 + 10 = 40$ minutos. Formar el hábito de estudio de los estudiantes en el hogar es tarea no solamente del docente, sino también de los padres de familia y no es nada fácil. Por lo que, al inicio, se podría formar el hábito de estudio a través de la asignación de tareas.

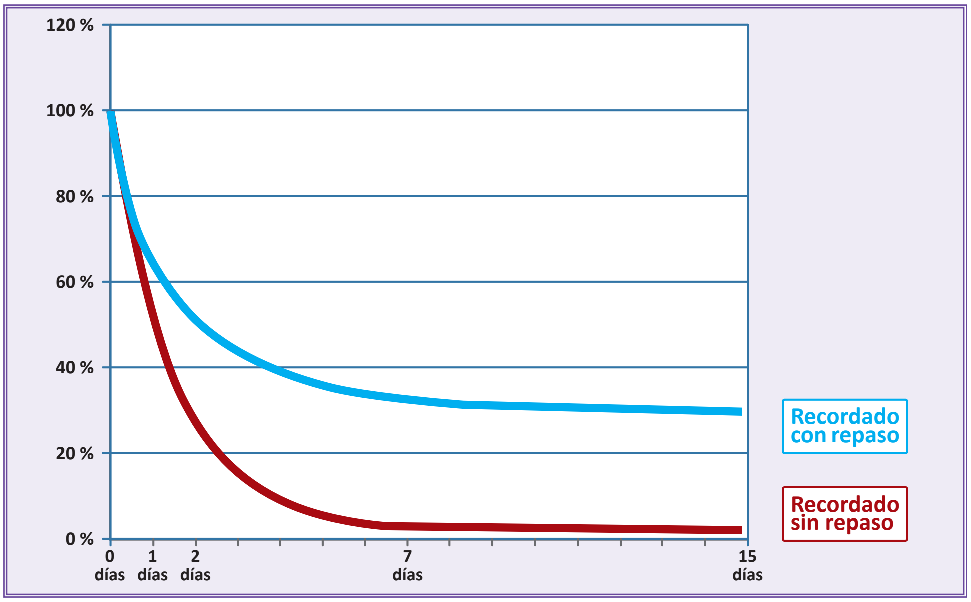
j. Ciclo de orientación, verificación, reorientación y felicitación

Como ciclo básico de todas las orientaciones que hace el docente, si se orienta una acción, se debe dar el monitoreo o verificación del cumplimiento de la misma. Luego, si los estudiantes cumplen, se les debe felicitar porque ya pueden hacerlo; en caso contrario, hay que orientar nuevamente sobre el asunto. Esto aplica en todas las orientaciones. Por ejemplo, si se asigna una tarea, se verifica si el estudiante la cumple, se le felicita y si no la realiza se debe reorientar. Este ciclo aplica también en la asistencia del aprendizaje, si se orienta respecto a un contenido y a través de la prueba se verifica que lo han hecho correctamente, se debe felicitar; en caso contrario, se debe reorientar. El ciclo parece sencillo, pero para cumplirlo continuamente se debe formar el hábito.

El CE que se le entrega a cada uno de los estudiantes como material fungible, tiene la finalidad de apoyar la fijación de los contenidos aprendidos ofreciendo los problemas para realizar en la casa, presentando algunos que tienen carácter de desafío para avanzar un poco más allá de lo que se aprende en la clase, integrar algunos temas transversales como la educación financiera, entre otros temas y formar el hábito de estudio en el hogar.

Muchas veces, al hablar de constructivismo, se da más énfasis al proceso de construcción de nuevos conocimientos por sí mismos, dejando de lado el proceso importante de la adquisición del buen dominio o interiorización de ese conocimiento como base para seguir construyendo otros conceptos más complejos. Para asegurar esta interiorización de un contenido se requiere mucha práctica.

Hermann Ebbinghaus, filósofo y psicólogo del siglo XIX, en la famosa **curva del olvido** muestra que como resultado de la memorización mecánica, un día después del aprendizaje, sin repasar, se mantiene en la memoria solamente el 50 % de lo memorizado, dos días después el 30 % y una semana después apenas el 3 %, tal como se muestra a continuación:



Tomando en cuenta este hecho, el Dr. Masaru Ogo experimentó en varios centros escolares de Japón una estrategia llamada "módulo de 3:3", donde los estudiantes refuerzan los problemas del mismo contenido durante tres días, obteniendo mejoras en el aprendizaje y logrando mejorar la curva del olvido, tal como se muestra en la línea celeste.

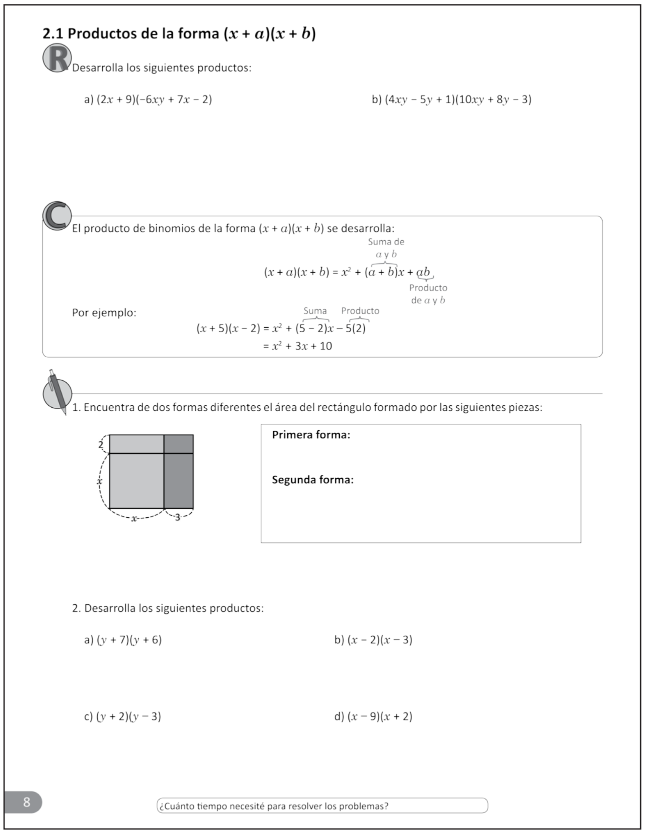
A veces, los problemas o ejercicios sencillos son catalogados como mecánicos; sin embargo, en estudios recientes, especialmente en el campo de neurología, hay una teoría de que los problemas simples activan más la parte de la corteza prefrontal del cerebro donde se encuentra la función de pensar, comunicar, controlar los sentimientos, etc., en comparación con los problemas complejos.

Para finalizar, la importancia de los problemas simples no debe faltar en los resultados de pruebas internacionales donde se evalúan clasificando los ítems, al menos en los dominios cognitivos del conocimiento y aplicación. En los resultados de estas pruebas siempre se obtiene mejor puntaje de conocimiento que de aplicación y claramente muestra correlación entre el puntaje del dominio del conocimiento y el puntaje del dominio de aplicación. De este hecho se puede interpretar que el dominio de conocimientos contribuye al dominio de aplicación, es decir, si se tiene buen dominio en conocimientos se puede mejorar el domino de aplicación.

Por medio del CE se pretende asegurar la interiorización de conocimientos básicos y luego desarrollar la aplicación.

Estructura del CE

Básicamente este documento está estructurado en correspondencia y de acuerdo con las páginas del LT. Para una clase del LT, hay una página correspondiente en el CE. Una página del CE tiene los siguientes elementos: recordatorio o retroalimentación de los contenidos de los días anteriores, conclusión del contenido del día y problemas del contenido del día. A continuación se presenta un esquema de la página:


2.1 Productos de la forma $(x + a)(x + b)$

R Desarrolla los siguientes productos:

a) $(2x + 9)(-6xy + 7x - 2)$

b) $(4xy - 5y + 1)(10xy + 8y - 3)$

C El producto de binomios de la forma $(x + a)(x + b)$ se desarrolla:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \overbrace{(a + b)}^{\text{Suma de } a \text{ y } b}x + \underbrace{ab}_{\text{Producto de } a \text{ y } b}$$

Por ejemplo:

$$(x + 5)(x - 2) = x^2 + \overbrace{(5 - 2)}^{\text{Suma}}x - \overbrace{5(2)}^{\text{Producto}}$$
$$= x^2 + 3x + 10$$

1. Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas:

Primera forma:

Segunda forma:

2. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(y + 7)(y + 6)$

b) $(x - 2)(x - 3)$

c) $(y + 2)(y - 3)$

d) $(x - 9)(x + 2)$

8

¿Cuánto tiempo necesité para resolver los problemas?

Problemas de las clases anteriores para mejorar el aprendizaje, según la curva del olvido.

Es la misma conclusión del LT.

Problemas del mismo tipo de la clase actual que se desarrolló, pero que no sean iguales con los presentados en el LT.

El estudiante debe colocar el tiempo que utilizó para resolver los problemas.

Uso general del CE

Al final de la clase de Matemática, se debe indicar como tarea el número de la página que corresponde al contenido de la clase del día. En el inicio de la siguiente clase se corroboran las respuestas correctas.

Orientaciones específicas del uso del CE

- Orientar como tarea para el día que tenga la clase de Matemática. En caso de que se tengan dos clases en un día, lo cual no es tan favorable pedagógicamente, debe invitar a que trabajen dos páginas que correspondan a los contenidos del día o separar para realizarlas en dos días.
- En el CE se puede escribir y manchar.
- El docente debe revisar periódicamente, al menos los primeros ítems de cada grupo de problemas y hacer comentarios que orienten e incentiven a los estudiantes.
- Si se considera conveniente, solicitar a los padres de familia que escriban comentarios sobre el avance del estudio en el hogar.
- Si quedan algunas páginas sin ser resueltas, asignar como tarea para los días de las reflexiones pedagógicas, cuando los estudiantes no asisten a las clases.

1. Importancia de la aplicación de las pruebas

Los resultados que se obtienen al evaluar el aprendizaje de los estudiantes, proporcionan al docente información valiosa que le permite tener un panorama real sobre el avance obtenido. Con base en esto, el docente puede tomar decisiones con el fin de garantizar que sus estudiantes alcancen los indicadores de logro de cada clase, desarrollen las competencias transversales y cumplan a su vez con los objetivos de grado propuestos.

Cuando los resultados son positivos, el docente continúa mejorando su práctica, con el fin de que cada vez sea más efectiva.

Si los resultados no son tan favorables, será necesario que el docente autoevalúe su desempeño basado en los resultados de los aprendizajes de los estudiantes y ponga todo su empeño y esfuerzo para dar lo mejor de sí. Para ello, debe participar en procesos de formación, debe investigar sobre los contenidos donde considere que tenga mayores dificultades y podría consultar con sus compañeros de trabajo.

Es importante destacar que el docente es uno de los actores más importantes en el ámbito educativo; por tal razón, debe asumir su rol como tal y autoevaluar su desempeño basado en los resultados de los aprendizajes de los estudiantes.

Considerando lo anterior, debe hacer uso de las pruebas que contiene esta GM, las cuales buscan recolectar información valiosa y relacionada con la realidad de los aprendizajes, tanto adquiridos como no adquiridos.

2. Propósito de las pruebas

Resumiendo lo anterior, se podría concluir que el propósito es el siguiente:

- Obtener información en cuanto al nivel de comprensión de los contenidos por parte de los estudiantes.
- Diseñar estrategias de mejora en los contenidos donde los estudiantes salieron deficientes.
- Evaluar el desempeño del docente y mejorar su práctica basado en el análisis de los resultados de la prueba.

3. Función de cada prueba

Son tres tipos de pruebas, de unidad, de trimestre y final. Todas tienen el mismo propósito planteado. Sin embargo, según su conveniencia, se pueden dar varias funciones a cada una de ellas. A continuación se plantean algunos ejemplos de cómo utilizarlas.

a. Prueba de Unidad

Los ítems que aparecen en dicha prueba corresponden a los principales indicadores de logro (curriculares) los cuales están enunciados en las clases de cada unidad. Por lo tanto, el docente puede conocer el nivel de comprensión de los contenidos por parte de los estudiantes. Lo ideal es dar una retroalimentación una vez se detecten las dificultades; sin embargo, no siempre se tiene suficiente tiempo para impartir clases adicionales. En este caso, se puede invitar a los estudiantes para que ellos mismos revisen y trabajen los ítems que no pudieron resolver en el momento de la aplicación de la prueba.

Se puede entregar la copia de las respuestas de la prueba que está en este documento para que la analicen en grupos, de esta forma, ellos pueden aprender interactivamente con sus compañeros; luego, el docente puede recoger la prueba revisada por los estudiantes y ésta podría ser una información referencial sobre el avance de sus estudiantes.

Antes de la aplicación de dicha prueba, es recomendable anunciarles a los estudiantes con el fin de que ellos repasen con antelación los contenidos de la unidad a evaluar.

b. Prueba de Trimestre

Los ítems que aparecen en esta prueba corresponden a los contenidos esenciales del respectivo trimestre. El momento ideal para aplicar dicha prueba será un día antes de finalizar el trimestre, ya que, en la última clase, se pueden retroalimentar los contenidos. Sin embargo, si no se puede hacer así, podría aplicarse en el último día del trimestre y dar la retroalimentación en la primera clase del próximo trimestre.

Además de esto, aprovechando las Reflexiones Pedagógicas, se puede compartir el resultado de las pruebas con docentes de otros centros educativos. Así se podrá consultar cuáles son las dificultades que han encontrado, qué tipo de esfuerzos han aplicado otros docentes, entre otros temas que contribuyan al mejoramiento de los aprendizajes. Una vez establecido un grado de confianza con otros docentes, se podría establecer comunicación vía redes sociales, para compartir información que facilite procesos y contribuya a mejorar los aprendizajes de los estudiantes.

c. Prueba Final

Los ítems que aparecen en esta prueba corresponden a los contenidos esenciales del año lectivo. Sin duda alguna la aplicación de esta prueba generará mucha expectativa, sabiendo que el resultado será el reflejo de todo el esfuerzo profesional del docente durante todo el año escolar. El resultado le indicará qué es lo que tiene que hacer el próximo año lectivo a fin de mejorar la práctica docente. Además, para dar un uso objetivo a estas pruebas, el docente debe registrar en el expediente escolar, las áreas o contenidos que debe reforzar el docente que atenderá el próximo año a los estudiantes.

4. Uso de los resultados de la prueba

Ejemplo. Se supone que se aplica una prueba a estudiantes de noveno grado, y de ella se presentan dos situaciones:

Respuesta correcta:

	Desarrola $(x-2)^2$
Solución de los estudiantes	$x^2 - 4x + 4$
Porcentaje de estudiantes que resolvieron de esta forma	70 %

Respuesta incorrecta:

	Desarrola $(x-2)^2$
Solución de los estudiantes	$x^2 - 4$
Porcentaje de estudiantes que resolvieron de esta forma	60 %

Si se obtuvo el resultado planteado, ¿cómo se puede analizar?

Información que el docente puede obtener de este resultado:

Capacidad adquirida	Capacidad no adquirida
Concepto de la igualdad	Concepto de división
Algoritmo	Concepto de fracción

Estrategia para aprovechar los resultados para la retroalimentación:

Posible consideración a corto plazo	Posible consideración a mediano plazo
Para confirmar que el alumno comprende la solución de la ecuación, se deberá utilizar una, cuya respuesta sea un cociente, de lo contrario, no se podrá pasar a un nuevo tema porque no ha comprendido los contenidos anteriores.	Se deberá promover una actividad de "aprendizaje interactivo entre alumnos" con el fin de hacerles un recordatorio de los contenidos anteriores con el apoyo y sugerencia de sus compañeros.
Si se observa la misma situación con varios alumnos, será necesario reforzar haciéndoles un recordatorio en la pizarra sobre el mismo tipo de ítem.	Promover el autoestudio en la casa y en el centro educativo hasta que tengan dominio de este tipo de ítems.

Con lo anterior, el docente podrá dedicar su tiempo y esfuerzo a enfocarse en los contenidos que el estudiante no pudo contestar correctamente.

Para finalizar, a continuación se presenta el proceso del uso adecuado de las pruebas que el docente debe seguir:

a. Aplicar la prueba incluida en la GM en el momento oportuno.
   - Prueba de Unidad (cada vez que se finalice una unidad).
   - Prueba de Trimestre (antes de finalizar cada trimestre).
   - Prueba Final (antes de finalizar el grado).

b. Revisar la prueba aplicada.

c. Analizar la información que se obtenga con respecto a los resultados.

d. Diseñar una estrategia para la retroalimentación.

e. En el caso de la Prueba de Trimestre, se analizarán los resultados con los docentes de centros educacctivos cercanos durante la Reflexión Pedagógica para crear una estrategia de mejora.

Unidad 1. Multiplicación de polinomios

Competencia de la Unidad

Adquirir habilidades del dominio del álgebra elemental, a través de los procesos de multiplicación y factorización de polinomios, apoyándose en justificaciones geométricas que faciliten su visualización para resolver problemas de matemática y de su entorno.

Relación y desarrollo

Séptimo grado

Unidad 4: Comunicación con símbolos
- Expresiones algebraicas
- Operaciones con expresiones algebraicas
- Representación de relaciones entre expresiones matemáticas

Unidad 5: Ecuaciones de primer grado
- Igualdad de expresiones matemáticas
- Ecuación de primer grado
- Aplicación de ecuaciones de primer grado

Octavo grado

Unidad 1: Operaciones algebraicas
- Operaciones con polinomios
- Aplicación de las expresiones algebraicas

Unidad 2: Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Métodos para resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Noveno grado

Unidad 1: Multiplicación de polinomios
- Multiplicación de polinomios
- Productos notables
- Factorización

Unidad 3: Ecuación cuadrática
- Ecuación cuadrática
- Aplicaciones de la ecuación cuadrática

Primer año de bachillerato

Unidad 2: Operaciones con polinomios y números complejos
- Productos notables y factorización
- División de polinomios
- Ecuación cuadrática y números complejos

Unidad 3: Desigualdades
- Desigualdad
- Desigualdad lineal
- Desigualdad no lineal

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Multiplicación de polinomios	1	1. Multiplicación de monomio por binomio
	1	2. Binomio por binomio, parte 1
	1	3. Binomio por binomio, parte 2
	1	4. Binomio por trinomio
	1	5. Trinomio por trinomio
	1	6. Practica lo aprendido
2. Productos notables	1	1. Productos de la forma $(x + a)(x + b)$
	1	2. Cuadrado de un binomio, parte 1
	1	3. Cuadrado de un binomio, parte 2
	1	4. Suma por la diferencia de binomios
	1	5. Desarrollo de productos notables utilizando sustitución
	1	6. Combinación de productos notables
	1	7. Cuadrado de un trinomio
	1	8. Valor numérico y cálculo de operaciones
	1	9. Practica lo aprendido
	1	10. Practica lo aprendido
3. Factorización	1	1. Factorización de polinomios
	1	2. Factor común
	1	3. Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 1
	1	4. Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 2
	1	5. Factorización de trinomios cuadrados perfectos

Lección	Horas	Clases
	1	6. Factorización de diferencias de cuadrados
	1	7. Practica lo aprendido
	1	8. Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 1
	1	9. Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 2
	1	10. Factorizaciones sucesivas
	1	11. Combinación de factorizaciones
	1	12. Cálculo de operaciones aritméticas usando factorización
	1	13. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 1

29 horas clase + prueba de la Unidad 1

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Multiplicación de polinomios
Se estudia la multiplicación de polinomios. Utilizando el área de rectángulos se justifica geométricamente el significado de la multiplicación de los polinomios; se establecen los algoritmos para la multiplicación de monomio por binomio, binomio por binomio, binomio por trinomio y trinomio por trinomio.

Lección 2: Productos notables
Se establecen productos especiales llamados productos notables; por ejemplo, el cuadrado de un binomio, la suma por la diferencia de binomios y el cuadrado de un trinomio. Además, se realiza el desarrollo de productos que involucran expresiones más complejas utilizando la sustitución de variables. Este conocimiento servirá de base para la siguiente unidad donde se realizarán productos de raíces cuadradas.

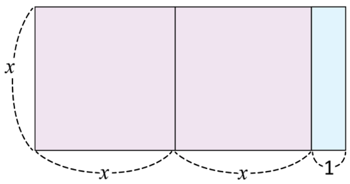
Lección 3: Factorización
Se establece la factorización como el proceso inverso del desarrollo de un producto de polinomios y utilizando áreas de rectángulos se desarrollan ideas intuitivas de algunos algoritmos de factorización. Se estudiará el factor común, factorización de trinomios y trinomios cuadrados perfectos, diferencia de cuadrados y factorizaciones utilizando cambio de variable.

Lección 1 Multiplicación de polinomios

1.1 Multiplicación de monomio por binomio

P

Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas.



En potenciación se cumple que $a \times a = a^2$

S

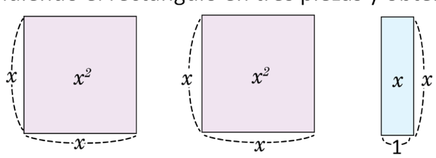
Primera forma:

La altura del rectángulo es x, mientras que su base es: $x + x + 1 = 2x + 1$. El área del rectángulo formado por las tres piezas es: $x(2x + 1)$.

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por un término o por la suma de dos o más términos. Un **monomio** es el polinomio formado por un solo término.

Segunda forma:

Dividiendo el rectángulo en tres piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:

$x^2 + x^2 + x = 2x^2 + x$.

Por tanto, el área del rectángulo también es: $2x^2 + x$.

En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo, podemos decir, por tanto: $x(2x + 1) = 2x^2 + x$.

Realizando el producto:

Lo anterior también pudo encontrarse algebraicamente multiplicando x por cada uno de los términos del polinomio $2x + 1$:

$$\begin{aligned} x(2x + 1) &= x(2x) + x(1) \\ &= 2x^2 + x \end{aligned}$$

C

En el producto de un monomio por un binomio, el primero se multiplica por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x(3x + 4) &= 2x(3x) + 2x(4) \\ &= 6x^2 + 8x \end{aligned}$$

A este proceso se le llama: **desarrollo**.

E

Desarrolla los siguientes productos:

a) $2x(x - y)$

$$\begin{aligned} 2x(x - y) &= 2x(x) - 2x(y) \\ &= 2x^2 - 2xy \end{aligned}$$

b) $(xy - y)(-2x)$

$$\begin{aligned} (xy - y)(-2x) &= xy(-2x) - y(-2x) \\ &= -2x^2y - (-2xy) \\ &= -2x^2y + 2xy \end{aligned}$$

1. Dibuja el rectángulo formado por las siguientes expresiones algebraicas y encuentra el área que resulta al dividir las piezas.

   a) $x(3x + 2)$ $= 3x^2 + 2x$ b) $2x(x + y)$ $= 2x^2 + 2xy$

2. Desarrolla los siguientes productos:

   a) $-x(xy + x)$ $= -x^2y - x^2$

   b) $-3y(x - y)$ $= -3xy + 3y^2$

   c) $(xy + x)xy$ $= x^2y^2 + x^2y$

   d) $xy(xy + x + y)$ $= x^2y^2 + x^2y + xy^2$

Indicador de logro

1.1 Desarrolla el producto de monomio por binomio.

Secuencia

El álgebra simbólica se estudia formalmente desde séptimo grado, donde se traducen expresiones del lenguaje coloquial al algebraico y se realizan operaciones que involucran un número y una expresión algebraica. Posteriormente, en octavo grado, se continúa el estudio de las operaciones suma y resta de polinomios y se determina el valor numérico de polinomios. El estudiante hasta este momento, utiliza símbolos para generalizar un patrón, es decir, representar una variable con letra, pero también para indicar una incógnita a través de la solución de una ecuación. En esta clase se estudia el producto de un monomio con un binomio, ya que en octavo grado se estudió el producto de monomio con monomio.

Propósito

Ⓟ,Ⓢ Para facilitar la comprensión se presenta una situación gráfica a través de la cual se pueda relacionar el producto de un monomio con un binomio utilizando áreas de rectángulos, el área puede encontrarse de dos formas diferentes, lo que permite establecer una igualdad entre ambas expresiones.
Ⓒ Se establece el algoritmo para realizar la multiplicación de un monomio por un binomio. Es importante mencionar que al proceso de multiplicar polinomios se le llama **desarrollo** y es una aplicación de la propiedad distributiva. En la solución de ejercicios se utiliza directamente el algoritmo establecido en la conclusión para desarrollar los productos. Hay que prestar atención al signo; además, en el literal b), el orden de los factores es binomio por monomio.

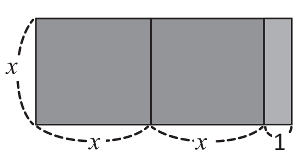
Solución de algunos ítems:

2. a) $-x(xy + x) = -x(xy) + (-x)(x)$
$= -x^2y - x^2$

d) $xy(xy + x + y)$
$= xy(xy) + xy(x) + xy(y)$
$= x^2y^2 + x^2y + xy^2$

Fecha: **U1 1.1**

Ⓟ Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo.



Ⓢ Forma 1. Calculando el área:
altura × base = $x(2x + 1)$

Forma 2. Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:
$x^2 + x^2 + 1 = 2x^2 + 1.$
Las dos formas describen la misma área. Por tanto, $x(2x + 1) = 2x^2 + 1$.

Ⓔ Desarrolla los siguientes productos:

a) $2x(x - y)$
$= 2x(x) - 2x(y)$
$= 2x^2 - 2xy$

b) $(xy - y)(-2x)$
$= xy(-2x) - y(-2x)$
$= -2x^2y - (-2xy)$
$= -2x^2y + 2xy$

Ⓡ 1.
a) $3x^2 + 2x$ b) $2x^2 + 2xy$

2.
a) $-x^2y - x^2$ b) $-3xy + 3y^2$
c) $x^2y^2 + x^2y$ d) $x^2y^2 + x^2y + xy^2$

Tarea: página 2 del Cuaderno de Ejercicios.

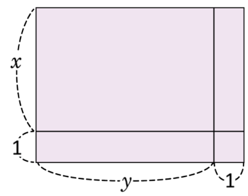
Lección 1

Unidad 1

1.2 Binomio por binomio, parte 1

P

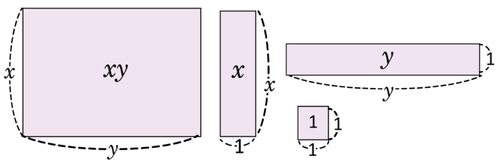
Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas.



S

Primera forma: La altura del rectángulo es $y + 1$ y su base es $x + 1$. Entonces, el área buscada es el producto: $(x + 1)(y + 1)$.

Segunda forma:
Dividiendo el rectángulo en piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:
$xy + x + y + 1$.
Por tanto, el área del rectángulo también es:
$xy + x + y + 1$.

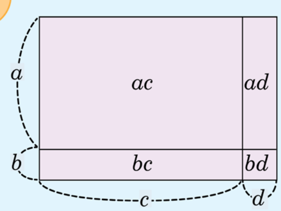
En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo.
Por tanto: $(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$.

Al polinomio formado por dos términos se le llama: **binomio**.

Realizando el producto:
Lo anterior puede encontrarse multiplicando cada término del primer binomio por cada uno de los términos del segundo, es decir:

$$\begin{aligned}(x + 1)(y + 1) &= x(y) + x(1) + 1(y) + 1(1)\\ &= xy + x + y + 1\end{aligned}$$

C



En el producto de un binomio por otro binomio se multiplican cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

E

Desarrolla el producto: $(2xy + x)(3y + 2)$

$$\begin{aligned}(2xy + x)(3y + 2) &= 2xy(3y) + 2xy(2) + x(3y) + x(2)\\ &= 6xy^2 + 4xy + 3xy + 2x\\ &= 6xy^2 + 7xy + 2x\end{aligned}$$

Los términos $4xy$ y $3xy$ son semejantes, pues tienen la misma parte literal xy. Para sumarlos, se suman sus coeficientes 4 y 3, conservando la parte literal.

Por lo tanto, $(2xy + x)(3y + 2) = 6xy^2 + 7xy + 2x$.

Desarrolla:

a) $(2x + 1)(y + 1)$
$= 2xy + 2x + y + 1$

b) $(2x + 3)(3y + 2)$
$= 6xy + 4x + 9y + 6$

c) $(xy + 3x)(y + 1)$
$= xy^2 + 4xy + 3x$

d) $(2xy + 3y)(3x + 5)$
$= 6x^2y + 19xy + 15y$

e) $(x + 1)(x + y)$
$= x^2 + xy + x + y$

f) $(2x + 3)(x + y)$
$= 2x^2 + 2xy + 3x + 3y$

3

Indicador de logro

1.2 Determina el desarrollo del producto de un binomio por un binomio que involucre el signo positivo.

Secuencia

En la clase anterior se obtuvo el algoritmo para multiplicar un monomio por un binomio, en esta clase se amplía hasta deducir el algoritmo para multiplicar un binomio por un binomio, que puede verse como una extensión del algoritmo anterior, cuando los dos factores son binomios.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Para entender que aparecen cuatro términos, se utiliza el área de rectángulos para deducir el algoritmo de multiplicación de un binomio por binomio.
Los algeblocks pueden elaborarse utilizando material sencillo como cualquier tipo de papel que sea manipulable, se pueden utilizar fotocopias del material complementario que aparece al final del Libro de texto de noveno grado. Es importante que los estudiantes tengan a disposición el material antes de comenzar la clase y no utilizar el tiempo de la misma en organización o preparación del material.

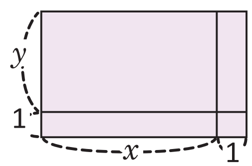
Ⓒ En lugar de utilizar directamente la propiedad distributiva, multiplicar asociando una variable a cada paréntesis. Utilizar un modelo de áreas para hacer más comprensible su desarrollo. Para esta clase únicamente se realiza el desarrollo del producto de binomios que involucran signos positivos para facilitar la comprensión.

Posibles dificultades:
En este punto, algunos estudiantes confunden el uso de las letras en expresiones algebraicas, dándoles significado como incógnita; es decir, el estudiante busca que la letra tome un valor numérico concreto. Es importante hacer notar que en estos procesos algebraicos la variable no representa una incógnita, los modelos de área de rectángulos pueden ayudar a evitar este error.

Fecha:

U1 1.2

Ⓟ Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo.



Ⓢ Forma 1. Calculando el área:
base × altura = $(x + 1)(y + 1)$
Forma 2. Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:
$xy + x + y + 1$
Las dos formas describen la misma área. Por tanto, $(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$.

Ⓔ Desarrolla el producto:
$(2xy + x)(3y + 2)$
$= 2xy(3y) + 2xy(2) + x(3y) + x(2)$
$= 6xy^2 + 4xy + 3xy + 2x$
$= 6xy^2 + 7xy + 2x$

Ⓡ
a) $2xy + 2x + y + 1$
b) $6xy + 4x + 9y + 6$
c) $xy^2 + 4xy + 3x$
d) $6x^2y + 19xy + 15y$
e) $x^2 + xy + x + y$
f) $2x^2 + 2xy + 3x + 3y$

Tarea: página 3 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Binomio por binomio, parte 2

P

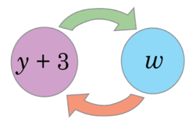
Desarrolla el producto: $(2x - 1)(y + 3)$.

La resta $a - b$ puede escribirse como una suma:
$$a - b = a + (-b)$$

S

Se debe tener en cuenta el signo (−) del primer binomio. El producto puede desarrollarse de las siguientes formas:

1. Se escribe $2x - 1$ como una suma: $2x + (-1)$. El producto se desarrolla como en la clase anterior:
$$\begin{aligned}(2x-1)(y+3) &= [2x+(-1)](y+3)\\ &= 2x(y) + 2x(3) + (-1)(y) + (-1)(3)\\ &= 2xy + 6x + (-y) + (-3)\\ &= 2xy + 6x - y - 3\end{aligned}$$



2. Se toma $y + 3 = w$ y se desarrolla como el producto de un binomio por un monomio:
$$\begin{aligned}(2x-1)(y+3) &= 2x(w) - 1(w) && \text{Tomando } w = y+3,\\ &= 2x(y+3) - (y+3) && \text{sustituyendo nuevamente } y+3 = w,\\ &= 2xy + 6x - y - 3.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2x - 1)(y + 3) = 2xy + 6x - y - 3$.

C

Para resolver el producto de un binomio por otro se puede hacer de 2 formas:

1. Se escribe $a - b = a + (-b)$ y luego se desarrolla el producto.
$$\begin{aligned}(a-b)(c+d) &= [a+(-b)]\,(c+d)\\ &= ac + ad + (-b)c + (-b)d\\ &= ac + ad + (-bc) + (-bd)\\ &= ac + ad - bc - bd\end{aligned}$$

2. Se toma $c + d = w$ y se desarrolla como el producto de un binomio por un monomio.

E

Desarrolla: $(3x - 5)(2y - 4)$.

Se escribe el primer término como $3x + (-5)$ y el segundo término como $2y + (-4)$:
$$\begin{aligned}(3x-5)(2y-4) &= [3x+(-5)][2y+(-4)]\\ &= 3x(2y) + 3x(-4) + (-5)(2y) + (-5)(-4)\\ &= 6xy - 12x - 10y + 20\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(3x - 5)(2y - 4) = 6xy - 12x - 10y + 20$.

Desarrolla:

a) $(x + 1)(y - 1)$
$= xy - x + y - 1$

b) $(x - 1)(y - 1)$
$= xy - x - y + 1$

c) $(2x + 2)(-y + 2)$
$= -2xy + 4x - 2y + 4$

d) $(-x - 2)(2y - 3)$
$= -2xy + 3x - 4y + 6$

e) $(xy - x)(y + 10)$
$= xy^2 + 9xy - 10x$

f) $(2xy - y)(5x - 3)$
$= 10x^2y - 11xy + 3y$

4

Indicador de logro

1.3 Determina el desarrollo del producto de un binomio por un binomio que involucre el signo positivo y negativo.

Secuencia

Anteriormente se utilizaron áreas de rectángulos para deducir el algoritmo de productos de binomios donde todos los términos son positivos. Para esta clase se utiliza este hecho para desarrollar productos que involucren también signos negativos; cambiando la resta a la suma o sustituyendo un binomio por variable.

Propósito

Ⓟ Proponer al estudiante una variante de las situaciones de la multiplicación de un binomio por binomio que aprendió en la clase anterior.
Ⓢ Presentar dos formas distintas de realizar la multiplicación de los binomios. La primera utiliza el algoritmo visto en la clase anterior; en la segunda forma se utiliza por primera vez la técnica del cambio de variable mediante la sustitución $w = y + 3$ y luego realizando el producto de monomio por binomio. Es importante que el alumno no memorice la identidad, lo importante es que sepa utilizar el algoritmo del desarrollo y apoyarse en diferentes técnicas como el cambio de variable. Cuando los estudiantes estén acostumbrados, se espera que omitan el proceso descrito en la parte 1 de la conclusión.

En la sección de ejercicios se presenta una variante al Problema inicial cuando los dos términos son una resta, se debe hacer énfasis en que las técnicas utilizadas en el Problema inicial también sirven para desarrollar este producto.

Solución de algunos ítems:

$$\begin{aligned}(-x-2)(2y-3) &= [-x+(-2)][2y+(-3)]\\ &= -x(2y) - x(-3) + (-2)(2y) + (-2)(-3)\\ &= -2xy + 3x - 4y + 6\end{aligned}$$

Posibles dificultades:
Manejo de las operaciones con signos. Por ejemplo, un error común es el siguiente: $-x(-3) = -3x$.

Fecha:

U1 1.3

Ⓟ Desarrolla el producto:
$(2x-1)(y+3)$

Ⓢ 1. $(2x-1)(y+3)$
$= [2x+(-1)](y+3)$
$= 2x(y) + 2x(3) + (-1)(y) + (-1)(3)$
$= 2xy + 6x + (-y) + (-3)$
$= 2xy + 6x - y - 3$

2. $(2x-1)(y+3)$
$= 2x(w) - 1(w)$ Tomando $w = y + 3$
$= 2x(y+3) - (y+3)$ Sustituyendo $y + 3 = w$
$= 2xy + 6x - y - 3$

Ⓔ Desarrolla el producto:
$(3x-5)(2y-4)$
$= [3x+(-5)][2y+(-4)]$
$= 3x(2y) + 3x(-4) + (-5)(2y) + (-5)(-4)$
$= 6xy - 12x - 10y + 20$

Ⓡ a) $xy - x + y - 1$
b) $xy - x - y + 1$
c) $-2xy + 4x - 2y + 4$
d) $-2xy + 3x - 4y + 6$
e) $xy^2 + 9xy - 10x$
f) $10x^2y - 11xy + 3y$

Tarea: página 4 del Cuaderno de Ejercicios.

1.4 Binomio por trinomio

P

Desarrolla el producto: $(x + 2)(xy + y + 1)$.

El polinomio $xy + y + 1$ se llama **trinomio**, ya que posee tres términos, $(x + 2)(xy + y + 1)$ es el producto de un binomio por un trinomio.

S

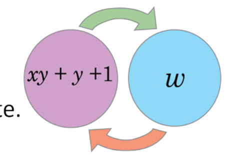
El producto puede desarrollarse de las siguientes maneras:

1. Multiplicando cada término del binomio por cada uno de los términos del trinomio:

$$\begin{aligned}(x + 2)(xy + y + 1) &= x(xy) + x(y) + x(1) + 2(xy) + 2(y) + 2(1)\\ &= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2\\ (x + 2)(xy + y + 1) &= x^2y + 3xy + x + 2y + 2\end{aligned}$$

2. Se toma $xy + y + 1 = w$, y se desarrolla como el producto de un binomio por un monomio:

$$\begin{aligned}(x + 2)(xy + y + 1) &= (x + 2)w\\ &= x(w) + 2(w) && \text{Tomando } xy + y + 1 = w,\\ &= x(xy + y + 1) + 2(xy + y + 1)\\ &= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2 && \text{sustituyendo nuevamente.}\\ &= x^2y + 3xy + x + 2y + 2\end{aligned}$$



Por lo tanto, $(x + 2)(xy + y + 1) = x^2y + 3xy + x + 2y + 2$.

C

El producto $(a + b)(c + d + e)$ puede realizarse de dos formas:

1. Multiplicando cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo, teniendo en cuenta la ley de los signos:

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

Luego de desarrollar un producto de polinomios, siempre hay que reducir términos semejantes.

2. Se toma $c + d + e = w$ y se desarrolla como el producto de binomio por monomio.

E

Desarrolla $(2x - 1)(2x - y + 3)$ de las dos formas dadas en la conclusión.

1. Primero, se escribe $2x - 1 = 2x + (-1)$ y $2x - y + 3 = 2x + (-y) + 3$:

$$\begin{aligned}(2x - 1)(2x - y + 3) &= (2x + (-1))(2x + (-y) + 3)\\ &= 2x(2x) + 2x(-y) + 2x(3) + (-1)(2x) + (-1)(-y) + (-1)(3)\\ &= 4x^2 - 2xy + 6x - 2x + y - 3\\ (2x - 1)(2x - y + 3) &= 4x^2 - 2xy + 4x + y - 3\end{aligned}$$

2. Se sustituye $w = 2x - y + 3$:

$$\begin{aligned}(2x - 1)(2x - y + 3) &= (2x - 1)w && \text{Tomando } w = 2x - y + 3,\\ &= 2x(w) - w\\ &= 2x(2x - y + 3) - (2x - y + 3) && \text{sustituyendo nuevamente.}\\ &= 4x^2 - 2xy + 6x - 2x + y - 3\\ (2x - 1)(2x - y + 3) &= 4x^2 - 2xy + 4x + y - 3\end{aligned}$$

Desarrolla de la forma que más se te facilite:

a) $(2y + 1)(2xy - 3x + 1)$
$= 4xy^2 - 4xy - 3x + 2y + 1$

b) $(2xy - 3)(5x + 3y + 4)$
$= 10x^2y + 6xy^2 + 8xy - 15x - 9y - 12$

c) $(2x - 3)(x - y - 4)$
$= 2x^2 - 2xy - 11x + 3y + 12$

Indicador de logro

1.4 Determina el desarrollo del producto de un binomio por trinomio.

Secuencia

En las clases anteriores se han trabajado los algoritmos para desarrollar productos, hasta el caso donde los factores poseen dos términos, es por esta razón que para esta clase se estudia el caso cuando uno de los factores posee tres términos. Se debe hacer notar que todos los algoritmos estudiados hasta el momento implican multiplicar los términos del primer polinomio por cada término del segundo.

Propósito

Ⓟ Resolver una variante de la multiplicación de polinomios, cuando uno de sus factores posee tres términos.

Ⓢ Resolver de dos formas distintas el producto de un binomio con un trinomio. La primera es la que permite establecer el algoritmo para desarrollar el producto de un binomio con un trinomio y la segunda es una alternativa de solución, pero es igualmente importante que el alumno la domine. Notar que al hacer un cambio de variable, el producto se transforma en otro ya conocido; en ejercicios posteriores, el estudiante podrá utilizar la forma con la que se sienta más cómodo. La variante presentada en Ⓔ involucra signos negativos en algunos de los términos. Se debe indicar que puede resolverse multiplicando los polinomios o utilizando cambio de variable.

Posibles dificultades:
Es muy común que los estudiantes realicen lo siguiente, $2x(2x) = 4x$, este error puede darse también en clases anteriores.

Recordar que $2x(2x)$ representa el área de un cuadrado de lado $2x$. Por tanto, su área se expresa como $4x^2$, cuando $x > 0$.

Fecha:

U1 1.4

Ⓟ Desarrolla el producto:
$(x + 2)(xy + y + 1)$

Ⓢ 1. $(x + 2)(xy + y + 1)$
$= x(xy) + x(y) + x(1) + 2(xy) + 2(y) + 2(1)$
$= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2$
$= x^2y + 3xy + x + 2y + 2$

2. $(x + 2)(xy + y + 1)$
$= (x + 2)w$ Tomando $xy + y + 1 = w$
$= x(xy + y + 1) + 2(xy + y + 1)$
$= x^2y + xy + x + 2xy + 2y + 2$
$= x^2y + 3xy + x + 2y + 2$

Ⓔ Desarrolla el producto:
$(2x - 1)(2x - y + 3)$
$= (2x + (-1))(2x + (-y) + 3)$
$= 2x(2x) + 2x(-y) + 2x(3) + (-1)(2x) + (-1)(-y) + (-1)(3)$
$= 4x^2 - 2xy + 6x - 2x + y - 3$

Ⓡ a) $4xy^2 - 4xy - 3x + 2y + 1$
b) $10x^2y + 6xy^2 + 8xy - 15x - 9y - 12$
c) $2x^2 - 2xy - 11x + 3y + 12$

Tarea: página 5 del Cuaderno de Ejercicios.

1.5 Trinomio por trinomio

P

Desarrolla el producto: $(x - y + 1)(x + y + 3)$.

¿Deben multiplicarse cada uno de los términos del primer trinomio por cada término del segundo?

S

Como en clases anteriores, cada término del primer trinomio debe multiplicarse por los términos del segundo (teniendo en cuenta la ley de los signos) y se reducen los términos semejantes (si los hay):

$$\begin{aligned}(x - y + 1)(x + y + 3) &= x(x) + x(y) + x(3) + (-y)(x) + (-y)(y) + (-y)(3) + 1(x) + 1(y) + 1(3)\\ &= x^2 + yx + 3x - yx - y^2 - 3y + x + y + 3\\ &= x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - y + 1)(x + y + 3) = x^2 + 4x - y^2 - 2y + 3$.

C

En el producto de un trinomio por un trinomio, se multiplica cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo (teniendo en cuenta la ley de los signos) y se reducen los términos semejantes.

E

Desarrolla el producto: $(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3)$.

Como en el Problema inicial, se debe multiplicar cada término del primer trinomio por cada uno de los términos del segundo:

$$\begin{aligned}(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3) &= 3x(2x) + 3x(5y) + 3x(-3) + (-2y)(2x) + (-2y)(5y) + (-2y)(-3) + 3(2x) + 3(5y) + 3(-3)\\ &= 6x^2 + 15xy - 9x - 4xy - 10y^2 + 6y + 6x + 15y - 9\\ &= 6x^2 + 15xy - 4xy - 9x + 6x - 10y^2 + 6y + 15y - 9\\ &= 6x^2 + 11xy - 3x - 10y^2 + 21y - 9\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3) = 6x^2 + 11xy - 3x - 10y^2 + 21y - 9$.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + y + 1)(x + y + 3)$
$= x^2 + 2xy + 4x + 4y + y^2 + 3$

b) $(x + y - 1)(x + y + 3)$
$= x^2 + 2xy + 2x + 2y + y^2 - 3$

c) $(x - y - 1)(x + y + 3)$
$= x^2 + 2x - 4y - y^2 - 3$

d) $(x + y + 1)(x - y + 3)$
$= x^2 + 4x + 2y - y^2 + 3$

e) $(x + 3y + 4)(5x - 2y - 3)$
$= 5x^2 + 13xy + 17x - 17y - 6y^2 - 12$

f) $(4x - 3y + 2)(2x - 6y - 3)$
$= 8x^2 - 30xy - 8x - 3y + 18y^2 - 6$

6

Indicador de logro

1.5 Desarrolla el producto de un trinomio por un trinomio.

Secuencia

En las clases anteriores se realizaron productos de polinomios, donde el proceso para efectuar este desarrollo del producto resulta ser similar en todos los casos. También aprendieron a utilizar el cambio de variable para realizar el producto de polinomios, esta técnica es útil cuando no se conoce el proceso para desarrollar el producto, ya que la multiplicación se reduce al realizar otra de la que sí se conoce el algoritmo de su desarrollo.

Propósito

Ⓟ Resolver una situación desconocida de la multiplicación de polinomios cuando los dos factores son trinomios. A partir de lo aprendido en clases anteriores se debe de intuir que el producto se puede realizar multiplicando cada uno de los términos del primer trinomio por cada término del segundo. Aquí se omite el uso de cambio de variable.
Ⓒ Formalizar el proceso para multiplicar un trinomio con otro trinomio a partir de las conclusiones obtenidas en el Problema inicial.

Posibles dificultades:
Al sumar términos semejantes; por ejemplo, expresar la respuesta final ignorando el hecho de que xy puede sumarse con yx.

Fecha: U1 1.5

Ⓟ Desarrolla el producto:
$(x - y + 1)(x + y + 3)$

Ⓢ $(x - y + 1)(x + y + 3)$
$= x(x) + x(y) + x(3) + (-y)(x) + (-y)(y) + (-y)(3) + 1(x) + 1(y) + 1(3)$
$= x^2 + yx + 3x - yx - y^2 - 3y + x + y + 3$
$= x^2 + 4x - y^2 + y + 3$

Por lo tanto,
$(x - y + 1)(x + y + 3) = x^2 + 4x - y^2 + y + 3.$

Ⓔ Desarrolla el producto:
$(3x - 2y + 3)(2x + 5y - 3)$
$= 3x(2x) + 3x(5y) + 3x(-3) + (-2y)(2x) + (-2y)(5y) + (-2y)(-3) + 3(2x) + 3(5y) + 3(-3)$
$= 6x^2 + 15xy - 9x - 4xy - 10y^2 + 6y + 6x + 15y - 9$
$= 6x^2 + 11xy - 3x - 10y^2 + 21y - 9$

Ⓡ a) $x^2 + 2xy + 4x + 4y + y^2 + 3$
b) $x^2 + 2xy + 2x + 2y + y^2 - 3$
c) $x^2 + 2x - y^2 - 4y - 3$
d) $x^2 + 4x + 2y - y^2 + 3$

Tarea: página 6 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 Practica lo aprendido

1. Dibuja el rectángulo formado por las siguientes expresiones algebraicas y encuentra el área que resulta al dividir las piezas.

a) $x(y + 3)$
$= xy + 3x$

b) $(x + 2)(y + 1)$
$= xy + x + 2y + 2$

2. Desarrolla los siguientes productos:

Monomio por binomio:

a) $(-x)(y - 5)$
$= -xy + 5x$

b) $(4x)(xy + y)$
$= 4x^2y + 4xy$

c) $(-xy)(x - y)$
$= -x^2y + xy^2$

d) $(-3xy + 2y)(-xy)$
$= 3x^2y^2 - 2xy^2$

Binomio por binomio:

a) $(y + 2)(2x + 1)$
$= 2xy + 4x + y + 2$

b) $(x + 1)(xy + y)$
$= x^2y + 2xy + y$

c) $(2x - 5)(y + 4)$
$= 2xy + 8x - 5y - 20$

d) $(xy + 3)(x - y)$
$= x^2y - xy^2 + 3x - 3y$

Binomio por trinomio:

a) $(x + 3)(3xy + 2x + 4y)$
$= 3x^2y + 2x^2 + 13xy + 6x + 12y$

b) $(y - 2)(3xy + 5x + y)$
$= 3xy^2 - xy + y^2 - 10x - 2y$

c) $(xy - 1)(-10xy + 3x + 2y)$
$= -10x^2y^2 + 3x^2y + 2xy^2 + 10xy - 3x - 2y$

d) $(2x - 3y)(-xy + 4x - 5y)$
$= -2x^2y + 3xy^2 + 8x^2 - 22xy + 15y^2$

Trinomio por trinomio:

a) $(x + y + 1)(x - y + 2)$
$= x^2 - y^2 + 3x + y + 2$

b) $(2x + 5y - 3)(-xy + 3x + 3)$
$= -2x^2y - 5xy^2 + 6x^2 + 18xy - 3x + 15y - 9$

c) $(-xy + x - 1)(2xy + 2x + 1)$
$= -2x^2y^2 - 3xy + 2x^2 - 2x - 1$

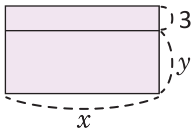
d) $(2xy + 3y - 6)(5xy + 2y + 10)$
$= 10x^2y^2 + 19xy^2 - 10xy + 6y^2 + 18y - 60$

Indicador de logro

1.6 Resuelve problemas utilizando la multiplicación de polinomios.

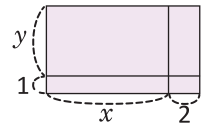
Solución de algunos ítems:

1. a)



Área:
$xy + 3x$

b)



Área:
$xy + x + 2y + 2$

2. Monomio por binomio.

c) $(-xy)(x-y) = (-xy)[x+(-y)]$
$= (-xy)x + (-xy)(-y)$
$= -x^2y + xy^2$

Binomio por binomio.

d) $(xy+3)(x-y)$
$= (xy+3)[x+(-y)]$
$= (xy)x + (xy)(-y) + 3x + 3(-y)$
$= x^2y - xy^2 + 3x - 3y$

Binomio por trinomio.

b) $(y-2)(3xy+5x+y)$
$= y(3xy) + y(5x) + y(y) + (-2)(3xy) + (-2)(5x) + (-2)(y)$
$= 3xy^2 + 5xy + y^2 - 6xy - 10x - 2y$
$= 3xy^2 - xy + y^2 - 10x - 2y$

Trinomio por trinomio.

c) $(-xy+x-1)(2xy+2x+1)$
$= (-xy)(2xy) + (-xy)(2x) + (-xy)(1) + x(2xy) + x(2x) + x(1) + (-1)(2xy) + (-1)(2x) + (-1)(1)$
$= -2x^2y^2 - 2x^2y - xy + 2x^2y + 2x^2 + x - 2xy - 2x - 1$
$= -2x^2y^2 - 3xy + 2x^2 - 2x - 1$

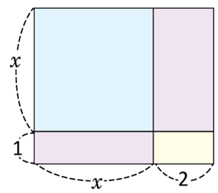
Tarea: página 7 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2 Productos notables

2.1 Productos de la forma $(x + a)(x + b)$

P

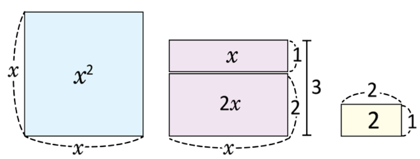
Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo formado por las siguientes piezas.



S

Primera forma: La altura del rectángulo es $x + 1$ y su base es $x + 2$. Entonces, el área buscada es el producto: $(x + 1)\ (x + 2)$.

Segunda forma: Dividiendo el rectángulo en piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:
$x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$.
Por tanto, el área del rectángulo también es: $x^2 + 3x + 2$.

En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo.

Por tanto: $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$.

Realizando el producto: Se tiene en cuenta que los términos x y $2x$ son semejantes, por tanto se suman sus coeficientes y se conserva la parte literal x:

$$\begin{aligned}(x + 1)(x + 2) &= x^2 + (1 + 2)x + 1(2)\\ &= x^2 + 3x + 2\end{aligned}$$

C

El producto de binomios de la forma $(x + a)(x + b)$ se desarrolla:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \overbrace{(a + b)}^{\text{Suma de } a \text{ y } b}x + \underbrace{ab}_{\text{Producto de } a \text{ y } b}$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(x + 3)(x + 2) &= x^2 + \overbrace{(3 + 2)}^{\text{Suma}}x + \overbrace{3(2)}^{\text{Producto}}\\ &= x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

E

Desarrolla: $(x + 2)(x - 3)$.

$$\begin{aligned}(x + 2)(x - 3) &= (x + 2)[x + (-3)]\\ &= x^2 + (2 - 3)x + 2(-3)\\ &= x^2 - x - 6\end{aligned}$$

$(x + 2)(x - 3) = (x + 2)[x + (-3)]$, donde $a = 2$ y $b = -3$.

Por lo tanto, $(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$.

Desarrolla:

a) $(x + 3)(x + 5)$
$= x^2 + 8x + 15$

b) $(x + 4)(x - 5)$
$= x^2 - x - 20$

c) $(x - 5)(x + 2)$
$= x^2 - 3x - 10$

d) $(y - 1)(y + 2)$
$= y^2 + y - 2$

e) $(y - 2)(y - 3)$
$= y^2 - 5y + 6$

f) $(y - \frac{1}{2})(y + \frac{3}{4})$
$= y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{3}{8}$

8

Indicador de logro

2.1 Determina productos de la forma $(x + a)(x + b)$.

Secuencia

En la lección anterior se realizaron productos de polinomios desde monomio por binomio hasta trinomio por trinomio, se debe notar que al desarrollar los productos, las potencias de las variables nunca son mayores que dos. En esta lección se trabajan productos de polinomios que poseen una característica especial, a este tipo de productos se les conoce como **productos notables**.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Obtener el desarrollo del producto $(x + a)(x + b)$. Es un caso especial del producto estudiado en la clase 1.2, donde $y = x$.

Ⓒ Establecer la identidad que permite desarrollar productos de la forma:

$(x + a)(x + b)$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.

Es importante que el estudiante memorice esta fórmula.

Solución de algunos ítems:

$$\left(y - \tfrac{1}{2}\right)\left(y + \tfrac{3}{4}\right)$$
$$\left[y + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right]\left(y + \tfrac{3}{4}\right)$$
$$= y^2 + \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\right)y + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right)$$
$$= y^2 + \tfrac{1}{4}y - \tfrac{3}{8}$$

Posibles dificultades:

Al plantear el desarrollo de productos de la forma $(x + a)(x + b)$ que involucren signos negativos.

Por ejemplo:

$(y - 3)(y - 2) = y^2 + [-3 + (-2)]y + (-3)(-2)$.

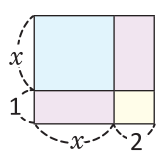
Este tipo de desarrollo es muy difícil de concebir para algunos estudiantes. Un método es escribir el proceso:

$(y - 3)(y - 2) = [y + (-3)][y + (-2)]$.

Fecha:

U1 2.1

Ⓟ Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo.



Ⓢ Forma 1. Calculando el área:

altura × base = $(x + 1)(x + 2)$

Forma 2. Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:

$x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$

Las dos formas describen la misma área.

Por tanto, $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$.

Ⓔ Desarrolla $(x + 2)(x - 3)$

$$= (x + 2)[x + (-3)]$$
$$= x^2 + (2 - 3)x + 2(-3)$$
$$= x^2 - x - 6$$

Por lo tanto,

$(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$

Ⓡ a) $x^2 + 8x + 15$

b) $x^2 + x - 20$

c) $x^2 - 3x - 10$

d) $y^2 + y - 2$

e) $y^2 - 5y + 6$

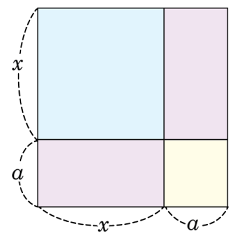
f) $y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{3}{8}$

Tarea: página 8 del Cuaderno de Ejercicios.

2.2 Cuadrado de un binomio, parte 1

P

Encuentra de dos formas diferentes el área del cuadrado formado por las siguientes piezas:

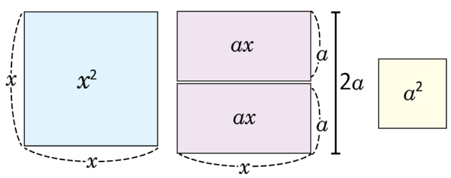


El área de un cuadrado de lado l es igual a l^2.

S

Primera forma: El lado del cuadrado formado por las cuatro piezas es $x + a$, por tanto su área será igual a $(x + a)^2$.

Segunda forma: Dividiendo el rectángulo en piezas y obteniendo sus áreas respectivas:



La suma de las áreas de cada pieza es:
$x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$.
Por tanto, el área del rectángulo también es:

$$x^2 + 2ax + a^2.$$

En las dos formas mostradas se encuentra el área del mismo rectángulo.
Por tanto: $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.

Realizando el producto:
El producto $(x + a)^2$ también puede desarrollarse algebraicamente, utilizando lo visto en la clase anterior:

$$\begin{aligned}(x + a)^2 &= (x + a)(x + a)\\ &= x^2 + (a + a)x + a(a)\\ (x + a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2\end{aligned}$$

C

El producto de la forma $(x + a)^2$ se desarrolla:

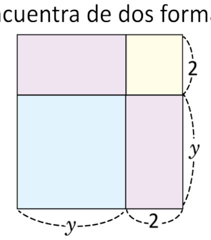
$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(x + 5)^2 &= x^2 + 2(5)x + 5^2\\ &= x^2 + 10x + 25^2\end{aligned}$$

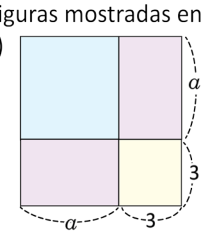
1. Encuentra de dos formas diferentes el área de las figuras mostradas en cada literal:

a)



$y^2 + 4y + 4$

b)



$a^2 + 6a + 9$

2. Desarrolla:

a) $(x + 1)^2$ $= x^2 + 2x + 1$

b) $(x + 3)^2$ $= x^2 + 6x + 9$

c) $(x + \frac{1}{2})^2$ $= x^2 + x + \frac{1}{4}$

d) $(x + \frac{1}{4})^2$ $= x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

Indicador de logro

2.2 Justifica geométricamente el desarrollo del cuadrado de una suma.

Secuencia

Al inicio de la segunda lección se estudió el producto notable de la forma:
$(x + a)(x + b)$, utilizando áreas se dedujo el desarrollo de este producto. Por tanto, es conveniente que para esta clase se analice el caso particular de estos productos, cuando los dos factores son iguales, es decir, $(x + a)(x + a)$.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ La fórmula de esta clase se puede obtener haciendo $b = a$ en la fórmula de la clase anterior. Para justificar y recordar la aparición del coeficiente 2 en el término $2ax$ se utiliza la gráfica.
Ⓒ Establecer formalmente el desarrollo del producto notable $(x + a)^2$:
$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$. En esta clase se estudia únicamente el caso para el cuadrado de una suma, el cuadrado de una resta se estudia hasta la siguiente. Además de la idea intuitiva, hay que memorizar esta fórmula.

Solución de algunos ítems:

1. a) Forma 1
Calculando el área:
altura × base = $(y + 2)(y + 2)$
Forma 2
Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:
$y^2 + 2y + 2y + 2^2 = y^2 + 4y + 4$

Las dos formas describen la misma área. Por tanto, $(y + 2)^2 = y^2 + 4y + 4$.

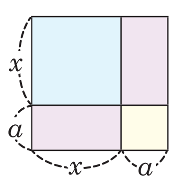
2. a)
$(x + 1)^2 = x^2 + 2(1)x + 1$
$= x^2 + 2x + 1$

Posibles dificultades:
Comprender que el segundo término de la expansión del binomio es una multiplicación. Por ejemplo, en la expansión: $(x + 3)^2 = x^2 + 2(3)x + 3^2$, los estudiantes pueden dudar sobre el tipo de operación que se debe realizar con todos los términos involucrados.

Indicar que los tres términos se están multiplicando y el producto con x solo se indica dado que es una variable y no se puede conocer el resultado del producto

Fecha: **U1 2.2**

Ⓟ Encuentra de dos formas diferentes el área del rectángulo.



Ⓢ Forma 1. Calculando el área: $(x + a)^2$

Forma 2. Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:
$x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$

Las dos formas describen la misma área. Por tanto, $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$.

Ⓡ 1. a) $(y + 2)^2 = y^2 + 4y + 4$
b) $(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9$

2. a) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
b) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$
c) $(x + \frac{1}{2})^2 = x^2 + 2(\frac{1}{2})x + (\frac{1}{2})^2$
$= x^2 + x + \frac{1}{4}$
d) $(x + \frac{1}{4})^2 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

Tarea: página 9 del Cuaderno de Ejercicios.

2.3 Cuadrado de un binomio, parte 2

P

Desarrolla el producto: $(x - a)^2$.

$(x - a)^2 = [x + (-a)]^2$

S

Se escribe $(x - a)^2$ como $[x + (-a)]^2$ y se utiliza lo visto en la clase anterior:

$$\begin{aligned}(x - a)^2 &= [x + (-a)]^2\\ &= x^2 + 2(-a)x + (-a)^2\\ &= x^2 - 2ax + a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(- a)^2 &= (-a)(-a)\\ &= a^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$.

C

El producto de la forma $(x - a)^2$ se desarrolla:

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

En general, a los productos $(x + a)^2$ y $(x - a)^2$ se les llama cuadrado de un binomio:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \text{...............(1)}$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \text{...............(2)}$$

E

Desarrolla:

$(x - 2)^2$

Utilizando el caso (2) del cuadrado de un binomio:

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 &= x^2 - 2(2)x + 2^2\\ &= x^2 - 4x + 4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$.

Desarrolla:

a) $(x - 1)^2$
$= x^2 - 2x + 1$

b) $(x - 3)^2$
$= x^2 - 6x + 9$

c) $(x - 4)^2$
$= x^2 - 8x + 16$

d) $(x - \frac{1}{2})^2$
$= x^2 - x + \frac{1}{4}$

e) $(x - \frac{1}{4})^2$
$= x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$

f) $(x - \frac{1}{3})^2$
$= x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

Indicador de logro

2.3 Determina el desarrollo del cuadrado de una resta.

Secuencia

En la clase anterior se trabajó el desarrollo del cuadrado de un binomio cuando la expresión es una suma, para esta clase se estudia particularmente el caso cuando la expresión es una resta.

Se prescinde del uso de modelos de áreas para obtener este producto notable ya que la manipulación de áreas negativas no es muy razonable y crea confusión en el estudiante; sin embargo, se utiliza un procedimiento algebraico más simple y comprensible.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Deducir el desarrollo del producto notable de la forma $(x - a)^2$, utilizando la forma $(x + a)^2$.
Ⓒ Comparar con el desarrollo del cuadrado de una suma, visto en la clase anterior; para recordar los signos, hay que memorizar esta fórmula, aclarando que el acto de memorizar la fórmula se logrará con la práctica de los ejercicios.

Solución de algunos ítems:

$$\begin{aligned}\left(x - \tfrac{1}{3}\right)^2 &= x^2 - 2\left(\tfrac{1}{3}\right)x + \left(\tfrac{1}{3}\right)^2\\ &= x^2 - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{9}\end{aligned}$$

Fecha: **U1 2.3**

Ⓟ Desarrolla el producto:
$(x - a)^2$

Ⓢ $$\begin{aligned}(x - a)^2 &= [x + (-a)]^2\\ &= x^2 + 2(-a)x + (-a)^2\\ &= x^2 - 2ax + a^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$.

Ⓔ Desarrolla:
$(x - 2)^2$

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 &= x^2 - 2(2)x + 2^2\\ &= x^2 - 4x + 4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$.

Ⓡ a) $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$
b) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$
d) $(x - \frac{1}{2})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$

Tarea: página 10 del Cuaderno de Ejercicios.

2.4 Suma por la diferencia de binomios

P

Desarrolla el producto: $(x + a)(x - a)$.

S

Se escribe $(x - a)$ como $[x + (-a)]$ y luego se desarrolla:

$$\begin{aligned}(x + a)(x - a) &= (x + a)[x + (-a)]\\ &= x^2 + (a - a)x + a(-a)\\ &= x^2 + (0)x - a^2\\ &= x^2 - a^2\end{aligned}$$

En la solución:
$(x + a)[x + (-a)] \neq (x + a)^2$
Es decir, este producto se desarrolla de forma diferente al cuadrado de un binomio.

Por lo tanto, $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$.

C

El producto de la forma $(x + a)(x - a)$ se llama **producto de la suma por la diferencia de binomios** o simplemente como **suma por la diferencia de binomios**, y se desarrolla:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

A todos los productos vistos en las clases anteriores (y en esta) se les llama **productos notables**, ya que sus resultados tienen formas fáciles de identificar y pueden escribirse de manera directa:

Producto notable	Desarrollo
Producto de la forma: $(x + a)(x + b)$	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
Cuadrado de un binomio	$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ .....(1)
	$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ .....(2)
Suma por la diferencia de binomios	$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

E

Desarrolla:

$$(x - 2)(x + 2)$$

Utilizando suma por diferencia de binomios:

$$\begin{aligned}(x - 2)(x + 2) &= x^2 - 2^2\\ &= x^2 - 4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$.

1. Desarrolla:
   a) $(x + 1)(x - 1)$ $= x^2 - 1$
   b) $(x + 3)(x - 3)$ $= x^2 - 9$
   c) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$ $= x^2 - \frac{1}{4}$
   d) $(x - \frac{1}{4})(x + \frac{1}{4})$ $= x^2 - \frac{1}{16}$

2. Desarrolla los siguientes productos:
   a) $(y - 8)(y - 10)$ $= y^2 - 18y + 80$
   b) $(x + 11)^2$ $= x^2 + 22x + 121$
   c) $(y - 9)^2$ $= y^2 - 18y + 81$
   d) $(y + \frac{4}{3})(y - \frac{4}{3})$ $= y^2 - \frac{16}{9}$

Indicador de logro

2.4 Desarrolla la suma por la diferencia de binomios.

Secuencia

Desde la clase 1 de esta lección se han estudiado productos notables donde ambos factores son un binomio, estudiando el caso particular cuando ambos binomios son el mismo. Esta clase es una extensión de ese estudio para el caso particular $(x + a)(x - a)$.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar la fórmula:
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ para desarrollar el producto $(x + a)(x - a)$ obteniendo una expresión que permita desarrollar este tipo de productos.
Ⓒ Formalizar el desarrollo del producto de la suma por la diferencia de binomios, $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$. Realizar un recordatorio de todos los productos notables y su desarrollo, estudiados hasta esta clase. Al igual que en las anteriores hay que memorizar esta fórmula.

Solución de algunos ítems:

1. d) $\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right) = x^2 - \frac{1}{16}$

2. b) $(x + 11)^2 = x^2 + 22x + 121$

Fecha: **U1 2.4**

Ⓟ Desarrolla el producto:
$(x + a)(x - a)$

Se escribe $(x - a)$ como $[x + (-a)]$:

Ⓢ
$$\begin{aligned}(x + a)(x - a) &= (x + a)[x + (-a)]\\ &= x^2 + (a - a)x + a(-a)\\ &= x^2 + (0)x - a^2\\ &= x^2 - a^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$.

Ⓔ Desarrolla: $(x - 2)(x + 2)$

$$\begin{aligned}(x - 2)(x + 2) &= x^2 - 2^2\\ &= x^2 - 4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$.

Ⓡ
1. a) $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$
   d) $(x - \frac{1}{4})(x + \frac{1}{4}) = x^2 - \frac{1}{16}$
2. a) $y^2 - 18y + 80$
   b) $x^2 + 22x + 121$

Tarea: página 11 del Cuaderno de Ejercicios.

2.5 Desarrollo de productos notables utilizando sustitución

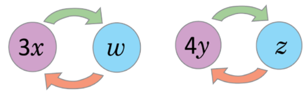
P

Desarrolla el producto: $(3x + 4y)^2$.

¿Puede realizarse el producto de forma similar a $(x + a)^2$?

S

Se toman $3x = w$, $4y = z$ y se desarrolla el producto como el cuadrado de un binomio:



$$\begin{aligned}(3x + 4y)^2 &= (w + z)^2 && \text{Tomando } 3x = w \text{ y } 4y = z,\\ &= w^2 + 2wz + z^2 \\ &= (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2 && \text{sustituyendo nuevamente } w \text{ por } 3x \text{ y } z \text{ por } 4y.\end{aligned}$$

Por tanto, $(3x + 4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$.

C

Para desarrollar productos notables que involucran términos con variables, puede realizarse una sustitución adecuada que transforme la expresión en un producto notable ya conocido; los siguientes ejercicios ilustran mejor esta idea.

E

Desarrolla, aplicando productos notables:

$$(2x + 1)(2x + 3)$$

Ambos binomios tienen el término $2x$. Se toma $2x = w$ y se desarrolla el producto de la misma forma que lo visto en la clase 1:

$$\begin{aligned}(2x + 1)(2x + 3) &= (w + 1)(w + 3) && \text{Tomando } 2x = w,\\ &= w^2 + (1 + 3)w + 1(3) \\ &= w^2 + 4w + 3 \\ &= (2x)^2 + 4(2x) + 3 && \text{sustituyendo nuevamente } w = 2x.\end{aligned}$$

Por tanto, $(2x + 1)(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 3$.

Desarrolla:

a) $(5x - 3y)^2$
$= 25x^2 - 30xy + 9y^2$

b) $(3x - 2)(3x - 3)$
$= 9x^2 - 15x + 6$

c) $(2x + 3y)(2x - 3y)$
$= 4x^2 - 9y^2$

d) $(3y - \frac{1}{2})^2$
$= 9y^2 - 3y + \frac{1}{4}$

e) $(\frac{x}{3} - 2)(\frac{x}{3} - 3)$
$= \frac{x^2}{9} - \frac{5x}{3} + 6$

f) $(3y + \frac{1}{5})(3y - \frac{1}{5})$
$= 9y^2 - \frac{1}{25}$

12

Indicador de logro

2.5 Multiplica polinomios utilizando un cambio de variable.

Secuencia

Hasta la clase 2.4 se desarrollaron algunos productos notables para los casos donde los factores que intervienen en el producto son binomios, además, en la lección 1 se utilizó el cambio de variable para simplificar productos a otros más sencillos, en esta clase se utiliza el cambio o sustitución de variables para desarrollar productos notables que involucren expresiones un poco más complejas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Enfrentarse a una situación variante del cuadrado de un binomio, donde ambos términos son variables. En la solución del libro se utiliza el método de cambio de variable, un estudiante bien podría obtener la solución directamente, sin embargo, es indispensable que se desarrolle también la solución planteada en el LT, dado que es el objetivo inmediato de la clase.

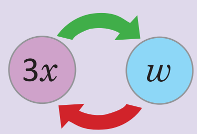
Ⓒ Cuando el estudiante esté acostumbrado, se espera que haga el cambio de variable mentalmente.

Ⓔ Resolver un producto notable de la forma $(x + a)(x + b)$ utilizando la sustitución de variables.

Posibles dificultades:

Al realizar un cambio de variable y desarrollar el producto no se debe olvidar volver a la variable original, este puede ser un paso que genere dificultad para algunos estudiantes.

En la imagen, la flecha verde indica el primer cambio y la flecha roja indica volver a la variable original.



Fecha: **U1 2.5**

Ⓟ Desarrolla el producto:
$(3x + 4y)^2$

Ⓢ $(3x + 4y)^2$
$= (w + z)^2$ Tomando $3x = w$ y $4y = z$
$= w^2 + 2wz + z^2$
$= (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$
Sustituir nuevamente w por $3x$ y z por $4y$
$= 9x^2 + 24xy + 16y^2$

Por tanto,
$(3x + 4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$.

Ⓔ Desarrolla $(2x + 1)(2x + 3)$:
$(2x + 1)(2x + 3)$
$= (w + 1)(w + 3)$ Tomando $2x = w$
$= w^2 + (1 + 3)w + 1(3)$
$= w^2 + 4w + 3$
$= (2x)^2 + 4(2x) + 3$ Sustituyendo $w = 2x$

Por tanto,
$(2x + 1)(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 3$

Ⓡ a) $25x^2 - 30xy + 9y^2$

b) $9x^2 - 15x + 6$

Tarea: página 12 del Cuaderno de Ejercicios.

2.6 Combinación de productos notables

P

Desarrolla:

a) $(x + y + 1)(x + y - 1)$

b) $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5)$

¿Qué productos notables están involucrados en ambos literales? Por ejemplo, los trinomios del primer literal tienen en común la suma $x + y$.

S

a) Ambos trinomios tienen en común la suma $x + y$, y el número 1 es positivo en el primero y negativo en el segundo. Se toma $x + y = w$ y el producto se desarrolla como una suma por diferencia de binomios:

$$\begin{aligned}(x + y + 1)(x + y - 1) &= (w + 1)(w - 1) && \text{Tomando } x + y = w,\\ &= w^2 - 1^2\\ &= (x + y)^2 - 1 && \text{sustituyendo nuevamente,}\\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x + y + 1)(x + y - 1) = x^2 + 2xy + y^2 - 1$.

b) Los productos involucrados son cuadrados de un binomio y productos de la forma $(x + a)(x + b)$. Después de desarrollar ambos, se reducen los términos semejantes:

$$\begin{aligned}(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5) &= (2x)^2 - 2(2x)(1) + 1^2 + x^2 + (2 + 5)x + 2(5)\\ &= 4x^2 - 4x + 1 + x^2 + 7x + 10\\ &= 5x^2 + 3x + 11\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5) = 5x^2 + 3x + 11$.

C

Cuando se desarrollan combinaciones de productos notables:

1. Identificar cuáles son los productos notables involucrados en la expresión.
2. Desarrollar los productos teniendo en cuenta las leyes de los signos.
3. Reducir los términos semejantes, si los hay.

Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x - y + 1)(x - y - 1)$
$= x^2 - 2xy + y^2 - 1$

b) $(xy + x + 2)(xy + x - 2)$
$= x^2y^2 + 2x^2y + x^2 - 4$

c) $(x + 3)^2 - (5x + 1)(5x + 2)$
$= -24x^2 - 9x + 7$

d) $(y + 1)(y - 1) - (3y + 2)^2$
$= -8y^2 - 12y - 5$

e) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$
$= x^4 - 1$

f) $(y + 2)(y - 2) + (x^2 + 3)(x^2 - 3)$
$= x^4 + y^2 - 13$

Indicador de logro

2.6 Multiplica polinomios utilizando combinación de productos notables.

Secuencia

Para esta clase se utilizan los productos notables estudiados a lo largo de la lección para desarrollar problemas que involucren más de un producto notable.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver ejercicios donde se combinen las operaciones con productos notables, desarrollando más de un producto notable en cada problema; es posible también utilizar la sustitución para simplificar el ejercicio. En a) es un producto de trinomios, se debe utilizar la sustitución de variables para aplicar productos notables.
Ⓒ Observar que hay casos donde para aplicar productos notables hay que agrupar los términos.

Solución de algunos ítems:

Solución del ítem a.

$(x - y + 1)(x - y - 1)$

Tomando $x - y = w$

$= (w + 1)(w - 1)$
$= w^2 - 1$
$= (x - y)^2 - 1$
$= x^2 - 2xy + y^2 - 1$

Fecha:

U1 2.6

Ⓟ Desarrolla:

a) $(x + y + 1)(x + y - 1)$
b) $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5)$

Ⓢ a) $(x + y + 1)(x + y - 1)$
$= (w + 1)(w - 1) \qquad x + y = w$
$= w^2 - 1^2$
$= (x + y)^2 - 1$
$= x^2 + 2xy + y^2 - 1$

Por lo tanto,
$(x + y + 1)(x + y - 1) = x^2 + 2xy + y^2 - 1.$

b) $(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5)$
$= (2x)^2 - 2(2x)(1) + 1^2 + x^2 + (2 + 5)x + 2(5)$
$= 4x^2 - 4x + 1 + x^2 + 7x + 10$
$= 5x^2 + 3x + 11$

Por lo tanto,
$(2x - 1)^2 + (x + 2)(x + 5) = 5x^2 + 3x + 11.$

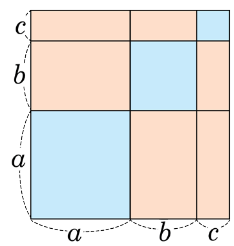
Ⓡ a) $x^2 - 2xy + y^2 - 1$
b) $x^2y^2 + 2x^2y + x^2 - 4$
c) $-24x^2 - 9x + 7$
d) $-8y^2 - 12y - 5$

Tarea: página 13 del Cuaderno de Ejercicios.

2.7 Cuadrado de un trinomio

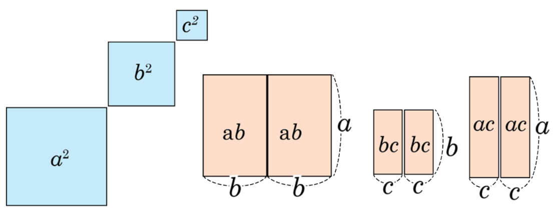
P

Encuentra de dos formas diferentes el área del cuadrado formado por las siguientes piezas:



S

Primera forma: Como se trata de un cuadrado de lado $a + b + c$ su área se expresa como $(a + b + c)^2$.
Segunda forma: Se divide el cuadrado en piezas iguales y se tienen sus áreas respectivas:



Como se muestra en la imagen, la suma de las áreas de cada pieza es:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

Realizando el producto: Se toma $b + c = w$ y se desarrolla como el cuadrado de un binomio:

$$
\begin{aligned}
(a + b + c)^2 &= (a + w)^2 \\
&= a^2 + 2aw + w^2 \\
&= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 \\
&= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + (2ab + 2ac + 2bc) \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc
\end{aligned}
$$

Tomando $b + c = w$,
sustituyendo nuevamente $w = b + c$.

Por tanto: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

Al desarrollar este producto es común colocar su desarrollo en este orden:

a
b c

C

El producto de la forma $(a + b + c)^2$ se llama **cuadrado de un trinomio** y se desarrolla:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

E

Desarrolla: $(5x - 3y + 4)^2$.

El trinomio $5x - 3y + 4$ puede escribirse como $5x + (-3y) + 4$. Luego, el cuadrado se desarrolla de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
(5x - 3y + 4)^2 &= (5x + (-3y) + 4)^2 \\
&= (5x)^2 + (-3y)^2 + (4)^2 + 2(5x)(-3y) + 2(-3y)4 + 2(4)(5x) \\
&= 25x^2 + 9y^2 + 16 - 30xy - 24y + 40x \\
&= 25x^2 + 9y^2 - 30xy + 40x - 24y + 16
\end{aligned}
$$

Desarrolla:

a) $(x + y + 1)^2 = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y$

b) $(2x + y + 3)^2 = 4x^2 + y^2 + 9 + 4xy + 6y + 12x$

c) $(3x - 2y + 5)^2$
$= 9x^2 + 4x^2 + 25 - 12xy - 20y + 30x$

d) $(x - 5y - 1)^2$
$= x^2 + 25y^2 + 1 - 10xy + 10y - 2x$

Indicador de logro

2.7 Desarrolla el cuadrado de un trinomio.

Secuencia

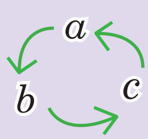
En clases anteriores se han estudiado los productos notables, cuando los factores que intervienen son binomios, para esta clase se estudia el caso donde ambos factores son el mismo trinomio.

Propósito

ⓅEncontrar el área de un cuadrado donde la medida de su lado se expresa como $a + b + c$.
Ⓢ Se presentan dos formas para encontrar el desarrollo de un trinomio cuadrado, uso de áreas y cambio de variable. La gráfica ayudará a comprender cuáles son los términos resultantes.

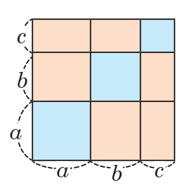
Ⓒ Prestar atención en la forma de los productos y sus coeficientes para poder memorizarla.
Ⓔ Observar que la resta siempre se convierte en una suma.

El gráfico representa el orden en el que se colocan los términos en el desarrollo del trinomio y en los productos dos a dos de cada término.



Fecha: **U1 2.7**

Ⓟ Encuentra de dos formas diferentes el área del cuadrado.



Ⓢ

Forma 1.
Calculando el área:
altura × base = $(a + b + c)^2$

Forma 2.
Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:
$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

Por tanto,
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

Realizando el producto:

$(a + b + c)^2$
$= (a + w)^2$
$= a^2 + 2aw + w^2$
$= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2$
$= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 + (2ab + 2ac + 2bc)$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Ⓔ $(5x - 3y + 4)^2$
$= (5x + (-3y) + 4)^2$
$= (5x)^2 + (-3y)^2 + (4)^2 + 2(5x)(-3y) + 2(-3y)4 + 2(4)(5x)$
$= 25x^2 + 9y^2 + 16 - 30xy - 24y + 40x$

Tarea: página 14 del Cuaderno de Ejercicios.

2.8 Valor numérico y cálculo de operaciones

P

¿Cuál es el valor numérico de $(a + b)^2$ si $a^2 + b^2 = 6$ y $ab = 3$?

¿En cuál producto notable están involucradas las expresiones $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$, ab?

S

En el problema NO se pretende encontrar los valores de a y b, sino de $(a + b)^2$. Observa que $a^2 + b^2$ y ab corresponden al desarrollo del cuadrado de un binomio:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

En una suma, el orden de los sumandos no altera el total: $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Se sustituyen los valores en lo anterior:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a^2 + b^2) + 2ab\\ &= 6 + 2(3)\\ (a + b)^2 &= 12\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor numérico de $(a + b)^2$ es 12.

E

Calcula 98 × 102 usando productos notables.

Los números 98 y 102 pueden escribirse como 100 − 2 y 100 + 2, respectivamente:

$98 \times 102 = (100 - 2)(100 + 2)$

Lo anterior es una suma por diferencia de binomios:

En una multiplicación, el orden de los factores no altera el producto: $(100 - 2)(100 + 2) = (100 + 2)(100 - 2)$.

$$\begin{aligned}98 \times 102 &= 100^2 - 2^2\\ &= 10\,000 - 4\\ 98 \times 102 &= 9\,996\end{aligned}$$

1. Resuelve lo siguiente:

   a) ¿Cuál es el valor numérico de $(a - b)^2$ si $a^2 + b^2 = 34$ y $ab = 15$? $(a - b)^2 = 4$

   b) ¿Cuál es el valor numérico de $a + b$ si $a - b = 2$ y $a^2 - b^2 = 16$? $a + b = 8$

2. Calcula el resultado de las siguientes operaciones usando productos notables:

   a) 97 × 103 = 9 991

   b) 95 × 105 = 9 975

   c) 102^2 = 10 404

   d) 105^2 = 11 025

Indicador de logro

2.8 Calcula el valor numérico de expresiones algebraicas y de operaciones aritméticas utilizando productos notables.

Secuencia

Hasta la clase anterior se han estudiado todos los productos notables necesarios para un estudiante de noveno grado; posteriormente en bachillerato se ampliarán utilizando el binomio de Newton para desarrollar productos de binomios con exponente mayor a 2. Para esta clase es necesario analizar qué producto notable se debe utilizar para resolver un problema particular.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Se trata de expresar $(a+b)^2$ utilizando los términos, a^2+b^2 y ab que aparecen en su desarrollo.
Ⓒ Identificar que se pueden utilizar productos notables, no solo en la resolución de problemas algebraicos sino también para simplificar cálculos aritméticos.

Solución de algunos ítems:

1. b) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
$16 = (a+b)(2)$
$8 = a+b$

2. a) 97×103
$97 \times 103 = (100-3)(100+3)$
$= 100^2 - 3^2$
$= 10\,000 - 9$
$= 9\,991$

d) $(105)^2$
$(100+5)^2 = (100)^2 + 2(100)(5) + (5)^2$
$= 10\,000 + 1\,000 + 25$
$= 11\,025$

Fecha: **U1 2.8**

Ⓟ ¿Cuál es el valor numérico de $(a+b)^2$ si $a^2+b^2 = 6$ y $ab = 3$?

Ⓢ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^2 = (a^2+b^2) + 2ab$
$= 6 + 2(3)$
$(a+b)^2 = 12$

Por lo tanto, el valor numérico de $(a+b)^2$ es 12.

Ⓔ Calcula 98×102
$98 \times 102 = (100-2)(100+2)$
$98 \times 102 = 100^2 - 2^2$
$= 10\,000 - 4$
$98 \times 102 = 9\,996$

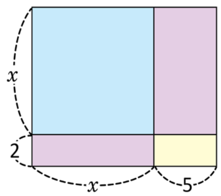
Ⓡ 2. a) 9 991
b) 9 975
c) 10 404
d) 11 025

Tarea: página 15 del Cuaderno de Ejercicios.

2.9 Practica lo aprendido

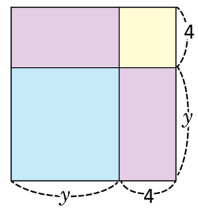
1. Encuentra de dos formas diferentes el área de las siguientes figuras:

a)



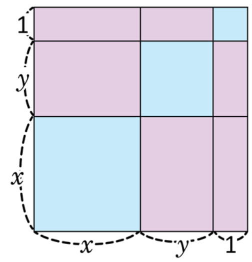
$(x + 5)(x + 2)$ y $x^2 + 2x + 5x + 10$

b)



$(y + 4)^2$ y $y^2 + 4y + 4y + 16$

c)



$(x + y + 1)^2$ y $x^2 + y^2 + 1 + xy + xy + x + x + y + y$

2. Desarrolla los siguientes productos de la forma $(x + a)(x + b)$:

a) $(x + 1)(x + 9)$
$= x^2 + 10x + 9$

b) $(x + 3)(x - 6)$
$= x^2 - 3x - 18$

c) $(x + \frac{1}{3})(x + \frac{3}{6})$
$= x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$

d) $(y - \frac{1}{2})(y - \frac{3}{2})$
$= y^2 - 2y + \frac{3}{4}$

e) $(y - 1)(y + 2)$
$= y^2 + y - 2$

f) $(x - 4)(x - 2)$
$= x^2 - 6x + 8$

3. Desarrolla los siguientes cuadrados de binomios:

a) $(x + 6)^2$
$= x^2 + 12x + 36$

b) $(y - 6)^2$
$= y^2 - 12y + 36$

c) $(x + \frac{1}{5})^2$
$= x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}$

d) $(y - \frac{1}{4})^2$
$= y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}$

e) $(x + 5)^2$
$= x^2 + 10x + 25$

f) $(y - 2)^2$
$= y^2 - 4y + 4$

g) $(x + 2)^2$
$= x^2 + 4x + 4$

h) $(y - \frac{1}{3})^2$
$= y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$

4. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(x + 7)(x - 7)$
$= x^2 - 49$

b) $(x + 10)(x - 10)$
$= x^2 - 100$

c) $(y + \frac{1}{5})(y - \frac{1}{5})$
$= y^2 - \frac{1}{25}$

d) $(y - \frac{2}{3})(y + \frac{2}{3})$
$= y^2 - \frac{4}{9}$

e) $(x + 4)(x - 4)$
$= x^2 - 16$

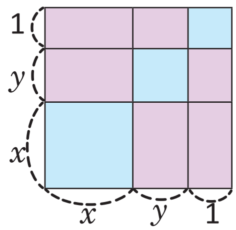
f) $(x + 9)(y - 9)$
$= xy - 9x + 9y - 81$

Indicador de logro

2.9 Resuelve problemas utilizando productos notables.

Solución de algunos ítems:

1\. c)



Forma 1:
altura × base = $(x + y + 1)^2$
Forma 2:
Dividiendo en piezas y calculando el área de cada pieza:

$$x^2 + y^2 + 1^2 + 2xy + 2x + 2y$$

Por tanto,
$(x + y + 1)^2 = x^2 + y^2 + 1^2 + 2xy + 2x + 2y$

2\. d) $\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right)$

$= \left[y + \left(-\frac{1}{2}\right)\right]\left[y + \left(-\frac{3}{2}\right)\right]$

$= y^2 + \left[\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)\right]y + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$

$= y^2 + \left[-\frac{4}{2}\right]y + \frac{3}{4}$

$= y^2 - 2y + \frac{3}{4}$

3\. a) $(x + 6)^2$

$= x^2 + 2(6)x + 6^2$

$= x^2 + 12x + 36$

h) $\left(y - \frac{1}{3}\right)^2$

$= y^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)y + \frac{1^2}{3^2}$

$= y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$

4\. c) $\left(y + \frac{1}{5}\right)\left(y - \frac{1}{5}\right)$

$= y^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2$

$= y^2 - \frac{1}{25}$

Tarea: página 16 del Cuaderno de Ejercicios.

2.10 Practica lo aprendido

1. Desarrolla los siguientes productos:

a) $(6x-10)(6x-2)$ $= 36x - 72x + 20$

b) $(\frac{x}{2}+2)(\frac{x}{2}+4)$ $= \frac{x^2}{4} + 3x + 8$

c) $(5x-6y)^2$ $= 25x^2 - 60xy + 36y^2$

d) $(6x+10y)^2$ $= 36x^2 + 120xy + 100y^2$

e) $(2x-3)(2x-1)$ $= 4x^2 - 8x + 3$

f) $(5x-3y)^2$ $= 25x^2 - 30xy + 9y^2$

g) $(\frac{y}{3}-3)^2$ $= \frac{y^2}{9} - 2y + 9$

h) $(2x+\frac{1}{2})(2x-\frac{1}{2})$ $= 4x^2 - \frac{1}{4}$

2. Desarrolla:

a) $(2x+y+2)(2x+y-2)$
$= 4x^2 + 4xy + y^2 - 4$

b) $(x+y)(x-y)+(x+y)^2$
$= 2x^2 + 2xy$

c) $(2x-3)^2-(5y-1)(5y+2)$
$= 4x^2 - 25y^2 - 12x - 5y + 11$

d) $(y^2+1)(y^2-1)-(y^2+1)^2$
$= -2y^2 - 2$

e) $(5x+10y+3)^2$
$= 25x^2 + 100xy + 100y^2 + 30x + 60y + 9$

f) $(4x-2y-6)^2$
$= 16x^2 - 16xy + 4y^2 - 48x + 24y + 36$

3. Resuelve lo siguiente:

a) ¿Cuál es el valor numérico de $(a-b)^2$, si $a^2+b^2 = 104$ y $ab = 20$? $(a-b)^2 = 64$

b) ¿Cuál es el valor numérico de $a-b$, si $a+b = 8$ y $a^2-b^2 = 32$? $a - b = 4$

c) ¿Cuál es el valor numérico de xy, si $x+y = 6$ y $x^2+y^2 = 1$? $xy = \frac{35}{2}$

4. Calcula el resultado de las siguientes operaciones utilizando productos notables:

a) 101^2
$= (100+1)^2$
$= 100^2 + 200 + 1$
$= 10\,201$

b) 102×101
$= (100+2)(100+1)$
$= 10\,000 + 200 + 100 + 2$
$= 10\,302$

c) 49×51
$= (50-1)(50+1)$
$= 50^2 - 1^2$
$= 2\,499$

d) 99^2
$= (100-1)^2$
$= 100^2 - 200 + 1$
$= 9\,801$

Indicador de logro

2.10 Resuelve problemas utilizando productos notables.

1. f) Sea $w = 5x$ y $z = 3y$.

$(5x - 3y)^2 = (w - z)^2$
$= w^2 - 2(w)(z) + z^2$
$= (5x)^2 - 2(5x)(3y) + (3y)^2$
$= 25x^2 - 30xy + 9y^2$

2. a) Sea $w = 2x + y$.

$(2x + y + 2)(2x + y - 2)$
$= (w + 2)(w - 2)$
$= w^2 - 2^2$
$= (2x + y)^2 - 4$
$= (2x)^2 + 2(2x)(y) + y^2 - 4$
$= 4x^2 + 4xy + y^2 - 4$

e) $(5x + 10y + 3)^2$

$= (5x)^2 + (10y)^2 + 3^2 + 2(5x)(10y) +$
$2(10y)(3) + 2(3)(5x)$
$= 25x^2 + 100y^2 + 9 + 100xy + 60y + 30x$
$= 25x^2 + 100xy + 100y^2 + 30x + 60y + 9$

3. c) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$
$6^2 = 1 + 2xy$
$36 - 1 = 2xy$
$35 = 2xy$
$xy = \frac{35}{2}$

4. b) $(100 + 2)(100 + 1)$

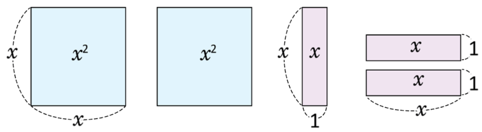
$= (100)^2 + (2 + 1)(100) + 2(1)$
$= 10\,000 + 300 + 2$
$= 10\,302$

Tarea: página 17 del Cuaderno de Ejercicios.

3.1 Factorización de polinomios

P

Antonio construirá un rectángulo con las siguientes piezas:

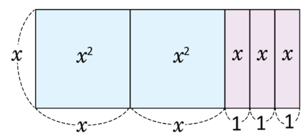


Las piezas azules son cuadrados de lado x; mientras que las piezas moradas son rectángulos de altura x y base 1.

a) ¿Cómo quedará el rectángulo?
b) ¿Cuál es el área total?
c) ¿Cuáles son las medidas de la altura y la base del rectángulo construido por Antonio?

S

a) El lado de los cuadrados azules es igual a la altura de los rectángulos morados (ambos miden x). El rectángulo puede formarse haciendo coincidir estas longitudes:



b) El área es igual a la suma de las áreas de cada pieza, o sea, $x^2 + x^2 + x + x + x = 2x^2 + 3x$.
c) Las medidas de la altura y la base son:

Altura $\longrightarrow$ x
Base $\longrightarrow$ $x + x + 1 + 1 + 1 = 2x + 3$

Como el área total es $2x^2 + 3x$, entonces:

$$2x^2 + 3x = x(2x + 3).$$

El área del rectángulo formado por las piezas se calcula como Altura × Base.

C

Al proceso que consiste en expresar un polinomio como producto de polinomios más simples se le llama **factorización**. Por ejemplo, $2x^2 + 3x$ se factoriza como el producto $x(2x + 3)$; a cada uno de los polinomios x y $2x + 3$ del producto se les llama **factores**. La factorización es el proceso inverso al desarrollo de polinomios:

Factorizar

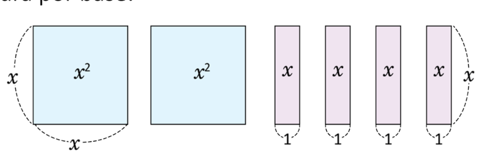
$$2x^2 + 3x = x(2x + 3)$$

Desarrollar

En la lección anterior, se daban las dimensiones del rectángulo para encontrar su área; ahora se da el área total para encontrar las dimensiones.

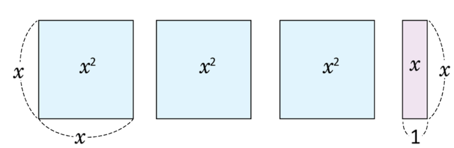
1. En cada literal, forma un rectángulo con las piezas dadas y escribe el área total como producto de altura por base:

a)



$2x^2 + 4x = 2x(x + 2)$

b)



$3x^2 + x = x(3x + 1)$

2. Identifica los factores en los siguientes productos de polinomios:

a) $2x(5x - 3)$ Factores

b) $-x(3x + 2)$ Factores

c) $(x + 4)(2x - 3)$ Factores

d) $3x(x - 5)(2x - 1)$ Factores

Indicador de logro

3.1 Relaciona la factorización como proceso inverso de la multiplicación de polinomios.

Secuencia

En el contenido de la lección anterior se estudiaron todos los casos de productos notables que son necesarios para el desarrollo de esta lección y otros contenidos a estudiar.
Se entenderá la factorización como el proceso inverso de la multiplicación, por lo que es importante dominar el desarrollo de productos notables para establecer las relaciones con los diferentes tipos de factorización.

Propósito

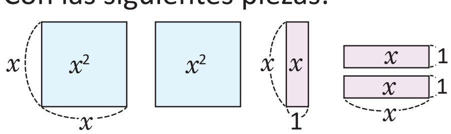
Ⓟ, Construir un rectángulo a partir de las piezas dadas, encontrar el área total descrita por las piezas y calcular las medidas de la altura y base del rectángulo formado. Este es el proceso inverso de descomponer el rectángulo en piezas.
Ⓢ Establecer una relación entre el área de las piezas y el producto de la altura y la base del rectángulo. El área de las piezas se escribe al lado izquierdo de la igualdad y el producto altura con base al lado derecho, contrario a como se escribía en la lección anterior.
Ⓒ Definir el término **factorización** como el proceso inverso al desarrollo de la multiplicación de polinomios. Se utiliza el ejemplo para mostrar que el polinomio $2x^2 + 3x$ se puede escribir como la multiplicación del monomio x y el binomio $2x + 3$.

En el numeral 1 se espera un desarrollo similar al del Problema inicial, mientras que en el numeral 2 se deben identificar los factores involucrados en el producto, esto facilitará la comprensión del lenguaje utilizado para factorizar polinomios en las próximas clases. En a) se puede considerar que los factores son 2, x y $5x - 3$; sucede lo mismo con b) y d).

Fecha:

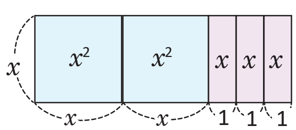
U1 3.1

Ⓟ Con las siguientes piezas:



a) Forma un rectángulo.
b) Encuentra el área total.
c) Encuentra la altura y la base del rectángulo.

Ⓢ a)

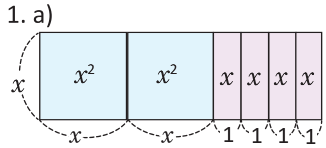


b) $x^2 + x^2 + x + x + x = 2x^2 + 3x$

c) altura $\rightarrow$ x
base $\rightarrow$ $x + x + 1 + 1 + 1 = 2x + 3$

Además, $2x^2 + 3x = x(2x + 3)$.

Ⓡ 1. a)



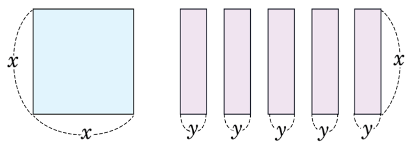
$2x^2 + 4x = x(2x + 4)$

2. a) Factores: $2x$ y $5x - 3$
b) Factores: $-x$ y $3x + 2$

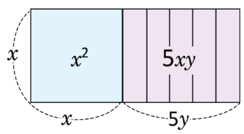
Tarea: página 18 del Cuaderno de Ejercicios.

3.2 Factor común

Realiza lo siguiente:
a) Escribe en tu cuaderno el área descrita por las piezas.
b) Forma un rectángulo y escribe su área en términos de su altura y su base.



a) El área de las piezas es: $x^2 + 5xy$.
b) El área del rectángulo es:



Altura $\longrightarrow$ x
Base $\longrightarrow$ $x + y + y + y + y + y = x + 5y$
Su área es: $x(x + 5y)$.

Para factorizar la expresión, se debe escribir $x^2 + 5xy$ como producto de polinomios más simples. Observa lo siguiente:

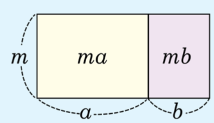
$$x^2 = x(x)$$
$$5xy = x(5y)$$

Ambos términos tienen en común el monomio x. Entonces:

$$x^2 + 5xy = x(x) + x(5y) \longrightarrow \text{Identificar términos comunes.}$$
$$= x(x + 5y) \longrightarrow \text{Propiedad distributiva.}$$

Por lo tanto, $x^2 + 5xy = x(x + 5y)$.

Si todos los términos de un polinomio tienen en común un monomio, entonces se extrae este monomio y se factoriza el polinomio, utilizando la propiedad distributiva: $ma + mb = m(a + b)$.



Factoriza el polinomio:

$$5y^2 - 10xy$$

¿Qué tienen en común los términos $5y^2$ y $5xy$?

Se debe identificar el factor común en ambos polinomios:

$$5y^2 = 5(y)(y) = 5y(y)$$
$$10xy = 2(5)(x)(y) = 5y(2x)$$

El factor común de los coeficientes es el máximo común divisor de ellos. Por ejemplo, el máximo común divisor de 5 y 10 es 5.

Luego, se extrae dicho factor y se utiliza la propiedad distributiva:

$$5y^2 - 10xy = 5y(y) - 5y(2x)$$
$$= 5y(y - 2x)$$

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^2 + xy$ $= x(2x + y)$
b) $10x^2 - 5xy$ $= 5x(2x - y)$
c) $x^2y + xy$ $= xy(x + 1)$
d) $2x^2y - 4xy$ $= 2xy(x - 2)$
e) $2x^2y - 3xy + y$ $= y(2x^2 - 3x + 1)$
f) $3x^2 + 6y + 12xy$ $= 3(x^2 + 2y(1 + 2x))$
g) $x^2y + x^2 - x$ $= x(xy + x - 1)$
h) $4xy - 6y$ $= 2y(2x - 3)$
i) $xy + 16x^2y^2$ $= xy(1 + 16xy)$

Indicador de logro

3.3 Factoriza polinomios cuyo factor común es un monomio.

Secuencia

En la clase anterior se estudió el significado del término factorización como el proceso inverso de la multiplicación. En esta clase se comienza el estudio de las factorizaciones, con el caso más sencillo, cuando los términos tienen un monomio común.

Propósito

Ⓟ, Construir un rectángulo a partir de las piezas dadas, encontrar el área total descrita por las piezas y calcular las medidas de la altura y base del rectángulo formado.
Ⓢ Establecer una relación entre el área de las piezas y el producto de la altura y la base del rectángulo. En Ⓒ se realiza el proceso de factorización a través de la identificación del monomio común de ambos términos y utilizando la propiedad distributiva.

Solución de algunos ítems:

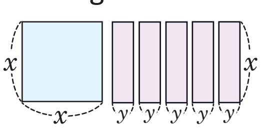
b) $10x^2 - 5xy$
Se tiene que:
$10x^2 = 5(x)(2x)$
$5xy = 5(x)(y)$
Por tanto,
$10x^2 - 5xy = 5(x)(2x) - 5(x)(y)$
$= 5x(2x - y)$.

g) $x^2y + x^2 - x$
Se tiene que:
$x^2y = (x)(xy)$
$x^2 = (x)(x)$
$x = (x)(1)$
Por tanto,
$x^2y + x^2 - x = (x)(xy) + (x)(x) - (x)(1)$
$= x(xy + x - 1)$.

No hay que olvidar el signo al factorizar $-(x)(1)$.

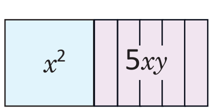
Fecha: **U1 3.2**

Ⓟ a) Escribe el área descrita por las piezas.
b) Encuentra la altura y la base del rectángulo formado.



Ⓢ a) Área de las piezas: $x^2 + 5xy$

b)



Altura $\rightarrow x$
Base $\rightarrow x + y + y + y + y + y = x + 5y$
Además, $x^2 + 5xy = x(x + 5y)$.

Ⓔ Factoriza: $5y^2 - 10xy$
Se tiene que:
$5y^2 = 5y(y)$
$10xy = 5y(2x)$
Por tanto,
$5y^2 - 10xy = 5y(y) - 5y(2x)$
$= 5y(y - 2x)$.

Ⓡ a) $x(2x + y)$
b) $5x(2x - y)$

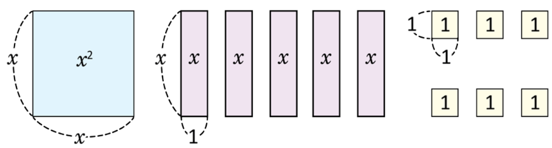
Tarea: página 19 del Cuaderno de Ejercicios.

3.3 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 1

P

Ana quiere factorizar el trinomio $x^2 + 5x + 6$. Para poder hacerlo, se le ocurre lo siguiente:

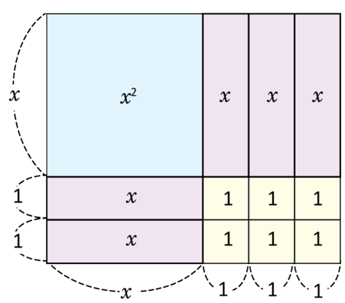
$x^2 + 5x + 6$ es el área del rectángulo que se forma con las siguientes piezas. Entonces para factorizar $x^2 + 5x + 6$ se debe encontrar la altura y la base del rectángulo.



¿Cómo queda factorizado $x^2 + 5x + 6$?

S

El rectángulo formado con las piezas se muestra en la figura. La altura del rectángulo es $(x + 2)$ y su base es $(x + 3)$. Luego, $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.



Observa que el producto $(x + 2)(x + 3)$ es un producto notable de la forma $(x + a)(x + b)$ y este se desarrolla:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \overbrace{(a + b)}^{\text{Suma de } a \text{ y } b}x + \underbrace{ab}_{\text{Producto de } a \text{ y } b}$$

Entonces, para factorizar $x^2 + 5x + 6$ deben buscarse dos números cuya suma sea +5 y cuyo producto sea +6. Se prueba con las parejas de números (positivo y negativo) cuyo producto es +6:

Pareja	Producto	Suma
1 y 6	+6	+7
−1 y −6	+6	−7
2 y 3	+6	+5
−2 y −3	+6	−5

Como el producto debe ser 6 positivo, ambos números deben ser o bien positivos o bien negativos. Esto por la ley de los signos para la multiplicación:
(+)(+) = +
(−)(−) = +

Por lo tanto, $a = 2$, $b = 3$ y $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

Lección 3

C

Para poder factorizar un trinomio en el producto notable $(x + a)(x + b)$ se hace lo siguiente:

1. Los términos del trinomio deben ser x^2, otro término con parte literal x y el otro sin variable (término independiente).
2. Se buscan dos números cuyo producto sea igual al término independiente y cuya suma sea igual al coeficiente de x, teniendo en cuenta la ley de los signos.

E

Factoriza $y^2 + 13y + 30$:
Se deben buscar dos números cuyo producto sea +30 y cuya suma sea +13. Como la suma es positiva, entonces ambos números deben ser positivos:

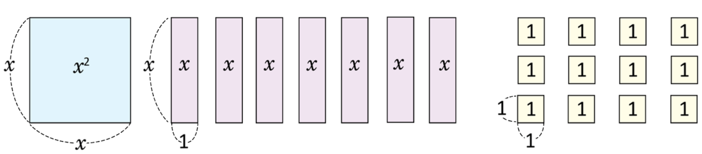
Pareja	Producto	Suma
1 y 30	+30	+31
2 y 15	+30	+17
3 y 10	+30	+13

Por lo tanto, $a = 3$, $b = 10$ y
$y^2 + 13y + 30 = (y + 3)(y + 10)$.

1. En la siguiente figura:

   a) Reubica las siguientes piezas de modo que se forme un rectángulo.

   b) Encuentra el área del rectángulo formado en términos de su base y altura.



x^2	x	x	x	x
x	1	1	1	1
x	1	1	1	1
x	1	1	1	1

$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$

2. Factoriza los siguientes trinomios:

   a) $x^2 + 3x + 2$ $= (x + 1)(x + 2)$

   b) $x^2 + 9x + 20$ $= (x + 4)(x + 5)$

   c) $y^2 + 8y + 12$ $= (y + 6)(y + 2)$

   d) $y^2 + 11y + 30$ $= (y + 5)(y + 6)$

Indicador de logro

3.3 Factoriza polinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ en el producto notable $(x + a)(x + b)$.

Secuencia

Anteriormente se ha definido el término factor común y se estudió únicamente el caso cuando existe un factor monomio común a los términos del polinomio, utilizando para ello la propiedad distributiva del producto sobre la suma. En esta clase se estudia el caso cuando el trinomio es de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, para factorizarlo se utiliza uno de los productos notables vistos en las clases anteriores.

Propósito

P Utilizar la manipulación de las piezas para ejemplificar el algoritmo para factorizar trinomios de la forma: $x^2 + (a + b)x + ab$. S Con este ejemplo se muestra que el coeficiente de x es la suma de dos números y el término constante es su producto. Para encontrar estos números se utiliza un procedimiento por prueba y error.
Hay finitas maneras de expresar 30 como producto de dos números, mientras que hay infinitas formas de expresar 13 como suma de dos números, por esta razón en la tabla se deben escribir primero dos números cuyo producto sea +30 y se escribe el resultado de la suma en la siguiente columna, se repite este procedimiento hasta que la suma sea +13, el número que se busca.

Solución de algunos ítems:

2. b) $x^2 + 9x + 20$

Pareja	Producto	Suma
1 y 20	+20	+21
2 y 10	+20	+12
4 y 5	+20	+9

Por lo tanto,
$x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$.

d) $y^2 + 11y + 30$

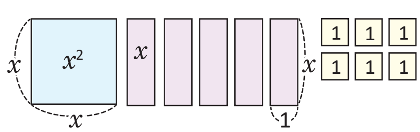
Pareja	Producto	Suma
1 y 30	+30	+31
2 y 15	+30	+17
3 y 10	+30	+13
5 y 6	+30	+11

Por lo tanto,
$y^2 + 11y + 30 = (y + 5)(y + 6)$.

Posibles dificultades:
Formar el rectángulo con las piezas no resulta sencillo, el alumno debe manipular las piezas mentalmente o en material concreto hasta obtener una figura sin espacios vacíos. Es común olvidar las medidas de los lados de cada pieza y tratar de encajar con los lados de otras piezas que no son de su misma medida.

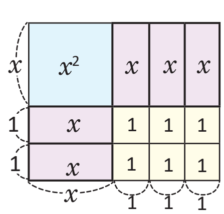
Fecha: **U1 3.3**

P Con las siguientes piezas:



Forma un rectángulo y encuentra la factorización de $x^2 + 5x + 6$.

S Rectángulo formado.



$x^2 + 5x + 6$
$= (x + 2)(x + 3)$

Buscar dos números cuya suma sea +5 y cuyo producto sea +6.

Pareja	Producto	Suma
1 y 6	+6	+7
−1 y −6	+6	−7
2 y 3	+6	+5

E Factorizar $y^2 + 13y + 30$:

Pareja	Producto	Suma
1 y 30	+30	+31
2 y 15	+30	+17
3 y 10	+30	+13

$y^2 + 13y + 30$
$= (y + 3)(y + 10)$

Tarea: página 20 del Cuaderno de Ejercicios.

3.4 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, parte 2

P

Factoriza los polinomios:

a) $x^2 - 13x + 36$

b) $y^2 - 6y - 40$

S

a) El trinomio cumple las condiciones para factorizarlo en el producto notable $(x + a)(x + b)$. Se buscan dos números cuyo producto sea +36 y cuya suma sea −13. Como la suma es negativa y el producto positivo, ambos números deben ser negativos:

Pareja	Producto	Suma
−1 y −36	+36	−37
−2 y −18	+36	−20
−3 y −12	+36	−15
−4 y −9	+36	−13

Puedes desarrollar $(x - 4)(x - 9)$ para comprobar si la factorización es correcta.

Entonces:

$$\begin{aligned} x^2 - 13x + 36 &= [x + (-4)][x + (-9)] \\ &= (x - 4)(x - 9) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9)$

b) De nuevo, se buscan dos números cuyo producto sea −40 y cuya suma sea −6. Como el producto es negativo (−40), entonces uno de ellos debe ser positivo y el otro negativo:

Pareja	Producto	Suma
−1 y 40	−40	+39
1 y −40	−40	−39
−2 y 20	−40	+18
2 y −20	−40	−18
−4 y 10	−40	+6
4 y −10	−40	−6

En la tabla faltan las parejas 5, −8 y −5, 8, pero ya se han encontrado los números que satisfacen.

Entonces:

$$\begin{aligned} y^2 - 6y - 40 &= (y + 4)[y + (-10)] \\ &= (y + 4)(y - 10) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y^2 - 6y - 40 = (y + 4)(y - 10)$.

C

Sean $a > 0$ y $b > 0$:

Si el trinomio es $x^2 + ax + b$	Se buscan 2 números positivos cuyo producto sea $+b$ y cuya suma sea $+a$.
Si el trinomio es $x^2 - ax + b$	Se buscan 2 números negativos cuyo producto sea $+b$ y cuya suma sea $-a$.
Si el trinomio es $x^2 + ax - b$ o $x^2 - ax - b$	Se buscan 2 números, uno positivo y el otro negativo cuyo producto sea $-b$ y cuya suma sea $+a$ o $-a$, según sea el caso.

Factoriza:

a) $x^2 + x - 2$
$= (x + 2)(x - 1)$

b) $x^2 - 10x + 21$
$= (x - 7)(x - 3)$

c) $x^2 - 7x - 30$
$= (x - 10)(x + 3)$

d) $y^2 - 4y - 32$
$= (y - 8)(y + 4)$

e) $y^2 - 14y + 33$
$= (x - 3)(x - 11)$

f) $x^2 + 13x + 42$
$= (x + 6)(x + 7)$

Indicador de logro

3. 4 Factoriza polinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$ que involucren términos con signo negativo en el producto notable $(x + a)(x + b)$.

Secuencia

En la clase anterior se formalizó el proceso para factorizar polinomios de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, en esta clase se factoriza este mismo tipo de polinomios con la diferencia de que en estos casos los términos pueden tener signo negativo.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Se utiliza el siguiente hecho:
$ab > 0$, si a y b tienen el mismo signo. $ab < 0$, si a y b tienen diferente signo.
Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$.
Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $a + b < 0$.
Así se puede disminuir la cantidad de parejas a probar.

Establecer el proceso para factorizar trinomios de la forma: $x^2 + (a + b)x + ab$ para todos los casos posibles. Es importante mencionar que $a > 0$ y $b > 0$, para evitar confusión en el uso del signo negativo.

Solución de algunos ítems:

2. a) $x^2 + x - 2$

Pareja	Producto	Suma
1 y −2	−2	−1
−1 y 2	−2	+1

Por lo tanto,
$$x^2 + x - 2 = (x + (-1))(x + 2)$$
$$= (x - 1)(x + 2).$$

d) $y^2 - 4y - 32$

Pareja	Producto	Suma
−1 y 32	−32	+31
−2 y 16	−32	+14
−4 y 8	−32	+4
−8 y 4	−32	−4

Por lo tanto,
$$y^2 - 4y - 32 = (y + (-8))(y + 4)$$
$$= (y - 8)(y + 4).$$

Fecha: **U1 3.4**

Ⓟ Factoriza los polinomios:
a) $x^2 - 13x + 36$
b) $y^2 - 6y - 40$

Ⓢ a)

Pareja	Producto	Suma
−1 y −36	+36	−37
−2 y −18	+36	−20
−3 y −12	+36	−15
−4 y −9	+36	−13

Por lo tanto,
$$x^2 - 13x + 36 = (x + (-4))(x + (-9))$$
$$= (x - 4)(x - 9).$$

b)

Pareja	Producto	Suma
−1 y 40	−40	+39
1 y −40	−40	−39
−2 y 20	−40	+18
2 y −20	−40	−18
−4 y 10	−40	+6
4 y −10	−40	−6

Por lo tanto,
$$y^2 - 6y - 40 = (y + 4)(y + (-10))$$
$$= (y + 4)(y - 10).$$

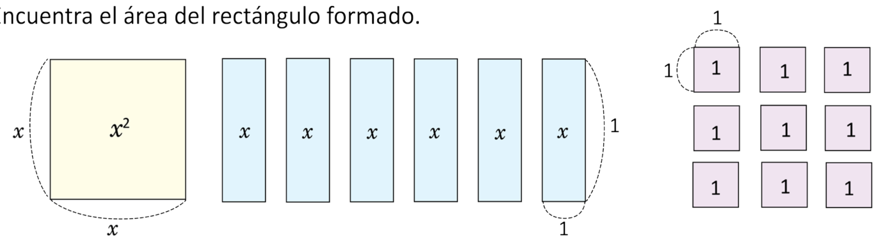
Ⓡ a) $(x + 2)(x - 1)$
b) $(x - 7)(x - 3)$

Tarea: página 21 del Cuaderno de Ejercicios.

3.5 Factorización de trinomios cuadrados perfectos

P Realiza lo siguiente:

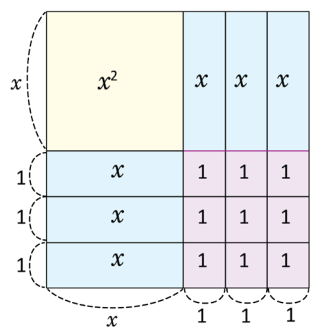
a) Escribe el área descrita por las piezas.
b) Coloca las piezas de modo que se forme un rectángulo.
c) Encuentra el área del rectángulo formado.



S

a) El área descrita por las piezas es:
$x^2 + x + x + x + x + x + x + 9 = x^2 + 6x + 9.$

b) El rectángulo formado por las piezas es:



Altura $\longrightarrow$ $x + 3$
Base $\longrightarrow$ $x + 3$

c) Observa que el rectángulo formado es un cuadrado cuya área es:

$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$$

Por tanto, $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.

Puede utilizarse lo visto en las clases anteriores, buscar dos números positivos (en este caso) cuyo producto sea +9 y cuya suma sea +6:

Pareja	Producto	Suma
1 y 9	+9	+10
3 y 3	+9	+6

Luego, $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3)$
$= (x + 3)^2$.

La factorización resulta en el cuadrado de un binomio. Este producto notable se desarrolla:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

Entonces, para factorizar $x^2 + 6x + 9$ en el cuadrado de un binomio debe buscarse un número cuyo cuadrado sea 9 y el doble de este sea 6, justamente es 3. Por lo tanto:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2.$$

C

El trinomio de la forma $x^2 \pm 2ax + a^2$ se llama **trinomio cuadrado perfecto**. Este se factoriza como el cuadrado de un binomio de acuerdo al signo del segundo término:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

En un trinomio cuadrado perfecto el término independiente nunca es negativo.

Para determinar si un trinomio es trinomio cuadrado perfecto, primero debe comprobarse que el término independiente es el cuadrado de algún número; luego, comprobar que el doble de ese número es igual al coeficiente de la variable de primer grado. Por ejemplo,

$$x^2 + 6x + 9.$$

Este es un trinomio cuadrado perfecto, pues 9 es el cuadrado de $3(3^2 = 9)$; además el doble de 3 es 6 y es igual al coeficiente de la variable de primer grado x. Entonces:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= x^2 + 2(3)x + 3^2 \\ &= (x + 3)^2. \end{aligned}$$

E

Factoriza:

$$x^2 - 10x + 25$$

Es un trinomio cuadrado perfecto por las siguientes razones:

a) El término independiente es el cuadrado de un número:
25 es el cuadrado de 5 ($5^2 = 25$, y se tiene $a = 5$).

b) El coeficiente de x es el doble de 5:
$2a = 2(5) = 10$.

Como el segundo término es negativo, entonces:
$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2.$$

Factoriza:

a) $x^2 + 4x + 4$
$= (x + 2)^2$

b) $x^2 - 8x + 16$
$= (x - 4)^2$

c) $y^2 - 18y + 81$
$= (x - 9)^2$

d) $y^2 + 14y + 49$
$= (x + 7)^2$

e) $x^2 + x + \frac{1}{4}$
$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

f) $y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{16}$
$= \left(y - \frac{1}{4}\right)^2$

24

Indicador de logro

3.5 Factoriza trinomios cuadrados perfectos en el producto notable $(x + a)^2$ o $(x - a)^2$.

Secuencia

En las clases anteriores se estudió el concepto de factorización y se han factorizado trinomios cuadrados utilizando productos notables, también se han utilizado áreas para ejemplificar geométricamente lo que sucede al factorizar un polinomio. Para esta clase se estudia el caso cuando el trinomio es un **trinomio cuadrado perfecto**.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Verificar que el rectángulo formado con las piezas dadas, es en realidad un cuadrado y utilizar este hecho para ejemplificar la factorización de un trinomio cuadrado perfecto.

Ⓔ Establecer el procedimiento para factorizar un trinomio cuadrado perfecto en el producto notable $(x + a)^2$ o $(x - a)^2$, dependiendo de si el signo del segundo término del trinomio es positivo o es negativo.

Solución de algunos ítems:

1\. a) $x^2 + 4x + 4$

Se tiene que:

$4 = 2^2$

$4 = 2(2)$

Por tanto,

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.

e) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

Se tiene que:

$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)$

Por tanto,

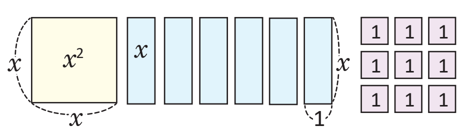
$x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

Posibles dificultades:

Comprender que el objetivo del problema es manipular las piezas hasta que se forme perfectamente un rectángulo. Las indicaciones dadas deben presentarse con la mayor claridad posible.

Fecha: **U 3.5**

Ⓟ Con las siguientes piezas:



a) Escribe el área que describen.

b) Forma un rectángulo.

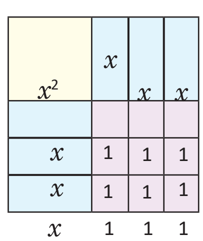
c) Encuentra el área del rectángulo.

Ⓢ a)

Área de las piezas:

$x^2 + 6x + 9$

b)



c) $(x + 3)^2$

Por tanto, $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.

Ⓔ Factoriza: $x^2 - 10x + 25$

Se observa que:

$25 = 5^2$

$10 = 2(5)$

$x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2(5)x + 5^2$

$= (x - 5)^2$

Ⓡ

a) $(x + 2)^2$

b) $(x - 4)^2$

c) $(x - 9)^2$

Tarea: página 22 del Cuaderno de Ejercicios.

3.6 Factorización de diferencias de cuadrados

P

En la figura 1, al cuadrado de lado x se le ha quitado un cuadrado de lado a (figura 2); dando como resultado la figura 3, cuya área es: $x^2 - a^2$.

Realizando un corte de manera conveniente, divide en piezas la figura 2 y forma un rectángulo.

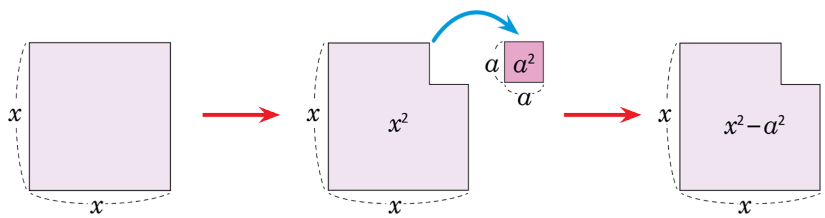


Figura 1 Figura 2 Figura 3

S

Se puede hacer un corte y reubicar las piezas como se muestra a continuación:

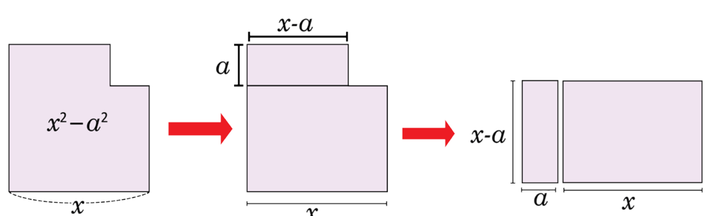


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Para la solución se dividió el rectángulo en estas piezas, sin embargo, no es la única forma de dividir el rectángulo y lograr demostrar la propiedad.

Observa que el área de la figura 1 es $x^2 - a^2$ y que el área de la figura 3 es $(x + a)(x - a)$.
Como estas expresiones representan la misma área. Entonces se tiene que

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

C

Al polinomio de la forma $x^2 - a^2$ se llama **diferencia de cuadrados**, y se factoriza en el producto notable $(x + a)(x - a)$, es decir:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

E

Factoriza: $x^2 - 9$.

Para factorizar $x^2 - 9$, el término independiente 9 es igual al cuadrado de 3, entonces:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= x^2 - 3^2 \\ &= (x + 3)(x - 3) \end{aligned}$$

Por lo tanto: $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.

Factoriza:

a) $x^2 - 1$
$= (x + 1)(x - 1)$

b) $x^2 - 16$
$= (x + 4)(x - 4)$

c) $y^2 - 25$
$= (y + 5)(y - 5)$

d) $x^2 - y^2$
$= (x + y)(x - y)$

e) $y^2 - \frac{1}{4}$
$= \left(y + \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)$

f) $x^2 - \frac{1}{9}$
$= \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

Indicador de logro

3.6 Factoriza la diferencia de cuadrados como el producto notable $(x + a)(x - a)$.

Secuencia

En clases anteriores se han estudiado métodos para factorizar trinomios utilizando productos notables que se estudiaron en la lección anterior. Ahora se estudiará cómo factorizar una diferencia de cuadrados utilizando el producto notable de la suma por la diferencia de un binomio.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Formar un rectángulo utilizando piezas de papel manipulables a partir de la figura 2, que representa un cuadrado de lado x al que se le ha quitado un cuadrado de lado a.
Ⓒ Formalizar el proceso para factorizar la diferencia de cuadrados, a partir del resultado obtenido en la solución.

Ⓔ Se expresan los cuadrados de x y 3 con el objetivo de hacer evidente que se trata de una diferencia de cuadrados.

Solución de algunos ítems:

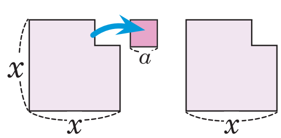
b) $x^2 - 16$
$x^2 - 16 = x^2 - 4^2$
$= (x + 4)(x - 4)$

d) $x^2 - y^2$
$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

Observación:
En la página 182 del Libro de Texto aparece la misma imagen de la figura 2 ampliada, se pueden utilizar fotocopias de esta página para facilitar la distribución del material a manipular.

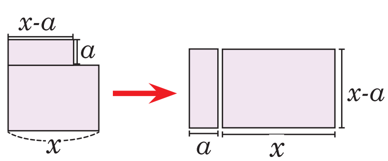
Fecha: **U1 3.6**

Ⓟ Al cuadrado de lado x se le quita un cuadrado de lado a.



Divide en piezas la figura y forma un rectángulo.

Ⓢ



Área: $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$

Ⓔ Factoriza: $x^2 - 9$
$x^2 - 9 = x^2 - 3^2$
$= (x + 3)(x - 3)$
Por lo tanto,
$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.

Ⓡ
a) $x^2 - 1$
$x^2 - 1 = x^2 - 1^2$
$= (x + 1)(x - 1)$

b) $(x + 4)(x - 4)$

c) $(y + 5)(y - 5)$

Tarea: página 23 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 3

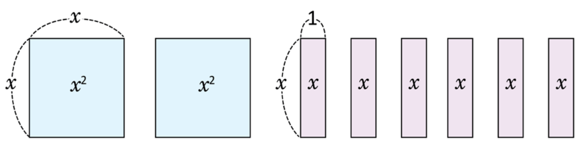
3.7 Practica lo aprendido

A continuación se presenta un resumen de las factorizaciones vistas hasta esta clase:

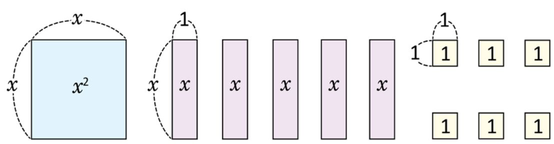
	Se factoriza:	Por ejemplo:
Factor común $ma + mb + mc$	$m(a + b + c)$	$4x^2 + 6xy - 10x = 2x(2x + 3y - 5)$
Trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$	$(x + a)(x + b)$	$x^2 + 2x - 35 = (x + 7)(x - 5)$
Trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 2ax + a^2$.....(1) $x^2 - 2ax + a^2$.....(2)	$(x + a)^2$.....(1)	$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$
	$(x - a)^2$.....(2)	$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$
Diferencia de cuadrados: $x^2 - a^2$	$(x + a)(x - a)$	$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

1. En cada literal, forma un rectángulo con las piezas dadas y escribe el área total como producto de altura por base:

a)



b)



2. Identifica los factores en los siguientes productos de polinomios:

a) $5x(x - 1)$

b) $(-2x)(x + 10)$

c) $(x + y)(5x - y)$

d) $x(x - 5)(2x + 3)$

e) $2x(3x + 4)(y + 1)$

f) $-y(2y + 9)(10 - 11y)$

3. Para el trinomio $x^2 - 11x + 18$:

a) Los dos números cuyo producto es +18 y cuya suma es −11, ¿son ambos positivos, negativos o uno positivo y otro negativo? Justifica tu respuesta. $2x^2 + 6x = 2x(x + 3)$

b) Factoriza el trinomio. $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$

4. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $10x^2 + 6xy$ $= 2x(5x + 3y)$

b) $7xy - 21y^2$ $= 7y(x - 3y)$

c) $-x^2 + 2xy - 3xy^2$ $= -x(x - 2y + 3y^2)$

d) $9x^2y - 15xy - 21xy^2$ $= 3xy(3x - 5 - 7y)$

e) $x^2 - 6x - 55$ $= (x - 11)(x + 5)$

f) $y^2 + 5y - 50$ $= (y + 10)(y - 5)$

g) $x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}$ $= \left(x + \frac{5}{4}\right)^2$

h) $y^2 - \frac{5}{3}y + \frac{25}{36}$ $= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2$

i) $x^2 - 81$ $= (x + 9)(x - 9)$

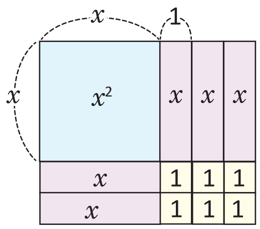
j) $y^2 - \frac{25}{36}$ $= \left(y + \frac{5}{6}\right)\left(y - \frac{5}{6}\right)$

Indicador de logro

3.7 Resuelve problemas utilizando la factorización.

Solución de algunos ítems:

1. a)



Área total: $(x + 3)(x + 2)$

2. a) Factores: $5x$ y $x - 1$
   b) Factores: $-2x$ y $x + 10$
   c) Factores: $x + y$ y $5x - y$
   d) Factores: x, $x - 5$ y $2x + 3$
   e) Factores: $2x$, $3x + 4$ y $y + 1$
   f) Factores: $-y$, $2y + 9$ y $10 - 11y$

3. a) Como el producto es positivo (+), los dos números deben tener el mismo signo. Si los dos números son positivos, su suma sería positiva (+), pero si los dos números son negativos, el resultado de la suma sería de signo negativo. Por tanto, ambos números son negativos.

   b) $(x - 9)(x - 2)$

4. f) $y^2 + 5y - 50$

Pareja	Producto	Suma
1 y −50	−50	−49
−1 y 50	−50	+49
2 y −25	−50	−23
−2 y 25	−50	+23
5 y −10	−50	−5
−5 y 10	−50	−5

Por tanto,

$y^2 + 5y - 50 = (y - 5)(y + 10)$.

j) $y^2 - \frac{25}{36}$

$y^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(y - \frac{5}{6}\right)\left(y + \frac{5}{6}\right)$

Tarea: página 24 del Cuaderno de Ejercicios.

3.8 Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 1

P

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

b) $4x^2 - 25y^2$

¿Es posible utilizar factor común en cada caso? ¿Cuáles de los métodos vistos en clases anteriores puedes utilizar?

S

a) Los términos del trinomio no tienen un monomio común, pero puede utilizarse directamente uno de los métodos vistos en clases anteriores. Observa que el primer término es el cuadrado de $2x$ y el tercero es el cuadrado de $3y$:

$$(2x)^2 = 4x^2$$
$$(3y)^2 = 9y^2$$

Además, $2(2x)(3y) = 12xy$, por lo que $4x^2 + 12xy + 9y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto. Se toman $2x = w$ y $3y = z$ y se factoriza como un trinomio cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 12xy + 9y^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 && \text{Tomando } 2x = w \text{ y } 3y = z,\\ &= w^2 + 2wz + z^2 \\ &= (w + z)^2 && \text{factorizando,}\\ &= (2x + 3y)^2 && \text{sustituyendo nuevamente } w = 2x \text{ y } z = 3y. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$.

b) Igual que en el caso anterior, los términos del binomio, no tienen un monomio común. Observa que el primer término es el cuadrado de $2x$ y el segundo es el cuadrado de $5y$:

$$(2x)^2 = 4x^2$$
$$(5y)^2 = 25y^2$$

Se toman $2x = w$, $5y = z$ y se factoriza como diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 25y^2 &= (2x)^2 - (5y)^2 && \text{Tomando } 2x = w \text{ y } 5y = z,\\ &= w^2 - z^2 && \text{factorizando,}\\ &= (w + z)(w - z) && \text{sustituyendo nuevamente,}\\ &= (2x + 5y)(2x - 5y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $4x^2 - 25y^2 = (2x + 5y)(2x - 5y)$.

C

Cuando se factoriza un polinomio, si sus términos NO tienen un monomio común entonces pueden realizarse cambios de variable para transformarlo en un polinomio conocido y factorizarlo por cualquiera de las formas vistas en clases anteriores.

Factoriza:

a) $9x^2 - 30x + 25$ $= (3x - 5)^2$

b) $16x^2 + 24xy + 9y^2$ $= (4x + 3y)^2$

c) $\frac{x^2}{4} + 5x + 25$ $= \left(\frac{x}{2} + 5\right)^2$

d) $36x^2 - 25$ $= (6x + 5)(6x - 5)$

e) $x^2 - 100y^2$ $= (x + 100y)(x - 100y)$

f) $\frac{x^2}{4} - y^2$ $= \left(\frac{x}{2} + y\right)\left(\frac{x}{2} - y\right)$

Indicador de logro

3.8 Utiliza el cambio de variable por un monomio para factorizar polinomios.

Secuencia

El cambio de variable fue utilizado anteriormente para reducir el producto de dos polinomios a otro más sencillo, o para transformar el producto de dos expresiones en apariencia complejas, en un producto notable ya conocido. Siguiendo con esta misma idea, en esta clase se utiliza el cambio de variable para que la factorización de los polinomios resulte más evidente y natural.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Factorizar expresiones algebraicas utilizando alguno de los tipos de factorización vistos anteriormente. En un primer momento el alumno puede solucionar como le resulte más conveniente, si es posible, siempre se debe resolver el problema utilizando cambio de variables para ejemplificar lo útil que resulta, pues hace más evidente la factorización a utilizar.

Ⓒ Establecer el uso del cambio de variable como herramienta que ayuda a factorizar polinomios.

Solución de algunos ítems:

a) $9x^2 - 30x + 25$
$= (3x)^2 - 2(5)(3x) + 5^2$

Sea $3x = w$
$= w^2 - 2(5)w + 5^2$
$= (w - 5)^2$
$= (3x - 5)^2$

Por tanto,
$9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$.

f) $\frac{x^2}{4} - y^2$, sea $\frac{x}{2} = w$
$= w^2 - y^2$
$= (w + y)(w - y)$
$= \left(\frac{x}{2} + y\right)\left(\frac{x}{2} - y\right)$

Por tanto,
$\frac{x^2}{4} - y^2 = \left(\frac{x}{2} + y\right)\left(\frac{x}{2} - y\right)$.

Para el plan de pizarra, en la parte de la solución, se omite la expresión con el cambio de variable ya que es necesario exigirlo a los estudiantes.

Fecha: **U1 3.8**

Ⓟ Factoriza los siguientes polinomios:
a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$
b) $4x^2 - 25y^2$

Ⓢ a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$
Se observa que:
$4x^2 = (2x)^2$ y $9y^2 = (3y)^2$

$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$
Sea $2x = w$ y $3y = z$
$(2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = w^2 + 2(w)(z) + (z)^2$
$= (w + z)^2$
$= (2x + 3y)^2$

Por tanto: $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$.

b) $4x^2 - 25y^2$
Se observa que:
$4x^2 = (2x)^2$ y $25y^2 = (5y)^2$
$4x^2 - 25y^2 = (2x)^2 - (5y)^2$
$= (2x + 5y)(2x - 5y)$

Por tanto: $4x^2 - 25y^2 = (2x + 5y)(2x - 5y)$

Ⓡ a) $(3x - 5)^2$
b) $(4x + 3y)^2$
c) $\left(\frac{x}{2} + 5\right)^2$
d) $(6x + 5)(6x - 5y)$

Tarea: página 25 del Cuaderno de Ejercicios.

3.9 Factorización de polinomios usando cambio de variable, parte 2

P

Factoriza:

a) $(x-1)^2-(y+1)^2$

b) $(x+1)^2+2(x+1)y+y^2$

No desarrolles los productos que se encuentran dentro de cada polinomio. Utiliza un procedimiento similar al de la clase anterior para poder factorizar.

S

a) Observa que $(x-1)^2$ es el cuadrado de $x-1$, $(y+1)^2$ es el cuadrado de $y+1$ y ambos se están restando. Puede factorizarse como diferencia de cuadrados, se toman $x-1=w$ y $y+1=z$ y se factoriza la diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned}(x-1)^2-(y+1)^2 &= w^2-z^2 && \text{Tomando } x-1=w \text{ y } y+1=z,\\ &= (w+z)(w-z) && \text{factorizando,}\\ &= (x-1+y+1)[x-1-(y+1)] && \text{sustituyendo nuevamente,}\\ &= (x+y)(x-y-2)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x-1)^2-(y+1)^2=(x+y)(x-y-2)$.

b) Observa que $(x+1)^2$ es el cuadrado de $x+1$, y^2 es el cuadrado de y, además el segundo término es el producto de 2 por $x+1$ por y. Luego, el polinomio puede factorizarse como un trinomio cuadrado perfecto: se toma $x+1=w$ y se factoriza el trinomio cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned}(x+1)^2+2(x+1)y+y^2 &= w^2+2wy+y^2 && \text{Tomando } x+1=w,\\ &= (w+y)^2 && \text{factorizando,}\\ &= (x+1+y)^2 && \text{sustituyendo nuevamente } x+1=w,\\ &= (x+y+1)^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x+1)^2+2(x+1)y+y^2=(x+y+1)^2$.

C

Cuando se factoriza un polinomio, si sus términos NO tienen un monomio común entonces pueden realizarse cambios de variable para transformarlo en un polinomio conocido y factorizarlo por cualquiera de las formas vistas en clases anteriores.

Recuerda que cuando utilices un cambio de variable: después de factorizar debes realizar el cambio nuevamente, reducir los términos semejantes (si los hay) y ordenar los términos de los factores.

Factoriza:

a) $4x^2-(y+2)^2$
$=(2x+y+2)(2x-y-2)$

b) $(x+3)^2-9y^2$
$=(x-3y+3)(x+3y+3)$

c) $(x-5)^2-(y-1)^2$
$=(x+y-6)(x-y-4)$

d) $y^2-2(x+3)y+(x+3)^2$
$=(y-x-3)^2$

e) $4x^2-4x(y-7)+(y-7)^2$
$=(2x-y+7)^2$

f) $(x-2)^2+2(x-2)(y-3)+(y-3)^2$
$=(x+y-5)^2$

Indicador de logro

3.9 Utiliza el cambio de variable por un binomio para factorizar polinomios.

Secuencia

El estudio del cambio de variable para factorizar un polinomio, realizado en la clase anterior, fue únicamente cuando la variable a sustituir era un monomio, en esta clase se resuelven problemas donde es necesario realizar un cambio de variable por un binomio.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar el cambio de variable por un binomio para transformar la expresión en otra más simple y con la que es más evidente el tipo de factorización a utilizar.

Ⓒ Establecer en plenaria el proceso de factorización utilizando el cambio de variable por un binomio y recordar que al factorizar una expresión utilizando este método no se debe olvidar regresar a las variables originales.

Solución de algunos ítems:

$y^2 - 2(x + 3)y + (x + 3)^2$

Sea $x + 3 = w$

$$\begin{aligned}&= y^2 - 2(w)y + w^2\\&= (y - w)^2\\&= (y - (x + 3))^2\\&= (y - x - 3)^2\end{aligned}$$

Por tanto,

$y^2 - 2(x + 3)y + (x + 3)^2 = (y - x - 3)^2$.

Fecha:

U1 3.9

Ⓟ Factoriza:

a) $(x - 1)^2 - (y + 1)^2$

b) $(x + 1)^2 + 2(x + 1)y + y^2$

Ⓢ a) $(x - 1)^2 - (y + 1)^2$

Tomando: $x - 1 = w$ y $y + 1 = z$

$$\begin{aligned}&(w)^2 - (z)^2\\&= (w + z)(w - z)\\&= (x - 1 + (y + 1))(x - 1 - (y + 1))\\&= (x - 1 + y + 1)(x - 1 - y - 1)\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 - (y + 1)^2 &= (x - 1 + y + 1)(x - 1 - y - 1)\\&= (x + y)(x - y - 2).\end{aligned}$$

b) $(x + 1)^2 + 2(x + 1)y + y^2$

Tomando: $x + 1 = w$

$$\begin{aligned}&(x + 1)^2 + 2(x + 1)y + y^2\\&= (w)^2 + 2(w)y + y^2\\&= (w + y)^2\\&= (x + 1 + y)^2\end{aligned}$$

Por tanto:

$(x + 1)^2 + 2(x + 1)y + y^2 = (x + 1 + y)^2$.

Ⓡ a) $(2x + y + 2)(2x - y - 2)$

b) $(x - 3y + 3)(x + 3y + 3)$

c) $(x + y - 6)(x - y - 4)$

d) $(y - x - 3)^2$

Tarea: página 26 del Cuaderno de Ejercicios.

3.10 Factorizaciones sucesivas

P

Factoriza el siguiente polinomio: $2x^2 + 2x - 12$.

¿Es posible utilizar directamente alguno de los métodos vistos en las clases anteriores? ¿Qué deberías hacer primero?

S

Lo primero que debe hacerse es extraer el factor común de los términos, que en este caso es 2:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 12 &= 2(x)^2 + 2(x) - 2(6) \\ &= 2(x^2 + x - 6) \end{aligned}$$

El trinomio dentro del paréntesis puede factorizarse en la forma $(x + a)(x + b)$: los dos números (uno positivo y otro negativo) cuyo producto es −6 y cuya suma es +1 son 3 y −2. Luego:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x - 12 &= 2(x^2 + x - 6) \\ &= 2(x + 3)(x - 2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $2x^2 + 2x - 12 = 2(x + 3)(x - 2)$.

C

Cuando se factoriza un polinomio, primero hay que verificar si sus términos tienen un monomio común; si es así, se extrae este monomio y se factoriza el segundo factor, utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores.

E

Factoriza el siguiente polinomio: $-2x^2y + 8xy - 8y$.

Primero, hay que extraer el factor común de los tres términos, en este caso es $-2y$.

$$\begin{aligned} -2x^2y + 8xy - 8y &= (-2y)(x^2) + (-2y)(-4x) + (-2y)(4) \\ &= (-2y)(x^2 - 4x + 4) \qquad \text{Factorizando } x^2 - 4x + 4 \\ &= (-2y)(x - 2)^2 \end{aligned}$$

Por tanto, $-2x^2y + 8xy - 8y = -2y(x - 2)^2$.

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $-2x^2 + 10x - 8$
$= -2(x - 1)(x - 4)$

b) $2x^2 + 32x + 30$
$= 2(x + 15)(x + 1)$

c) $3x^2 + 12x + 12$
$= 3(x + 2)^2$

d) $5xy^2 - 25xy + 30x$
$= 5x(y - 3)(y - 2)$

e) $2x^2 - 18$
$= 2(x + 3)(x - 3)$

f) $-3y^2 + 300$
$= -3(y + 10)(y - 10)$

g) $-2x^2y + 8xy - 8y$
$= -2y(x - 2)^2$

h) $2x^2y - 12xy + 18y$
$= (2y)(x - 3)^2$

i) $3x^2z - 12y^2z$
$= 3z(x + 2y)(x - 2y)$

Indicador de logro

3.10 Factoriza polinomios extrayendo factor común y utilizando productos notables.

Secuencia

Para esta clase se realiza más de un tipo de factorización en una misma expresión. A diferencia de las clases 3.8 y 3.9, los términos que aparecen en la expresión poseen un factor monomio común, por lo que el primer paso siempre es identificar el factor común y luego factorizar, a diferencia de las clases anteriores, donde la factorización resultaba inmediata al realizar un cambio de variable.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver un problema donde se deban realizar dos factorizaciones para que la expresión quede totalmente factorizada; si la solución no es muy evidente en un principio, se puede utilizar la pista que se describe en el Problema inicial, generando la pregunta, ¿qué se debe hacer primero?

Ⓒ Formalizar el uso de las factorizaciones sucesivas, enfatizando el hecho de que el primer paso siempre debe ser verificar si las expresiones tienen un factor común.

Ⓔ Ejemplificar lo descrito en la solución, en un primer paso se extrae el factor común y posteriormente se utiliza la factorización de un trinomio cuadrado perfecto. Usualmente, si el término que está elevado al cuadrado es negativo, el monomio común es con signo negativo.

Solución de algunos ítems:

a) $-2x^2 + 10x - 8$
$= (-2)(x^2) + (-2)(-5x) + (-2)(4)$
$= -2(x^2 - 5x + 4)$
$= -2(x - 1)(x - 4)$

i) $3x^2z - 12y^2z$
$= (3z)(x^2) - (3z)(4y^2)$
$= 3z(x^2 - 4y^2)$
$= 3z(x + 2y)(x - 2y)$

Observación:
En i) no se utiliza el cambio de variable, este caso se estudiará en la siguiente clase.

Fecha: **U1 3.10**

Ⓟ Factoriza:

a) $2x^2 + 2x - 12$

$2x^2 + 2x - 12$

Ⓢ Extraer factor común 2.

$2x^2 + 2x - 12 = 2(x^2) + 2(x) - 2(6)$
$= 2(x^2 + x - 6)$

Factorizando en la forma $(x + a)(x + b)$
$= 2(x + 3)(x - 2)$

Por tanto:

$2x^2 + 2x + 12 = 2(x + 3)(x - 2).$

Ⓔ $-2x^2y + 8xy - 8y$

Extraer factor común $-2y$.

$-2x^2y + 8xy - 8y$
$= -2y(x^2) + (-2y)(-4x) + (-2y)(4)$
$= -2y(x^2 - 4x + 4)$
$= -2y(x - 2)^2$

Por tanto:

$-2x^2y + 8xy - 8y = -2y(x - 2)^2.$

Ⓡ a) $-2(x - 1)(x - 4)$
b) $2(x + 15)(x + 1)$
c) $3(x + 2)^2$

Tarea: página 27 del Cuaderno de Ejercicios.

3.11 Combinación de factorizaciones

P

Factoriza: $18x^2 - 200y^2$.

Debes extraer primero el factor común en cada caso.

S

Los coeficientes de x^2 y y^2 tienen factor común 2:

$$\begin{aligned} 18x^2 - 200y^2 &= 2(9x^2) - 2(100y^2) \\ &= 2(9x^2 - 100y^2) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $9x^2 = (3x)^2$, $100y^2=(10y)^2$

$$\begin{aligned} &= 2[(3x)^2 - (10y)^2] && \text{Tomando } 3x = w \text{ y } 10y = z, \\ &= 2(w^2 - z^2) && \text{factorizando,} \\ &= 2(w + z)(w - z) && \text{sustituyendo nuevamente,} \\ &=2(3x + 10y)(3x - 10y). \end{aligned}$$

$$18x^2 - 200y^2 = 2(3x + 10y)(3x - 10y).$$

C

En general, cuando se factoriza un polinomio cualquiera, lo primero es verificar si sus términos tienen un monomio común, de ser así se extrae este monomio y se factoriza el segundo factor. Si los términos del polinomio NO tienen un monomio común, entonces se factoriza el polinomio directamente por cualquiera de los métodos vistos en clases anteriores; este proceso se repite para cada uno de sus factores resultantes (si es posible) hasta dejar expresado el polinomio original como producto de polinomios más simples.

Recuerda que para verificar si has factorizado correctamente, puedes multiplicar todos los factores, y el resultado debe ser igual al polinomio original.

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $-18x^2y^2 + 32$
$= -2(3xy + 4)(3xy - 4)$

b) $3x^2z - 12y^2z$
$= 3z(x + 2y)(x - 2y)$

c) $18mn^2 + 6mn - 4m$
$= 2m(3n + 2)(3n - 1)$

d) $27m^2 - 75n^2$
$= 3(3m + 5n)(3m - 5n)$

e) $12zx^2 + 36zxy + 27zy^2$
$= (3z)(2x + 3y)^2$

f) $36mn^2 + 24mn + 4m$
$= 4m(3n + 1)^2$

30

Indicador de logro

3.11 Factoriza polinomios que impliquen combinaciones de los métodos vistos en clases anteriores.

Secuencia

Anteriormente se realizaron factorizaciones sucesivas, donde el primer paso fue extraer el factor común y luego realizar la factorización, en esta clase se estudian siempre factorizaciones sucesivas, con la diferencia de que para la segunda factorización se debe realizar un cambio de variable.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Factorizar la expresión haciendo uso de factorizaciones sucesivas, utilizando el factor común y posteriormente un cambio de variable.
Ⓒ Se establece en general, el proceso que se debe seguir para factorizar un polinomio. La indicación es: buscar siempre un factor común como primer paso y luego utilizar otra factorización, si la expresión no posee factor común se debe proceder a factorizar directamente.

Solución de algunos ítems:

c) $18mn^2 + 6mn - 4m$
$= 2m(9n^2 + 3n - 2)$

Tomando $3n = w$.
$= 2m(w^2 + w - 2)$
$= 2m(w + 2)(w - 1)$
$= 2m(3n + 2)(3n - 1)$

d) $27m^2 - 75n^2$
$= 3(9m^2 - 25n^2)$

Tomando $3m = w$ y $5n = z$.
$= 3(w^2 - z^2)$
$= 3(w + z)(w - z)$
$= 3(3m + 5n)(3m - 5n)$

e) $12zx^2 + 36zxy + 27zy^2$
$= 3z(4x^2 + 12xy + 9y^2)$

Tomando $2x = m$ y $3y = n$.
$= 3z(m^2 + 2mn + n^2)$
$= 3z(m + n)^2$
$= 3z(2x + 3y)^2$

Fecha:

U1 3.11

Ⓟ Factoriza: $18x^2 - 200y^2$

Ⓢ $18x^2 - 200y^2$
Extrayendo factor común 2
$18x^2 - 200y^2$
$= 2(9x^2) - 2(100y^2)$
$= 2(9x^2 - 100y^2)$
$= 2[(3x)^2 - (10y)^2]$ Tomando $3x = w$ y $10y = z$
$= 2(w^2 - z^2)$
$= 2(w + z)(w - z)$ Sustituyendo nuevamente
$= 2(3x + 10y)(3x - 10y)$
Por tanto:
$18x^2 - 200y^2 = 2(3x + 10y)(3x - 10y)$.

Ⓡ a) $-18x^2y^2 + 32$
$= -2(9x^2y^2 - 16)$
Tomando $3xy = w$
$-2(9x^2y^2 - 16)$
$= -2(w^2 - 4^2)$
$= -2(w + 4)(w - 4)$
$= -2(3xy + 4)(3xy - 4)$

b) $3z(x + 2y)(x - 2y)$
c) $2m(3n + 2)(3n - 1)$
d) $3(3m + 5n)(3m - 5n)$
e) $3z(2x + 3y)^2$

Tarea: página 28 del Cuaderno de Ejercicios.

3.12 Cálculo de operaciones aritméticas usando factorización

P

Utilizando factorización, encuentra el resultado de las siguientes operaciones:

a) $99^2 - 1$ b) $35^2 - 15^2$

S

a) La operación es una diferencia de cuadrados:

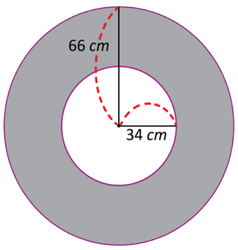
$$\begin{aligned} 99^2 - 1 &= (99 + 1)(99 - 1) \\ &= (100)(98) \\ 99^2 - 1 &= 9\,800 \end{aligned}$$

b) La operación también es una diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} 35^2 - 15^2 &= (35 + 15)(35 - 15) \\ &= (50)(20) \\ 35^2 - 15^2 &= 1\,000 \end{aligned}$$

E

Calcula el área de la región sombreada (deja expresado el resultado en términos de π).



Cuando dos circunferencias tienen el mismo centro se llaman **concéntricas**. La región delimitada por dos circunferencias concéntricas se llama **corona circular**.

Para calcular el área de la región sombreada debe restarse del área del círculo mayor, el área del círculo menor. El círculo mayor tiene radio 66 *cm*, y área:

$$\pi(66)^2 = 66^2\pi$$

El círculo menor tiene radio 34 *cm* y área:

$$\pi(34)^2 = 34^2\pi$$

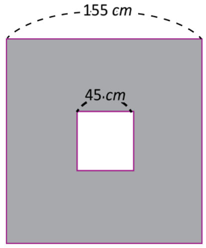
Entonces, el área de la región sombreada es:

$66^2\pi - 34^2\pi = (66^2 - 34^2)\pi$	Se extrae factor común π,
$= (66 + 34)(66 - 34)\pi$	se factoriza como diferencia de cuadrados,
$= (100)(32)\pi$	se calculan las operaciones en los paréntesis,
$66^2\pi - 34^2\pi = 3\,200\pi$	se deja expresado en términos de π.

Por lo tanto, el área de la región sombreada es $3\,200\pi$ cm^2.

1. Calcula el resultado de las siguientes operaciones utilizando factorización:
   a) $35^2 - 25^2$ $= 600$ b) $45^2 - 35^2$ $= 800$ c) $98^2 - 4$ $= 9\,600$

2. Calcula el área de la región sombreada (ambos cuadriláteros son cuadrados):



$= 22\,000$ cm^2

Indicador de logro

3.12 Calcula operaciones aritméticas y áreas de regiones utilizando factorización.

Secuencia

A lo largo de la lección se estudiaron distintas técnicas de factorización, ahora se utilizará el álgebra de las factorizaciones para simplificar los cálculos aritméticos en algunas operaciones.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resolver dos problemas del cálculo aritmético utilizando el álgebra aprendida en esta lección.
Ⓒ Ejemplificar el uso de la factorización en el cálculo de áreas, simplificando las operaciones aritméticas. El área de la parte sombreada es la del círculo más grande menos el área del círculo contenido, como el área del círculo es el cuadrado del radio, la factorización que se utiliza es la diferencia de cuadrados.

Solución de algunos ítems:

1. a) $35^2 - 25^2$
$= (35 + 25)(35 - 25)$
$= (60)(10)$
$= 600$

2. Como el área de la región sombreada es la diferencia de las áreas de los dos cuadrados, entonces se puede aplicar la diferencia de cuadrados para resolver.

$155^2 - 45^2$
$= (155 + 45)(155 - 45)$
$= 200 \times 110$
$= 22\,000$

Por lo tanto, el área de la región sombreada es $22\,000$ cm^2.

Fecha:

U1 3.12

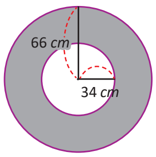
Ⓟ Encuentra el resultado de las siguientes operaciones. Utiliza la factorización.

a) $99^2 - 1$ b) $35^2 - 15^2$

Ⓢ a) $99^2 - 1$
$= 99^2 - 1^2$
$= (99 + 1)(99 - 1)$
$= (100)(98)$
$= 9\,800$

b) $35^2 - 15^2$
$= 35^2 - 15^2$
$= (35 + 15)(35 - 15)$
$= (50)(20)$
$= 1\,000$

Ⓔ Calcula el área de la región sombreada.



$66^2\pi - 34^2\pi$
$= (66^2 - 34^2)\pi$
$= (66 + 34)(66 - 34)\pi$
$= (100)(32)\pi$
$= 3\,200\pi$

Por tanto:
El área es: $3\,200\pi$ cm^2

Ⓡ 1. a) 600 b) 800 c) 9 600

2. 22 000 cm2.

Tarea: página 29 del Cuaderno de Ejercicios.

3.13 Practica lo aprendido

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3x^2 + 24x - 60$ $= 3(x + 10)(x - 2)$

b) $-4y^2 - 16y - 12$ $= -4(y + 3)(y + 1)$

c) $5x^2 - \frac{5}{4}$ $= 5\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

d) $36x^2 - 60xy + 25y^2$ $= (6x - 5y)^2$

e) $4x^2 + 2xy + \frac{y^2}{4}$ $= \left(2x + \frac{y}{2}\right)^2$

f) $64x^2 - 49y^2$ $= (8x + 7y)(8x - 7y)$

g) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}$ $= \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{5}\right)$

h) $(2x + 9)^2 - (3x - 2)^2$ $= -(5x + 7)(x - 11)$

i) $4x^2z - 16xyz + 16y^2z$ $= 4z(x - 2y)^2$

j) $5xy^2 + 105xy + 550x$ $= 5x(y + 11)(y + 10)$

2. Utilizando factorización, calcula el resultado de las siguientes operaciones:

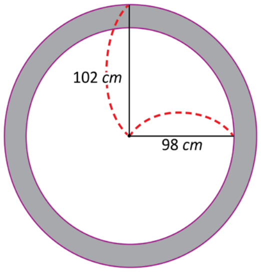
a) $75^2 - 25^2$ $= 5\,000$

b) $95^2 - 25$ $= 9\,000$

c) 101^2 $= 10\,201$

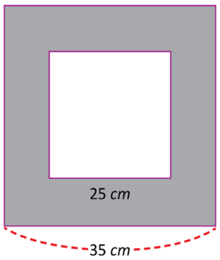
d) 47×53 $= 2\,491$

3. Calcula el área de la región sombreada:



$= 800\pi \text{ cm}^2$

4. Calcula el área de la región sombreada:



$= 600 \text{ cm}^2$

32

Indicador de logro

3.13 Resuelve problemas utilizando factorizaciones sucesivas.

Solución de algunos ítems:

1. a) $3x^2 + 24x - 60$
$= 3(x^2 + 8x - 20)$
$= 3(x + 10)(x - 2)$

d) $36x^2 - 60xy + 25y^2$
Sea $w = 6x$ y $z = 5y$
$= w^2 - 2wz + z^2$
$= (w - z)^2$
$= (6x - 5y)^2$

h) $(2x + 9)^2 - (3x - 2)^2$
Sea $w = 2x + 9$ y $z = 3x - 2$
$= w^2 - z^2$
$= (w + z)(w - z)$
$= (2x + 9 + 3x - 2)(2x + 9 - 3x + 2)$
$= (5x + 7)(-x + 11)$
$= -(5x + 7)(x - 11)$

2. c) 101^2
$101^2 = (100 + 1)^2$
$= 100^2 + 2(100)(1) + 1^2$
$= 10\,000 + 201 + 1$
$= 10\,201$

3. $102^2\pi - 98^2\pi$
$102^2\pi - 98^2\pi$
$= (102^2 - 98^2)\pi$
$= (102 + 98)(102 - 98)\pi$
$= 200 \times 4\pi$
$= 800\pi \text{ cm}^2$

Tarea: página 30 del Cuaderno de Ejercicios.

Unidad 2. Raíz cuadrada

Competencia de la Unidad

Conocer el sentido, representación y definición de raíces cuadradas, realizando operaciones algorítmicas y de simplificación para poder enfrentarse a futuros problemas matemáticos y del entorno.

Relación y desarrollo

Séptimo grado

Unidad 1: Números positivos, negativos y el cero
- Números positivos, negativos y el cero
- Orden y valor absoluto de los números

Unidad 2: Suma y resta de números positivos, negativos y el cero
- Suma de números positivos, negativos y el cero
- Resta de números positivos, negativos y el cero
- Sumas y restas combinadas de números positivos, negativos y el cero

Unidad 3: Multiplicación y división de números positivos, negativos y el cero
- Multiplicación y división de números positivos, negativos y el cero
- Operaciones combinadas
- Números primos y compuestos

Noveno grado

Unidad 2: Raíz cuadrada
- Raíz cuadrada y números reales
- Operaciones con raíces cuadradas

Unidad 3: Ecuación cuadrática
- Ecuación cuadrática
- Aplicaciones de la ecuación cuadrática

Primer año de bachillerato

Unidad 1: Números reales
- Números reales

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Raíz cuadrada y números reales	1	1. Sentido y símbolo de la raíz cuadrada
	1	2. Representación de números con el símbolo de raíz cuadrada
	1	3. Raíces cuadradas de un número
	1	4. Orden de las raíces cuadradas
	1	5. Números racionales e irracionales
	1	6. Conversión de números decimales a fracción
	1	7. Definición de los números reales
	2	8. Practica lo aprendido
2. Operaciones con raíces cuadradas	1	1. Multiplicación de raíces cuadradas
	1	2. División de raíces cuadradas
	1	3. Expresión de números sin el símbolo de radical
	1	4. Multiplicación de un número racional con una raíz cuadrada
	1	5. Simplificación de raíces cuadradas inexactas
	1	6. Multiplicación de raíces cuadradas utilizando simplificación
	1	7. Racionalización de denominadores
	1	8. Suma y resta de raíces cuadradas
	1	9. Suma y resta de raíces cuadradas utilizando simplificación y racionalización
	1	10. Operaciones combinadas de raíces cuadradas

Lección	Horas	Clases
	1	11. Operaciones combinadas de raíces cuadradas
	2	12. Practica lo aprendido
	1	13. Resolución de problemas con números reales
	1	14. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 2

24 horas clase + prueba de la Unidad 2

Puntos esenciales de cada lección

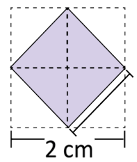
Lección 1: Raíz cuadrada y números reales
En esta lección es importante hacer la diferencia entre el concepto de raíz cuadrada de un número y las raíces cuadradas de un número, en donde esencialmente se debe analizar la raíz cuadrada como la representación de números irracionales y las raíces cuadradas como solución de una ecuación cuadrática. Además, en este momento se introducirá la definición de números reales, la cual será básica para el desarrollo de temáticas sobre funciones, teorema de Pitágoras, entre otros.

Lección 2: Operaciones con raíces cuadradas
Determinar la forma de realizar las operaciones básicas con raíces cuadradas, comenzando por la multiplicación, división, suma y resta. Además se introducen los conceptos de simplificación de raíces cuadradas (utilizando la descomposición en factores primos) y racionalización de denominadores.

1.1 Sentido y símbolo de la raíz cuadrada

P

La siguiente figura está formada por 4 cuadrados de 1 cm de lado, y se forma el cuadrado interior como se muestra en la figura:



Piensa un número que al elevar al cuadrado da 2

El área del cuadrado se calcula: $A = L^2$

¿Cuánto mide el área y el lado del cuadrado formado en el interior?

S

El área del cuadrado está formada por la mitad del área de cada cuadrado de 1 cm, entonces el área del cuadrado interior es **2 cm²**.

Probando si existe algún número conocido que al elevar al cuadrado dé como resultado 2.

Probando para 1:	$1^2 = 1 < 2$	Probando para 2:	$2^2 = 4 > 2$	El valor está entre 1 y 2.
Probando para 1.4:	$1.4^2 = 1.96 < 2$	Probando para 1.5:	$1.5^2 = 2.25 > 2$	El valor está entre 1.4 y 1.5.
Probando para 1.41:	$1.41^2 = 1.9881 < 2$	Probando para 1.42:	$1.42^2 = 2.0164 > 2$	El valor está entre 1.41 y 1.42.
Probando para 1.414:	$1.414^2 = 1.9993 < 2$	Probando para 1.415:	$1.415^2 = 2.002 > 2$	El valor está entre 1.414 y 1.425.

Finalmente no es posible escribir un número decimal que al elevarlo al cuadrado resulte 2.

Entonces, por convención, el lado del cuadrado con área 2 será representado por **$\sqrt{2}$ cm.**

C

El símbolo $\sqrt{}$ representa un número **no negativo** que al elevarlo al cuadrado da como resultado el número que está dentro del símbolo.

Se denota con el símbolo $\sqrt{}$ que se llama **radical** y se lee "raíz cuadrada". El número dentro del radical se llama **radicando**.

Radical $\longrightarrow \sqrt{a} \longleftarrow$ Radicando

Por ejemplo: $\sqrt{3}$ se lee "raíz cuadrada de tres" y representa un número que al elevarlo al cuadrado da como resultado 3.

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

Se observa que no es posible escribir un número decimal que al elevarlo al cuadrado resulte 3.

E

¿Qué número está siendo representado al elevar al cuadrado la siguiente expresión?

$\sqrt{\frac{2}{5}}$ Al elevar al cuadrado $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$ representa el número $\frac{2}{5}$. Por tanto:

$$\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{2}{5}$$

1. Determina cuánto miden los lados de los siguientes cuadrados:

a) 5 cm² — $\sqrt{5}$ cm

b) 3 cm² — $\sqrt{3}$ cm

c) $\frac{2}{3}$ cm² — $\frac{2}{3}$ cm

d) 2.3 cm² — $\sqrt{2.3}$ cm

2. Determina qué número está siendo representado al elevar al cuadrado las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{13}$ c) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ d) $\sqrt{0.2}$

Representa un número positivo que cumple:

$\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$ $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$ $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$ $\left(\sqrt{0.2}\right)^2 = 0.2$

Indicador de logro

1.1 Utiliza el símbolo de radical para representar un número.

Secuencia

Los estudiantes hasta esta clase han trabajado en el conjunto de los números racionales sin que se defina formalmente este conjunto. Para esta clase se aprovechará el conocimiento del área del cuadrado para introducir la idea de números decimales infinitos no periódicos (irracionales).

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar desigualdades para realizar aproximaciones del valor del lado de un cuadrado cuya área es 2 y determinar que es imposible expresarlo como número decimal. Utilizar la figura para mostrar que los números irracionales existen y observar que el área del cuadrado morado es menor que el área del cuadrado punteado de lado 2 y mayor que el área de un cuadrado de lado 1. Para ver que el área del cuadrado morado es 2, utilizar que la figura está formada por la mitad de cada cuadrado pequeño que forma el cuadrado de área 4.

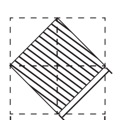
Ⓒ Establecer lo que simboliza un **radical**, haciendo énfasis en que es la única forma de representar algunos números de manera exacta (con decimales solo se puede hacer aproximaciones a estos números). Además, hay que definir la forma en que se expresan estos números, y cómo se llama cada parte (radical y radicando) que se utilizará cuando se establezcan los algoritmos para operar números expresados con radical.

Ⓔ Enfatizar que el símbolo $\sqrt{}$ no representa un número negativo, por ejemplo: $\sqrt{4} = \pm 2$ es un error, es decir, $\sqrt{x^2} = x$ es un error si $x < 0$. Además si se cumple que $x^2 = a$, no necesariamente $x = \sqrt{a}$, también puede ser $x = -\sqrt{a}$.

Posibles dificultades:
Ver que el área del cuadrado morado es 2; hacer un procedimiento de prueba y error para determinar que siempre es posible encontrar otro decimal y que no hay un patrón para determinar un número específico.

Fecha: **U2 1.1**

Ⓟ Determina el área y el lado del cuadrado sombreado.



Ⓢ El área del cuadrado sombreado es 2 cm^2.

$1^2 < 2 < 2^2$	El lado está entre 1 y 2.
$1.4^2 < 2 < 1.5^2$	El lado está entre 1.4 y 1.5
$1.41^2 < 2 < 1.42^2$	El lado está entre 1.41 y 1.42
$1.414^2 < 2 < 1.415^2$	El lado está entre 1.414 y 1.415

No es posible representar el número como decimal, se expresará por $\sqrt{2}$ cm.

Ⓔ ¿Qué número representa $\sqrt{\frac{2}{5}}$ al elevarlo al cuadrado?

Representa un número positivo que cumple:

$$\left(\sqrt{\tfrac{2}{5}}\right)^2 = \frac{2}{5}$$

Ⓡ 1. a) $\sqrt{5}$ cm b) $\sqrt{3}$ cm c) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm d) $\sqrt{2.3}$ cm

2. Representa un número positivo que cumple:
   a) $(\sqrt{7})^2 = 7$ b) $(\sqrt{13})^2 = 13$
   c) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$ d) $(\sqrt{0.2})^2 = 0.2$

Tarea: página 34 del Cuaderno de Ejercicios.

1.2 Representación de números con el símbolo de raíz cuadrada

P

¿Cuánto miden los lados de un cuadrado cuya área es 9 cm^2?

$A = 9\ cm^2$ ¿Cuánto mide?

S

Denotando la medida del lado del cuadrado con notación de raíz cuadrada: $\sqrt{9}$ cm
Lo cuál significa que $\left(\sqrt{9}\right)^2 = 9$.

Probando si existe algún número conocido que al elevar al cuadrado dé como resultado 9.

Probando para 2, $2^2 = 4 < 9$.

Probando para 3, $3^2 = 9$. Entonces, el número representado por $\sqrt{9}$ es 3.

Por lo tanto $\sqrt{9} = 3$.

Y el lado del cuadrado mide: **3 cm**.

C

Dentro de los números representados con el símbolo de radical, hay números que se pueden representar sin usar este símbolo. A estos números se les conoce como **raíces exactas**.

Por ejemplo: $\sqrt{25}$ Representa un número que al elevarlo al cuadrado da como resultado 25.

$$\left(\sqrt{25}\right)^2 = 25$$

Y el número representado por $\sqrt{25}$ es 5 porque: $5^2 = 25$.

Por lo tanto $\sqrt{25} = 5$.

Si $a > 0$,
se cumple que
$\sqrt{a^2} = a$

E

Expresa los siguientes números sin el símbolo de radical.

a) $\sqrt{\frac{4}{9}}$

Probando para $\frac{1}{3}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Probando para $\frac{2}{3}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

Por lo tanto, $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, es raíz exacta.

b) $\sqrt{0.16}$

Probando para 0.3: $(0.3)^2 = 0.09$.

Probando para 0.4: $(0.4)^2 = 0.16$.

Por lo tanto, $\sqrt{0.16} = 0.4$, es raíz exacta.

1. Determina cuánto miden los lados de los siguientes cuadrados:

a) $1\ cm^2$ $\sqrt{1} = 1cm$

b) $4\ cm^2$ $\sqrt{4} = 2\,cm$

c) $\frac{9}{16}\ cm^2$ $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}\ cm$

d) $0.49\ cm^2$ $\sqrt{0.49} = 0.7\ cm$

2. Expresa los siguientes números sin el símbolo de radical:

a) $\sqrt{36}$ 6

b) $\sqrt{81}$ 9

c) $\sqrt{\frac{1}{25}}$ $\frac{1}{5}$

d) $\sqrt{0.01}$ 0.1

Indicador de logro

1.2 Determina números que son raíces exactas.

Secuencia

Para la clase anterior se introdujo la representación de números con radical, cuando no existe otra manera de representarlos (irracionales), ahora se verá que también se pueden expresar números racionales con el símbolo de radical.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Mostrar que el símbolo $\sqrt{}$ se aplica a cualquier número no negativo. Utilizar el área del cuadrado para determinar el valor del lado, con la particularidad de que ahora se puede representar este valor por $\sqrt{9}$; y por otro lado, utilizando la estrategia de prueba y error, verificar que existe un valor natural (en este caso 3) que también cumple la condición; luego, a partir de ello, que los estudiantes deduzcan que $\sqrt{9} = 3$.

ⒸEstablecer que el símbolo de radical se puede utilizar para representar números racionales (después se extenderá para representar números negativos), a los cuales se les llamará **raíces exactas**.

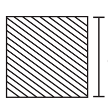
Ⓔ Enfatizar en la representación de números racionales como un radical, y consolidar la conclusión en los estudiantes. El primer ítem tiene correspondencia con la forma de representar cantidades racionales con símbolo radical.

Posibles dificultades:
Determinar la raíz cuadrada exacta de los números decimales y fraccionarios.

Fecha:

U2 1.2

Ⓟ Determina el lado de un cuadrado de área 9 cm^2.



Ⓢ Utilizando la notación de radical de la clase anterior el lado del cuadrado es $\sqrt{9}$ cm.

Además, probando para 2: $2^2 = 4 < 9$.

Y probando para 3: $3^2 = 9$.

Por lo tanto $\sqrt{9} = 3$, y el lado del cuadrado es 3 cm^2.

Ⓔ Expresa los siguientes números sin el símbolo de radical:

a) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ b) $\sqrt{0.16} = 0.4$

Ⓡ 1. a) $\sqrt{1} = 1$ cm b) $\sqrt{4} = 2$ cm

c) $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ cm d) $\sqrt{0.49} = 0.7$ cm

2. a) 6 b) 9 c) $\frac{1}{5}$ d) 0.1

Tarea: página 35 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Raíces cuadradas de un número

P

Determina qué números elevados al cuadrado dan como resultado 9.

S

Se busca el número que al elevar al cuadrado da como resultado 9.

Sea a ese número.
El número a cumple la ecuación $a^2 = 9$.
Las soluciones son $a = 3$ y $a = -3$.

Los únicos números que al elevarlos al cuadrado resultan 9 son: 3 y –3.

C

Se definen las **raíces cuadradas** de un número $\boldsymbol{a}$ positivo como los números que al elevarlos al cuadrado resultan $\boldsymbol{a}$.

Entonces un número $\boldsymbol{b}$ es raíz cuadrada de $\boldsymbol{a}$ si se cumple que: $b^2 = a$.

Los números que cumplen esta igualdad son b y $-b$: $(-b)^2 = b^2 = a$.

Y se dirá que las raíces cuadradas de $\boldsymbol{a}$ son $\boldsymbol{b}$ y $-\boldsymbol{b}$.

Observa que,
el único número que tiene una sola raíz cuadrada es cero, porque:
Solamente $0^2 = 0$.

Por ejemplo: Las raíces cuadradas de 9 son:

$$3 \text{ y } -3 \text{ pues } (-3)^2 = 9 \text{ y } 3^2 = 9.$$

Para denotar tanto la raíz cuadrada positiva como negativa, se utilizará el signo ± que se lee **más menos**:

Las raíces cuadradas de 9 son: ± 3.

A la raíz cuadrada con signo positivo se le conoce como **raíz cuadrada** y se denota $\sqrt{\boldsymbol{a}}$. Por ejemplo:

$$\sqrt{9}, \sqrt{\frac{25}{4}}, \sqrt{5}, \text{ etc.}$$

A la raíz cuadrada con signo negativo se le conoce como **raíz cuadrada negativa** y es el número opuesto de $\sqrt{\boldsymbol{a}}$, es decir, $-\sqrt{\boldsymbol{a}}$. Por ejemplo:

$$-\sqrt{9}, -\sqrt{\frac{25}{4}}, -\sqrt{5}, \text{ etc.}$$

En general, para un número $\boldsymbol{a}$ positivo se cumple que

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

$$\left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$$

$$\begin{array}{c} \sqrt{a} \\ -\sqrt{a} \end{array} \; \underset{\text{Sacar raíces cuadradas}}{\overset{\text{Elevar al cuadrado}}{\rightleftarrows}} \; a$$

Observa:

$3 = \sqrt{9}$ $\xrightarrow{\text{Elevar al cuadrado}}$ 9

$-3 = -\sqrt{9}$ $\xleftarrow{\text{Sacar raíces cuadradas}}$ 9

Si a es cualquier número real se cumple que $\sqrt{a^2} = |a|$.
Por ejemplo: $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

El símbolo | | denota el valor absoluto de un número.

E

Determina las raíces cuadradas de los siguientes números:

a) $\frac{25}{4}$ Determinando los números: $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ y $-\sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{5}{2}$.

Y las raíces cuadradas son: $\pm\frac{5}{2}$.

b) 5 Determinando los números: $\left.\begin{array}{r}\sqrt{5}\\ -\sqrt{5}\end{array}\right\}$ No se pueden expresar sin el símbolo de radical.

Y las raíces cuadradas son: $\pm\sqrt{5}$.

1. Determina qué números elevados al cuadrado dan como resultado:

a) 144 ±12

b) 169 ±13

c) 225 ±15

d) 121 ±11

e) $\frac{4}{9}$ $\pm\frac{2}{3}$

f) $\frac{41}{36}$ $\pm\frac{\sqrt{41}}{6}$

2. Determina las raíces cuadradas de los siguientes números.

a) 25 $\pm\sqrt{25} = \pm 5$

b) 49 $\pm\sqrt{49} = \pm 7$

c) $\frac{9}{36}$ $\pm\sqrt{\frac{9}{36}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$

d) 10 $\pm\sqrt{10}$

e) 13 $\pm\sqrt{13}$

f) 0.04 $\pm\sqrt{0.04} = \pm 0.2$

Indicador de logro

1.3 Determina las raíces cuadradas de un número.

Secuencia

Los estudiantes ya conocen el símbolo de radical y lo que representa, a partir de esto ahora ya se puede definir formalmente el concepto de las **raíces cuadradas de un número**, para posteriormente trabajar un poco algunas propiedades y operaciones con raíces cuadradas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar, a partir de lo que los estudiantes saben sobre potencia (de séptimo grado), las raíces cuadradas de un número, considerando en este caso también los números negativos.
Ⓒ Definir de manera formal el concepto de raíces cuadradas de un número, en este punto se pretende que el estudiante tenga claro que existen dos números (de diferente signo) y que al elevarlos al cuadrado dan como resultado el mismo número. Se considera el caso de cero como un caso especial. Esta clase es fundamental para el abordaje de la resolución de ecuaciones cuadráticas de la Unidad 3 de este grado.

Uso adecuado del lenguaje matemático.
Esta clase pretende que el estudiante use y exprese el lenguaje matemático con propiedad, de modo que no cometa el error común de hablar de la raíz cuadrada de un número obviando por completo la existencia de la raíz cuadrada negativa de dicho número. Además se hace referencia a otro error común del concepto de raíz cuadrada, correspondiente al hecho de que $\sqrt{a^2} = |a|$.

En este sentido, se enfatiza el hecho de que $\sqrt{x^2} = x$ es un error cuando $x < 0$. Es decir, el símbolo $\sqrt{\ }$ no es para eliminar el exponente cuadrado (potencia 2).

Fecha: **U2 1.3**

Ⓟ Determina qué números elevados al cuadrado dan como resultado 9.

Ⓢ Sea a ese número.
Se cumple que $a^2 = 9$.

Los únicos valores que al elevarlos al cuadrado dan 9 son 3 y –3.

Ⓔ Determina las raíces cuadradas de los siguientes números:

a) $\frac{25}{4}$

$\pm\sqrt{\frac{25}{4}} = \pm\frac{5}{2}$

b) 5

$\pm\sqrt{5}$

Ⓡ 1. a) ± 5 b) ± 7 c) $\pm\frac{1}{2}$
d) $\pm\sqrt{10}$ e) $\pm\sqrt{13}$ f) ± 0.2

2. a) ± 12 b) ± 13 c) ± 15
d) ± 11 e) $\pm\frac{2}{3}$ f) $\pm\frac{\sqrt{41}}{6}$

Tarea: página 36 del Cuaderno de Ejercicios.

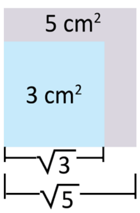
1.4 Orden de las raíces cuadradas

P

Se tienen 2 cuadrados de diferente área, uno de 3 cm^2 y otro de 5 cm^2.
¿Qué cuadrado tiene lados de mayor longitud?

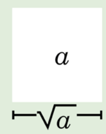
S

Para analizar los lados de ambos cuadrados se puede colocar de la siguiente manera:



Y al colocar los cuadrados de esta manera se puede notar que el lado del cuadrado de 3 cm^2 de área es menor que el lado del cuadrado de 5 cm^2 de área.

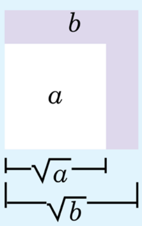
El lado de un cuadrado de área "a" es: $\sqrt{a}$.



Entonces, como $3 < 5$ se cumple que $\sqrt{3} < \sqrt{5}$.

C

En general si el radicando de una raíz cuadrada es menor que el radicando de otra, entonces la primera raíz cuadrada es menor que la segunda, así:



Para $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} > \mathbf{0}$, si $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

Por ejemplo:

¿Qué número es mayor $\sqrt{12}$ o $\sqrt{11}$?

Como $11 < 12$ entonces $\sqrt{11} < \sqrt{12}$.

Observa que el radicando hace referencia al área de un cuadrado y la raíz a la longitud del lado del mismo cuadrado.

E

Al comparar números negativos el que tiene mayor valor absoluto es el menor.

Determina el orden de los siguientes números:

a) 3 y $\sqrt{7}$

Dado que 3 se puede expresar como $\sqrt{9}$.

Y comparando $\sqrt{9}$ y $\sqrt{7}$:

$9 > 7$ entonces $\sqrt{9} > \sqrt{7}$.

Por lo tanto: $3 > \sqrt{7}$.

b) $-\sqrt{15}$ y $-\sqrt{\frac{17}{2}}$

Comparando $\sqrt{15}$ y $\sqrt{\frac{17}{2}}$:

$\frac{17}{2} < 15$ entonces $\sqrt{\frac{17}{2}} < \sqrt{15}$.

Por lo tanto, al ser negativos se cumple que

$$-\sqrt{\frac{17}{2}} > -\sqrt{15}.$$

1. Escribe el símbolo <, >, o = según corresponda.

a) $\sqrt{7}$ $\boxed{>}$ $\sqrt{6}$ b) 2 $\boxed{>}$ $\sqrt{3}$ c) 0.7 $\boxed{<}$ $\sqrt{0.7}$

d) $-\sqrt{14}$ $\boxed{<}$ $-\sqrt{13}$ e) $-\sqrt{\frac{2}{7}}$ $\boxed{<}$ $-\frac{2}{7}$ f) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\boxed{=}$ $\sqrt{0.5}$

En c), e) y f) ten cuidado, al elevar al cuadrado observa cuál es mayor.

2. Ordena los siguientes números de menor a mayor.

a) $\sqrt{10}$ b) -5 c) 10 d) $-\sqrt{15}$ e) $\sqrt{\frac{100}{4}}$ f) $-\sqrt{1.5}$

$$-5 < -\sqrt{15} < -\sqrt{1.5} < \sqrt{10} < \sqrt{\frac{100}{4}} < 10$$

Indicador de logro

1.4 Utiliza el orden de las raíces cuadradas para comparar números.

Secuencia

Retomando la idea de las áreas que se ha venido trabajando para introducir el concepto de raíces cuadradas, ahora se utilizará la comparación de áreas para determinar el orden de números expresados con el símbolo de radical, es decir, si el cuadrado de un número es más grande que el cuadrado de otro número, entonces el primer número es más grande que el segundo.

Propósito

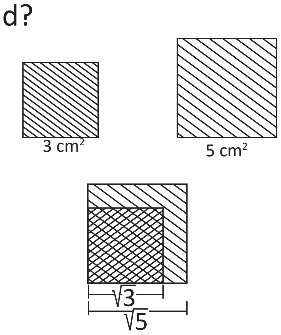
Ⓟ, Ⓢ Distinguir que el cuadrado que cubre mayor área, tiene mayor lado; esto con el fin de deducir una manera de comparar raíces a partir del cuadrado del número.
Ⓒ Determinar un algoritmo para ordenar raíces cuadradas; se puede retomar el hecho de comparar el radicando, o bien comparar los cuadrados de los números, teniendo cuidado del signo que poseen estos.

Resolver algunos casos de comparación de raíces cuadradas en los que un número no está expresado con radical, comparar el radicando es equivalente a comparar el cuadrado de los números que se desea ordenar; y también comparar raíces cuadradas negativas.

Posibles dificultades:
Comparar un número con radical con otro sin radical; confundirse con el orden de números negativos, en este caso la regla funciona al revés; confundirse con los casos entre 0 y 1 o entre –1 y 0.

Fecha: **U2 1.4**

Ⓟ ¿Qué cuadrado tiene lados de mayor longitud?



Ⓢ Como $3 < 5$, se cumple que $\sqrt{3} < \sqrt{5}$.

Ⓔ Determina el orden de los números:

a) 3 y $\sqrt{7}$
$9 > 7$, entonces
$3 > \sqrt{7}$

b) $-\sqrt{15}$ y $-\sqrt{\frac{17}{2}}$
$15 > \frac{17}{2}$, entonces
$\sqrt{15} > \sqrt{\frac{17}{2}}$ Por lo tanto
$-\sqrt{15} < -\sqrt{\frac{17}{2}}$

Ⓡ 1. a) $7 > 6$ entonces $\sqrt{7} > \sqrt{6}$
b) $2 > \sqrt{3}$ c) $0.7 < \sqrt{0.7}$
d) $-\sqrt{14} < -\sqrt{13}$ e) $-\sqrt{\frac{2}{7}} < -\frac{2}{7}$

2. Ordenando primero los positivos y luego los negativos: $-5 < -\sqrt{15} < -\sqrt{1.5} < \sqrt{10} < \sqrt{\frac{100}{4}} < 10$

Tarea: página 37 del Cuaderno de Ejercicios.

1.5 Números racionales e irracionales

P

Representa los siguientes números como fracciones:

a) 7 b) 0.25 c) −2.3

S

a) 7

$7 = \frac{7}{1}$

Toda división entre uno da como resultado el mismo número

b) 0.25

$0.25 \times \frac{100}{100} = \frac{25}{100}$ Multiplicando por 1

$= \frac{1}{4}$ Simplificando

c) −2.3

$-2.3 \times \frac{10}{10} = -\frac{23}{10}$

En b) y c) se busca un número que haga desaparecer las cifras decimales. En ambos casos, se ha multiplicado por 1, por lo que el valor de los números es el mismo.

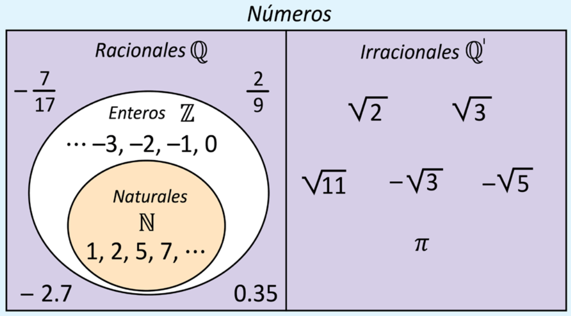
C

Los números que pueden representarse como una fracción, es decir, de la forma $\frac{a}{b}$ con a y b números enteros y $b \neq 0$ se llaman **números racionales**, se representan (denotan) por: $\mathbb{Q}$.

En el problema anterior, todos los números podían representarse como fracción, por lo que todos ellos son números racionales.

Los números que no pueden ser expresados de la forma $\frac{a}{b}$, se llaman **números irracionales** y se representan (denotan) por: $\mathbb{Q}'$. Por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π.

Números



1. Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales, según sea el caso.

a) 8 — $\frac{8}{1}$ es racional.

b) −0.09 — $-\frac{9}{100}$ es racional.

c) $-\sqrt{11}$ — $-\sqrt{11}$ es irracional.

d) $-\pi$ — $-\pi$ es irracional.

2. Representa los siguientes números como fracciones:

a) 2 $\frac{2}{1}$ b) 0.35 $\frac{7}{20}$ c) −6 $-\frac{6}{1}$ d) −1.5 $-\frac{3}{2}$

3. Escribe las siguientes fracciones como números decimales, realizando la división.

a) $\frac{3}{5}$ 0.6 b) $\frac{5}{8}$ 0.625 c) $\frac{5}{11}$ 0.4545... d) $\frac{4}{3}$ 1.3333...

Observa lo que sucede con el resultado en los literales c) y d) del numeral 1.

Indicador de logro

1.5 Clasifica números como racionales o irracionales.

Secuencia

Ahora que ya se ha introducido la existencia de números diferentes a los que los estudiantes han trabajado antes de esta unidad, se clasificarán y definirán formalmente los conjuntos de los números racionales (vistos desde séptimo grado) y el conjunto de los números irracionales (raíces cuadradas inexactas).

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Transformar algunos números decimales a fracción, para introducir la expresión de números en la forma $\frac{a}{b}$; para ello se utilizan los presaberes de quinto grado en donde se estudia la forma de transformar números decimales a fracción, multiplicando por potencias de 10 (en este grado solo se estudian decimales finitos).

Ⓒ Definir formalmente el conjunto de los números racionales e irracionales a partir de la introducción del Problema inicial. No es necesario dar todos los tipos de números racionales, pues en la clase siguiente se verán los decimales periódicos, tampoco es necesario ver todos los tipos de números irracionales, pues en este grado solo se abordarán las raíces cuadradas y π.

Utilizar las definiciones de números racionales e irracionales para clasificar números, representar números en la forma $\frac{a}{b}$ y expresar números en la forma $\frac{a}{b}$ como decimales.

Fecha: **U2 1.5**

Ⓟ Representa los siguientes números como fracciones.

a) 7 b) 0.25 c) –2.3

Ⓢ a) $7 = \frac{7}{1}$

b) $0.25 = 0.25 \times \frac{100}{100}$

$= \frac{25}{100}$

$= \frac{1}{4}$

c) $-2.3 = -\frac{23}{10}$

Ⓡ

1. a) $\frac{8}{1}$ es racional. b) $-\frac{9}{100}$ es racional.
   c) $-\sqrt{11}$ es irracional. d) $-\pi$ es irracional.

2. a) $\frac{2}{1}$ b) $\frac{7}{20}$ c) $-\frac{6}{1}$ d) $-\frac{3}{2}$

3. a) 0.6 b) 0.625 c) 0.4545... d) 1.333...

Tarea: página 38 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.6 Conversión de números decimales a fracción

P

Representa los siguientes números como una fracción.

a) 1.333333...   b) 0.262626...

Los tres puntos al final significan que la parte decimal repite el mismo patrón infinitamente.

S

Considerando x = 1.333333...
Analizando la diferencia entre $10x$ y x:

$$\begin{array}{rr} & 10x = 13.3333...\\ - & x = \ \ 1.3333...\\ \hline & 9x = 12.0000...\end{array}$$

Despejando x: $x = \dfrac{\overset{4}{\cancel{12}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \dfrac{4}{3}$.

Por lo tanto, $x = 1.333333 = \dfrac{4}{3}$.

Considerando x = 0.26262626...
Analizando la diferencia entre $100x$ y x:

$$\begin{array}{rr} & 100x = 26.262626...\\ - & x = \ \ 0.262626...\\ \hline & 99x = 26.000000...\end{array}$$

Entonces: $x = \dfrac{26}{99}$.

Por lo tanto:

$0.26262626 = \dfrac{26}{99}$.

Al multiplicar un número decimal por 10, 100, 1 000,... el punto decimal se desplaza a la derecha 1, 2, 3,... espacios respectivamente.

Al restar 13.333... con 1.333 y 26.2626... con 0.2626... se elimina la parte infinita periódica.

C

Los números decimales cuya parte decimal tiene un número de cifras, que se repiten infinitamente se conocen como **números decimales periódicos.** Para representar este tipo de números se utilizará una barra sobre el período (cifras que se repiten) del número. Así $1.873535... = 1.87\overline{35}$.

Para convertir un número de período 1 o 2 a fracción:

1. Se representa el número con x y se calcula $10x$ (o $100x$).
2. Se resta $10x$ (o $100x$) con x para eliminar la parte periódica.
3. Se despeja x y se simplifica la fracción que representa el número decimal periódico.

Por ejemplo: $2.\overline{15}$

1. $x = 2.\overline{15}$ $100x = 215.\overline{15}$ Período 2
2. $$\begin{array}{rr} & 100x = 215.1515...\\ - & x = \ \ 2.1515...\\ \hline & 99x = 213.0000...\end{array}$$
3. $x = \dfrac{\overset{71}{\cancel{213}}}{\underset{33}{\cancel{99}}} = \dfrac{71}{33}$

Todos los números racionales se representan como decimales o decimales periódicos.

1. Clasifica los siguientes números decimales como periódicos y no periódicos.

a) 3.141592 No periódico   b) 1.452727... Periódico   c) 14.7777... Periódico

d) 2.7272... Periódico   e) 0.873521 No periódico   f) 1.8555... Periódico

2. Expresa los siguientes números decimales periódicos como fracción.

a) $0.\overline{4}$ $\dfrac{4}{9}$ b) $0.\overline{17}$ $\dfrac{17}{99}$ c) $3.\overline{5}$ $\dfrac{32}{9}$

d) $1.\overline{25}$ $\dfrac{124}{99}$ e) $0.\overline{741}$ $\dfrac{247}{333}$ f) $4.\overline{217}$ $\dfrac{4213}{999}$

Indicador de logro

1.6 Convierte números decimales periódicos a fracción.

Secuencia

En la clase anterior se definieron los conjuntos numéricos de los números racionales e irracionales, ahora se trabajará con números decimales periódicos para expresarlos en la forma $\frac{a}{b}$ y determinar que también son números racionales.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Determinar un método para expresar números decimales periódicos en la forma $\frac{a}{b}$, para esta clase puede ser necesaria una mayor intervención del docente.

Ⓒ Establecer un algoritmo para expresar números decimales periódicos en la forma $\frac{a}{b}$.

Solución de algunos ítems:

$x = 0.\overline{4}$ $\quad 10x = 4.\overline{4}$
Entonces, $10x - x = 4.\overline{4} - 0.\overline{4}$
$9x = 4$
$x = \frac{4}{9}$

$x = 0.\overline{17}$ $\quad 100x = 17.\overline{17}$
Entonces, $100x - x = 17.\overline{17} - 0.\overline{17}$
$99x = 17$
$x = \frac{17}{99}$

$x = 3.\overline{5}$ $\quad 10x = 35.\overline{5}$
Entonces, $10x - x = 35.\overline{5} - 3.\overline{5}$
$9x = 32$
$x = \frac{32}{9}$

$x = 1.\overline{25}$ $\quad 100x = 125.\overline{25}$
Entonces, $100x - x = 125.\overline{25} - 1.\overline{25}$
$99x = 124$
$x = \frac{124}{99}$

$x = 0.\overline{741}$ $\quad 1\,000x = 741.\overline{741}$
Entonces, $1\,000x - x = 741.\overline{741} - 0.\overline{741}$
$999x = 741$
$x = \frac{741}{999} = \frac{247}{333}$

Se recomienda resolver primero el segundo numeral y luego el primero.

Fecha: **U2 1.6**

Ⓟ Representa los siguientes números como fracción.

Ⓢ a) 1.3333... b) 0.262626...

$x = 1.3333...$ $\quad x = 0.262626...$
$10x = 13.333...$ $\quad 100x = 26.262626...$

Entonces:

$$\begin{array}{r} 10x = 13.333... \\ x = 1.3333... \\ \hline 9x = 12 \\ x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100x = 26.262626... \\ - \quad x = 0.262626... \\ \hline 99x = 26 \\ x = \frac{26}{99} \end{array}$$

Ⓡ 2. a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{17}{99}$ c) $\frac{32}{9}$

d) $\frac{124}{99}$ e) $\frac{247}{333}$ f) $\frac{4\,213}{999}$

1. a) No periódico b) Periódico
c) Periódico d) Periódico
e) No periódico f) Periódico

Tarea: página 39 del Cuaderno de Ejercicios.

1.7 Definición de los números reales

P

Coloca los siguientes números en la recta numérica.

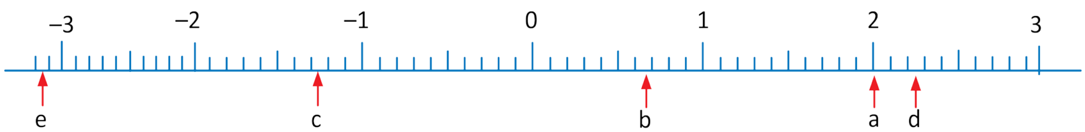
a) 2 b) $\frac{2}{3}$ c) $-1.271212...$ d) $\sqrt{5}$ e) $-\pi$

S

Utilizando las expresiones decimales de estos números.

a) $2 = 2$ b) $\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$ c) $-1.271212...$ d) $\sqrt{5} = 2.236...$ e) $-\pi = -3.141...$

Ubicando en la recta numérica.



C

A cada punto de la recta numérica le corresponde un único número real y viceversa.

El conjunto formado por los números racionales y los números irracionales se conoce como: **números reales.**

Los números reales se representan por: $\mathbb{R}$
Por ejemplo:

- Los enteros positivos, negativos y el cero son reales porque son racionales.

$$2 = \frac{2}{1},\ -3 = \frac{-3}{1},\ 0 = \frac{0}{1}$$

- Los números fraccionarios positivos y negativos son reales porque son racionales.

$$\frac{3}{5},\ -\frac{3}{5} = \frac{-3}{5}$$

- Los números decimales, porque son racionales o irracionales.

$$0.7,\ -0.34,\ 0.\overline{3},\ -1.2\overline{34},\ 4.231574...,\ \text{etc.}$$

- Los números expresados con raíz cuadrada, porque son irracionales.

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{10}\ \text{ etc.}$$

Y se puede sumar, restar, multiplicar y dividir entre números reales.

- Reales ($\mathbb{R}$)
  - Racionales ($\mathbb{Q}$)
    - Enteros ($\mathbb{Z}$)
      - Números negativos
      - El cero
      - Números Naturales ($\mathbb{N}$)
    - Fracciones
  - Irracionales ($\mathbb{Q}'$)

Explica por qué los siguientes números son números reales.

a) 7 Es natural b) -15 Es entero c) $\frac{5}{9}$ Es racional d) -0.04 Es racional

e) $3.141592...$ Es irracional f) $-1.45\overline{27}$ Es racional g) $14.\overline{7}$ Es racional h) $-2.\overline{72}$ Es racional

i) $\sqrt{7}$ Es irracional j) $-\sqrt{16}$ Es racional k) π Es irracional l) $-\sqrt{0.09}$ Es racional

Indicador de logro

1.7 Identifica números reales y justifica su pertenencia a este conjunto.

Secuencia

Ahora que los estudiantes ya conocen los conjuntos de los números racionales y los irracionales se puede definir el conjunto de los números reales, partiendo de ordenar los números en la recta numérica.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar las expresiones y aproximaciones decimales de los números racionales e irracionales respectivamente, para ubicarlos en la recta numérica para definir los números reales y la recta real.

Ⓒ Establecer que la definición de recta numérica que se tiene se puede expandir para los números reales. Definir los números reales como el conjunto formado por los racionales e irracionales.

Se puede llevar la recta numérica ya elaborada en una cartulina, para que no cause dificultad dibujarla en la pizarra.

Fecha: **U2 1.7**

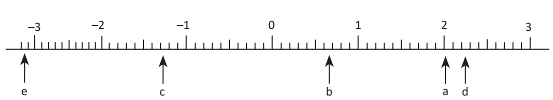
Ⓟ Coloca los siguientes números en la recta numérica.

a) 2 b) $\frac{2}{3}$ c) -1.271212

d) $\sqrt{5}$ e) $-\pi$

Ⓢ

Como $\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$, $\sqrt{5} \approx 2.236...$
y $-\pi \approx -3.141...$



Ⓡ a) Es real porque es natural.

b) Es real porque es entero.

c) Es real porque es racional.

d) Es real porque es racional.

e) Es real porque es irracional.

f) Es real porque es racional.

g) Es real porque es racional.

h) Es real porque es racional.

i) Es real porque es irracional.

j) Es real porque es racional (es –4).

k) Es real porque es irracional.

l) Es real porque es racional (es –0.3).

Tarea: página 40 del Cuaderno de Ejercicios.

1.8 Practica lo aprendido

1. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

a) El cero no es un número racional. F
b) La expresión fraccionaria de $0.\overline{9}$ es $\frac{9}{9}$. V
c) La igualdad $\sqrt{(-2)^2} = -2$ es cierta. F
d) El número $\sqrt{16}$ es un número racional. V
e) La resta de números irracionales siempre da como resultado otro número irracional. F

2. Determina cuánto miden los lados de los siguientes cuadrados:

a) 9 cm^2 — $\sqrt{9} = 3$ cm
b) 2 cm^2 — $\sqrt{2}$ cm
c) 7 cm^2 — $\sqrt{7}$ cm
d) $\frac{9}{4}\text{ cm}^2$ — $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ cm
e) 1.21 cm^2 — $\sqrt{1.21} = 1.1$ cm

3. Determina las raíces cuadradas de los siguientes números:

a) 81 $\pm\sqrt{81} = \pm 9$ b) 17 $\pm\sqrt{17}$ c) $\frac{16}{49}$ $\pm\sqrt{\frac{16}{49}} = \pm\frac{4}{7}$ d) 0.4 $\pm\sqrt{0.4}$

4. Expresa los siguientes números sin el símbolo de radical:

a) $\sqrt{36}$ 6 b) $-\sqrt{\frac{64}{25}}$ $\frac{8}{5}$ c) $-\sqrt{0.36}$ -0.6 d) $\sqrt{2.25}$ 1.5

1.9 Practica lo aprendido

1. Determina cuáles de los siguientes números son iguales:

a) $(\sqrt{2})^2$ 2 b) $\sqrt{2^2}$ 2 c) $(-\sqrt{2})^2$ 2 d) $\sqrt{(-2)^2}$ 2

2. Ordena los siguientes números de menor a mayor:

a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) -3 d) $-\sqrt{2}$ e) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ f) $-\sqrt{2.9}$

$-3 < -\sqrt{2.9} < -\sqrt{2} < \sqrt{\frac{5}{3}} < \sqrt{3} < 2$

3. En los siguientes literales:

a) Aproxima el valor de $\sqrt{15}$ utilizando las potencias indicadas.

$3.86^2 = \boxed{14.8996}$ $3.87^2 = \boxed{14.9769}$ $3.88^2 = \boxed{15.0544}$ $3.89^2 = \boxed{15.1321}$

$\boxed{3.87} < \sqrt{15} < \boxed{3.88}$

b) Aproxima hasta las centésimas los siguientes números irracionales, utilizando la calculadora.

$\boxed{2.64} < \sqrt{7} < \boxed{2.65}$

$\boxed{-3.75} < -\sqrt{14} < \boxed{-3.74}$

4. Clasifica los siguientes números reales como racionales o irracionales. Si son racionales, exprésalos en la forma $\frac{a}{b}$.

a) 15 Es racional $\frac{15}{1}$ b) $-1.252547...$ Es irracional c) $\sqrt{7}$ Es irracional d) $-\sqrt{0.01}$ Es racional $-0.1 = -\frac{1}{10}$

Indicador de logro

1.8 Resuelve problemas sobre números reales y raíz cuadrada.

Solución de algunos ítems:

Solución de algunos ítems de la clase 1.8:

1. a) El cero se puede expresar como: $\frac{0}{1}$.
   b) $x = 0.\overline{9}$ $\quad 10x = 9.\overline{9}$
   Entonces, $10x - x = 9.\overline{9} - 0.\overline{9}$
   $9x = 9$
   $x = \frac{9}{9}$
   c) $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$
   d) $\sqrt{16} = 4$
   e) $\pi - \pi = 0$ y cero es racional.

3. d) Las raíces de 0.4 son:
   $\pm\sqrt{0.4} = \pm\sqrt{\frac{4}{10}} = \pm\frac{2}{\sqrt{10}}$

   No se puede expresar como número racional.

4. c) $-\sqrt{0.36} = -\sqrt{\frac{36}{100}} = -\frac{6}{10} = -0.6$
   d) $\sqrt{2.25} = \sqrt{\frac{225}{100}} = \frac{15}{10} = 1.5$

Tarea: página 41 del Cuaderno de Ejercicios.

Solución de algunos ítems de la clase 1.9:

2. Ordenando primero los positivos:
   $\frac{5}{3} < 3 < 4$ entonces, $\sqrt{\frac{5}{3}} < \sqrt{3} < 2$

   Ahora los negativos:
   $2 < 2.9 < 9$ entonces, $\sqrt{2} < \sqrt{2.9} < 3$

   Por lo tanto:
   $-3 < -\sqrt{2.9} < -\sqrt{2} < \sqrt{\frac{5}{3}} < \sqrt{3} < 2$

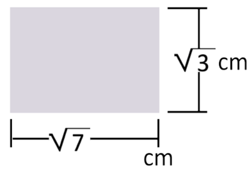
3. b) Como $2^2 < 7 < 3^2$ entonces,
   $2 < \sqrt{7} < 3$.
   Como $2.6^2 < 7 < 2.7^2$ entonces,
   $2.6 < \sqrt{7} < 2.7$.
   Como $2.64^2 < 7 < 2.65^2$ entonces,
   $2.64 < \sqrt{7} < 2.65$.
   Como $3^2 < 14 < 4^2$ entonces,
   $3 < \sqrt{14} < 4$.
   Como $3.7^2 < 14 < 3.8^2$ entonces,
   $3.7 < \sqrt{14} < 3.8$.
   Como $3.74^2 < 14 < 3.75^2$ entonces,
   $3.74 < \sqrt{14} < 3.75$.

Lección 2 Operaciones con raíces cuadradas

2.1 Multiplicación de raíces cuadradas

P

Calcula el área del siguiente rectángulo que posee $\sqrt{3}$ cm de altura y $\sqrt{7}$ cm de base.



S

Para calcular el área se debe multiplicar $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$.
Para operarlo, observa que

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} \times \sqrt{7})^2 &= (\sqrt{3} \times \sqrt{7}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{7})\\ &= (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{7})^2\\ &= 3 \times 7\end{aligned}$$

En potenciación se cumple que $a^2 b^2 = (ab)^2$

Luego se cumple que $(\sqrt{3} \times \sqrt{7})^2 = 3 \times 7$.

Luego, tomando la raíz cuadrada positiva: $\sqrt{3} \times \sqrt{7} = \sqrt{3 \times 7} = \sqrt{21}$

$= \sqrt{21}$ cm^2

C

En general, para realizar $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ con a, $b \geq 0$.
Se cumple que $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = a \times b$.
Tomando la raíz cuadrada positiva:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

Se multiplican los radicandos de cada raíz cuadrada.

Por ejemplo:

$$\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{3 \times 2} = \sqrt{6}$$

E

Observa que

$\sqrt{4^2} = 4$

Pero $\sqrt{(-4)^2}$ no es -4, porque

$\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$.

Realizar las siguientes multiplicaciones de raíces cuadradas.

a) $(-\sqrt{2}) \times \sqrt{8}$

Aplicando la ley de los signos:

$-(\sqrt{2} \times \sqrt{8})$.

Resolviendo:

$-(\sqrt{2} \times \sqrt{8}) = -(\sqrt{2 \times 8}) = -\sqrt{16} = -\sqrt{4^2} = -4$.

b) $(-\sqrt{5}) \times (-\sqrt{3})$

Aplicando la ley de los signos:

$(-\sqrt{5}) \times (-\sqrt{3}) = (\sqrt{5} \times \sqrt{3})$

Resolviendo:

$(\sqrt{5} \times \sqrt{3}) = (\sqrt{5 \times 3}) = \sqrt{15}$.

Realiza las siguientes multiplicaciones de raíces cuadradas.

a) $\sqrt{5} \times \sqrt{7}$ — $\sqrt{35}$

b) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ — 4

c) $(-\sqrt{3}) \times \sqrt{7}$ — $-\sqrt{21}$

d) $(-\sqrt{10}) \times (-\sqrt{7})$ — $\sqrt{70}$

e) $\sqrt{10} \times (-\sqrt{3})$ — $-\sqrt{30}$

f) $\sqrt{3} \times (-\sqrt{12})$ — -6

g) $(-\sqrt{18}) \times \sqrt{2}$ — -6

h) $(-\sqrt{50}) \times (-\sqrt{2})$ — 10

Indicador de logro

2.1 Opera multiplicaciones con raíces cuadradas.

Secuencia

Luego de tener conocimiento de la forma de expresar algunos números irracionales con el símbolo de radical, se pueden comenzar a estudiar las operaciones con este tipo de números. Para ello se inicia con la multiplicación y división, puesto que el algoritmo para realizar estas operaciones se deduce de la definición de raíces cuadradas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar la idea del área de un rectángulo cuya longitud de lados está expresada con radicales, para comprender que el producto $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$ existe (es el área del cuadrado, y esta existe), será necesario elevar al cuadrado el área buscada como estrategia, a partir de ello, se utilizará la definición de números expresados con raíz cuadrada para obtener un valor entero, luego se volverá a utilizar la definición de nuevo para deducir el algoritmo de la multiplicación de raíces cuadradas.

Ⓒ Establecer el algoritmo de la multiplicación de dos números expresados con raíces cuadradas.

Solución de algunos ítems:

a) $\sqrt{5} \times \sqrt{7} = \sqrt{5 \times 7} = \sqrt{35}$

b) $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$

c) $(-\sqrt{3}) \times \sqrt{7} = -\sqrt{3 \times 7} = -\sqrt{21}$

d) $(-\sqrt{10}) \times (-\sqrt{7}) = +\sqrt{10 \times 7} = \sqrt{70}$

Fecha: **U2 2.1**

Ⓟ Determina el resultado de $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$

Ⓢ Elevando al cuadrado esta multiplicación.

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} \times \sqrt{7})^2 &= (\sqrt{3} \times \sqrt{7})(\sqrt{3} \times \sqrt{7})\\ &= (\sqrt{3})^2(\sqrt{7})^2\\ &= 3 \times 7\end{aligned}$$

Entonces $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$ es la raíz cuadrada positiva de 3×7.

Por lo tanto, $\sqrt{3} \times \sqrt{7} = \sqrt{3 \times 7} = \sqrt{21}$.

Ⓔ Realiza las siguientes multiplicaciones con raíces cuadradas.

a) $(-\sqrt{2}) \times \sqrt{8} = -\sqrt{2 \times 8} = -\sqrt{16} = -4$

b) $(-\sqrt{5}) \times (-\sqrt{3}) = +\sqrt{5 \times 3} = \sqrt{15}$

Ⓡ a) $\sqrt{35}$ b) 4 c) $-\sqrt{21}$ d) $\sqrt{70}$

e) $-\sqrt{30}$ f) -6 g) -6 h) 10

Tarea: página 42 del Cuaderno de Ejercicios.

2.2 División de raíces cuadradas

P

Encuentra una forma para realizar la división $\sqrt{3} \div \sqrt{7}$.

S

Se expresa la división como una fracción: $\sqrt{3} \div \sqrt{7} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

En potenciación se cumple que $\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$

Además las raíces cuadradas cumplen: $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ $\quad \left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$

Entonces: $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{3}{7}$. Por propiedades de potencia: $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{3}{7}$.

El número positivo que elevado al cuadrado da $\frac{3}{7}$ es $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Tomando la raíz cuadrada positiva: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

Por lo tanto: $\sqrt{3} \div \sqrt{7} = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

C

En general, para realizar $\sqrt{a} \div \sqrt{b}$ con $a \geq 0$, $b > 0$.

Se expresa como fracción y se cumple que $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$.

Tomando la raíz cuadrada positiva: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Por ejemplo: $\sqrt{3} \div \sqrt{5} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Se dividen los radicandos de cada raíz cuadrada y se expresan como fracción.

E

Realizar las siguientes divisiones de raíces cuadradas:

a) $\left(-\sqrt{6}\right) \div \sqrt{10}$

Aplicando la ley de los signos:

$\left(-\sqrt{6}\right) \div \sqrt{10} = -\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\right)$.

Resolviendo:

$-\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\right) = -\sqrt{\frac{6}{10}} = -\sqrt{\frac{3}{5}}$.

b) $\left(-\sqrt{8}\right) \div \left(-\sqrt{18}\right)$

Aplicando la ley de los signos:

$\left(-\sqrt{8}\right) \div \left(-\sqrt{18}\right) = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$.

Resolviendo:

$\sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

Realiza las siguientes divisiones de raíces cuadradas.

a) $\sqrt{2} \div \sqrt{5}$ $\quad \sqrt{\frac{2}{5}}$

b) $\sqrt{2} \div \sqrt{8}$ $\quad \frac{1}{2}$

c) $\left(-\sqrt{3}\right) \div \sqrt{6}$ $\quad -\sqrt{\frac{1}{2}}$

d) $\left(-\sqrt{15}\right) \div \left(-\sqrt{6}\right)$ $\quad \sqrt{\frac{5}{2}}$

e) $\sqrt{3} \div \left(-\sqrt{7}\right)$ $\quad -\sqrt{\frac{3}{7}}$

f) $\sqrt{27} \div \left(-\sqrt{12}\right)$ $\quad -\frac{3}{2}$

g) $\left(-\sqrt{20}\right) \div \sqrt{5}$ $\quad -2$

h) $\left(-\sqrt{12}\right) \div \left(-\sqrt{3}\right)$ $\quad 2$

Indicador de logro

2.2 Opera divisiones con raíces cuadradas.

Secuencia

Conociendo la forma en la que se deduce el algoritmo de la multiplicación de raíces, se puede deducir el algoritmo para dividir raíces cuadradas; en esta clase se utilizará el hecho de expresar una división como fracción.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar un procedimiento parecido al que se utilizó para la multiplicación, para deducir la forma de dividir raíces cuadradas, elevando al cuadrado la división expresada como fracción, y a partir de ello utilizar la definición de números expresados con raíz cuadrada para obtener una fracción entera, luego se volverá a utilizar la definición para deducir el algoritmo de la división de raíces cuadradas.

Ⓒ Establecer el algoritmo de la división de dos números expresados con raíces cuadradas.

Solución de algunos ítems:

a) $\sqrt{2} \div \sqrt{5} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

b) $\sqrt{2} \div \sqrt{8} = \sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

c) $(-\sqrt{3}) \div \sqrt{6} = -\sqrt{\frac{3}{6}} = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

d) $(-\sqrt{15}) \div (-\sqrt{6}) = +\sqrt{\frac{15}{6}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

Fecha: **U2 2.2**

Ⓟ Determina el resultado de $\sqrt{3} \div \sqrt{7}$

Ⓢ $(\sqrt{3})^2 = 3 \qquad (\sqrt{7})^2 = 7$

Elevando al cuadrado la división expresada como fracción:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7})^2} = \frac{3}{7}$$

Entonces $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ es la raíz cuadrada positiva de $\frac{3}{7}$.

Por lo tanto, $\sqrt{3} \div \sqrt{7} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

Ⓔ Realiza las siguientes divisiones con raíces cuadradas.

a) $(-\sqrt{6}) \div \sqrt{10} = -\sqrt{\frac{6}{10}} = -\sqrt{\frac{3}{5}}$

b) $(-\sqrt{8}) \div (-\sqrt{18}) = +\sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

Ⓡ a) $\sqrt{\frac{2}{5}}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ d) $\sqrt{\frac{5}{2}}$

e) $-\sqrt{\frac{3}{7}}$ f) $-\frac{3}{2}$ g) -2 h) 2

Tarea: página 43 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.3 Expresión de números sin el símbolo de radical

P

Expresa el número $\sqrt{225}$ en el símbolo de radical.

S

Expresando 225 en su descomposición prima:
Entonces $225 = 3^2 \times 5^2$.
Y en la raíz cuadrada se cumplirá:

$$\sqrt{225} = \sqrt{3^2 \times 5^2}$$

Utilizando la multiplicación de radicales:

$$\sqrt{3^2 \times 5^2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5^2} = 3 \times 5 = 15$$

Por lo tanto: $\sqrt{225} = 15$.

Para encontrar la descomposición prima de 225.

$$\begin{array}{r|l} 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

entonces $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 3^2 \times 5^2$.

C

Para expresar números sin el símbolo de radical:

1. Se encuentra la descomposición prima del radicando.
2. Se separa la raíz cuadrada en multiplicaciones de potencias cuadradas.
3. Se calcula cada raíz cuadrada y se multiplican los resultados.

Por ejemplo: $\sqrt{324}$

1. $324 = 2^2 \times 3^2 \times 3^2$
2. $\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3^2}$
   $= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3^2}$
3. $\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

$$\begin{array}{r|l} 324 & 2 \\ 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

E

Expresa el número $\sqrt{\frac{400}{441}}$ sin el símbolo de radical.

$\sqrt{\frac{400}{441}} = \frac{\sqrt{400}}{\sqrt{441}}$ Haciendo el proceso para el numerador y el denominador:

1. $400 = 2^2 \times 2^2 \times 5^2$ 2. $\sqrt{400} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 5^2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{5^2}$ 3. $\sqrt{400} = 2 \times 2 \times 5 = 20$

1. $441 = 3^2 \times 7^2$ 2. $\sqrt{441} = \sqrt{3^2 \times 7^2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{7^2}$ 3. $\sqrt{441} = 3 \times 7 = 21$

Observa:

$$\begin{array}{r|l} 400 & 2 \\ 200 & 2 \\ 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Por lo tanto: $\frac{\sqrt{400}}{\sqrt{441}} = \frac{20}{21}$.

Expresa los siguientes números sin el símbolo de radical:

a) $\sqrt{900}$ 30

b) $-\sqrt{625}$ -25

c) $-\sqrt{441}$ -21

d) $-\sqrt{\frac{49}{144}}$ $-\frac{7}{12}$

e) $\sqrt{\frac{81}{196}}$ $\frac{9}{14}$

f) $-\sqrt{\frac{100}{121}}$ $-\frac{10}{11}$

Unidad 2

Indicador de logro

2.3 Utiliza la descomposición prima para representar un número sin el símbolo radical.

Secuencia

Como los estudiantes ya abordaron la multiplicación de raíces cuadradas, a partir de ello, utilizando la descomposición de un número en sus factores primos, se pueden expresar números grandes sin el símbolo de radical.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Expresar un número grande en su descomposición prima, para poder expresarlo sin el símbolo de radical, a partir del uso de la multiplicación de raíces cuadradas.

Ⓒ Establecer el algoritmo para expresar números grandes sin el símbolo de radical utilizando la descomposición en factores primos.

Ⓔ Aplicar el algoritmo establecido en la Conclusión para expresar la raíz de una fracción sin el símbolo de radical.

Solución de algunos ítems:

a) $\sqrt{900} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5^2} = 30$

b) $-\sqrt{625} = -\sqrt{5^2 \times 5^2} = -25$

c) $-\sqrt{441} = -\sqrt{3^2 \times 7^2} = -21$

d) $-\sqrt{\frac{49}{144}} = -\frac{\sqrt{7^2}}{\sqrt{2^2 \times 2^2 \times 3^2}} = -\frac{7}{12}$

Fecha: **U2 2.3**

Ⓟ Expresa el número $\sqrt{225}$ sin el símbolo de radical.

Ⓢ Expresando 225 en su descomposición prima:

$$225 = 3^2 \times 5^2$$

$$\begin{aligned}\sqrt{225} &= \sqrt{3^2 \times 5^2}\\ &= \sqrt{3^2} \times \sqrt{5^2}\\ &= 3 \times 5\\ &= 15\end{aligned}$$

Ⓔ Expresa el número $\sqrt{\frac{400}{441}}$ sin el símbolo de radical.

$400 = 2^2 \times 2^2 \times 5^2$

$441 = 3^2 \times 7^2$

$$\sqrt{\frac{400}{441}} = \frac{\sqrt{400}}{\sqrt{441}} = \frac{\sqrt{2^2 \times 2^2 \times 5^2}}{\sqrt{3^2 \times 7^2}} = \frac{20}{21}$$

Ⓡ a) 30 b) –25 c) –21

d) $-\frac{7}{12}$ e) $\frac{9}{14}$ f) $-\frac{10}{11}$

Tarea: página 44 del Cuaderno de Ejercicios.

2.4 Multiplicación de un número racional con una raíz cuadrada

P

Realiza la multiplicación $5 \times \sqrt{2}$ y exprésala como la raíz cuadrada de un solo número.

S

Expresando 5 con el símbolo de radical $5 = \sqrt{25}$.

Entonces, se tiene $5 \times \sqrt{2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2}$.

Realizando la multiplicación $\sqrt{25} \times \sqrt{2} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50}$.

Por lo tanto, $5 \times \sqrt{2} = \sqrt{50}$.

Para representar la multiplicación $5 \times \sqrt{2}$ se puede utilizar la notación: $5\sqrt{2}$

C

La notación $a\sqrt{b}$ simboliza la multiplicación $a \times \sqrt{b}$ con $a, b \geq 0$.

Para realizar la multiplicación $a \times \sqrt{b}$ y expresarla como la raíz cuadrada de un número:

1. Se expresa a con el símbolo de radical.

$$a = \sqrt{a^2}$$

2. Se multiplican las raíces cuadradas.

$$a \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \times b}$$

Por ejemplo: $3\sqrt{3}$

1. $3 = \sqrt{9}$

2. $3\sqrt{3} = 3 \times \sqrt{3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3}$

$$= \sqrt{9 \times 3}$$
$$= \sqrt{27}$$

E

Expresa el número $\frac{\sqrt{5}}{3}$ como la raíz cuadrada de un número.

Expresando el número 3 con el símbolo de radical $3 = \sqrt{9}$.

Luego, $\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}}$.

Expresa los siguientes números como la raíz cuadrada de un número.

a) $3\sqrt{2}$ $\sqrt{18}$

b) $5\sqrt{3}$ $\sqrt{75}$

c) $4\sqrt{5}$ $\sqrt{80}$

d) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ $\sqrt{\frac{7}{4}}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{7}$ $\sqrt{\frac{3}{49}}$

f) $\frac{\sqrt{2}}{9}$ $\sqrt{\frac{2}{81}}$

Indicador de logro

2.4 Expresa la multiplicación de un número racional con una raíz cuadrada, representando la operación con un solo radicando.

Secuencia

Ahora que ya se ha utilizado la descomposición prima para expresar números sin el símbolo de radical, se estudiará la multiplicación de un número racional por un número radical, que servirá para poder estudiar la simplificación de raíces cuadradas en la clase siguiente.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Expresar un número racional con el símbolo de radical, para luego aplicar la multiplicación de raíces cuadradas vista en la clase 2.1, y expresar el resultado como una sola raíz cuadrada.

Ⓒ Establecer el algoritmo para multiplicar un número racional por una raíz cuadrada, expresando el número racional como raíz cuadrada.

Ⓔ Analizar una variante del Problema inicial donde se puede aplicar el mismo algoritmo, solo que a un cociente.

Solución de algunos ítems:

a) $3\sqrt{2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = \sqrt{18}$

b) $5\sqrt{3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = \sqrt{75}$

c) $4\sqrt{5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = \sqrt{80}$

d) $\frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{7}{4}}$

Fecha: **U2 2.4**

Ⓟ Realiza la operación $5 \times \sqrt{2}$.

Ⓢ Puesto que $5 = \sqrt{25}$

Entonces $5 \times \sqrt{2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2}$
$= \sqrt{25 \times 2}$
$= \sqrt{50}$

Ⓔ Expresa el número $\frac{\sqrt{5}}{3}$ como la raíz cuadrada de un número.

$$\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}}$$

Ⓡ a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt{75}$ c) $\sqrt{80}$

d) $\sqrt{\frac{7}{4}}$ e) $\sqrt{\frac{3}{49}}$ f) $\sqrt{\frac{2}{81}}$

Tarea: página 45 del Cuaderno de Ejercicios.

2.5 Simplificación de raíces cuadradas inexactas

P

¿Cómo se puede simplificar la expresión de los números a) $\sqrt{12}$ y b) $\sqrt{\frac{5}{9}}$?

S

a) Expresando 12 en su descomposición prima:

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3}$$

Simplificando la expresión:

$$\sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

b) Expresando el radical como una fracción:

$$\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}$$

Simplificando la raíz cuadrada del denominador:

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

C

Se conoce como **simplificar** una raíz cuadrada a expresarla con un radicando menor que el inicial. Y se dice **simplificar a la mínima expresión** una raíz cuadrada cuando se simplifica el radicando al menor valor posible. **Si a, $b \geq 0$ entonces $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$.**

Por ejemplo, simplificar $\sqrt{90}$ a su mínima expresión.

Utilizando la descomposición prima de 90:

$$\sqrt{90} = \sqrt{3^2 \times 2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2 \times 5} = 3\sqrt{10}$$

Observa:

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Y la simplificación de $\sqrt{90}$ a su mínima expresión es $3\sqrt{10}$, porque ya no se puede reducir el radicando. **Al realizar cualquier operación con radicales, siempre se debe simplificar el resultado a la mínima expresión.**

E

Simplifica el número $-\sqrt{396}$ a su mínima expresión.

Utilizando la descomposición prima de 396:

$$-\sqrt{396} = -\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 11} = -\sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{11} = -2 \times 3 \times \sqrt{11} = -6\sqrt{11}$$

Observa:

396	2
198	2
99	3
33	3
11	11
1	

Y como ya no se puede reducir el radicando, la simplificación a la mínima expresión de $-\sqrt{396}$ es: $-6\sqrt{11}$

1. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{18}$ $3\sqrt{2}$ b) $-\sqrt{\frac{6}{25}}$ $-\frac{\sqrt{6}}{5}$ c) $\sqrt{27}$ $3\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{200}$ $-10\sqrt{2}$ e) $-\sqrt{\frac{5}{81}}$ $-\frac{\sqrt{5}}{9}$

2. Simplifica los siguientes números a su mínima expresión.

a) $\sqrt{252}$ $6\sqrt{7}$ b) $-\sqrt{450}$ $-15\sqrt{2}$ c) $\sqrt{405}$ $9\sqrt{5}$

Indicador de logro

2.5 Simplifica raíces cuadradas inexactas.

Secuencia

Ahora se puede trabajar el proceso inverso al que se vio en la clase anterior, utilizando la descomposición en factores primos de un número, se puede determinar un proceso para simplificar raíces cuadradas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar el procedimiento inverso al visto en la clase anterior para simplificar expresiones con raíces cuadradas.

Ⓒ Definir matemáticamente lo que se entenderá por simplificación y simplificación a la mínima expresión, y brindar un procedimiento para realizar simplificaciones de raíces cuadradas.

Ⓔ Aplicar el algoritmo establecido en la Conclusión para simplificar raíces cuadradas.

Solución de algunos ítems:

1. a) $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$

   b) $-\sqrt{\frac{6}{25}} = -\sqrt{\frac{6}{5^2}} = -\frac{\sqrt{6}}{5}$

   c) $\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}$

   d) $-\sqrt{200} = -\sqrt{2^2 \times 5^2 \times 2} = -10\sqrt{2}$

Fecha: **U2 2.5**

Ⓟ Simplifica:

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{\frac{5}{9}}$

Ⓢ Utilizando la descomposición prima:

a) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{\frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{5}{3^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Ⓔ Simplifica el número $-\sqrt{396}$ a su mínima expresión.

$-\sqrt{396} = -\sqrt{2^2 \times 3^2 \times 11} = -6\sqrt{11}$

Ⓡ 1. a) $3\sqrt{2}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{5}$ c) $3\sqrt{3}$

d) $-10\sqrt{2}$ e) $-\frac{\sqrt{5}}{9}$

2. a) $6\sqrt{7}$ b) $-15\sqrt{2}$ c) $9\sqrt{5}$

Tarea: página 46 del Cuaderno de Ejercicios.

2.6 Multiplicación de raíces cuadradas utilizando simplificación

P

Realiza la multiplicación $\sqrt{28} \times \sqrt{18}$

S

Se puede simplificar antes de operar.

$\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}$

$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$

Entonces:

$$\begin{aligned}\sqrt{28} \times \sqrt{18} &= 2\sqrt{7} \times 3\sqrt{2}\\ &= 2 \times 3 \times \sqrt{7} \times \sqrt{2}\\ &= 6\sqrt{14}\end{aligned}$$

Se puede multiplicar desde el inicio.

$\sqrt{28} \times \sqrt{18} = \sqrt{28 \times 18}$

Luego, se expresa como factores primos:

$\sqrt{28 \times 18} = \sqrt{7 \times 2^2 \times 3^2 \times 2}$

Y se simplifica:

$$\begin{aligned}\sqrt{7 \times 2^2 \times 3^2 \times 2} &= 2 \times 3 \times \sqrt{7 \times 2}\\ &= 6\sqrt{14}\end{aligned}$$

Observa que para evitar cálculos grandes se evita hacer la multiplicación 28×18.

C

Para multiplicar raíces cuadradas con números grandes como radicando se puede hacer lo siguiente:

1. Se simplifica cada raíz cuadrada si es posible.
2. Se multiplican las raíces ya simplificadas.
3. Se simplifica si es posible.

Por ejemplo: $\sqrt{20} \times \sqrt{90}$

1. $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ $\quad \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$
2. $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{10} = 2 \times 3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{10} = 6\sqrt{50}$
3. $6\sqrt{50} = 6 \times 5\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$

E

Realiza la multiplicación $-\sqrt{98} \times \sqrt{80}$.

Cuando los radicandos son muy grandes, se factoriza en primos antes de multiplicar.

$$\begin{aligned}-\sqrt{98} \times \sqrt{80} = -\sqrt{98 \times 80} &= -\sqrt{2 \times 7^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 5}\\ &= -7 \times 2 \times 2 \times \sqrt{2 \times 5}\\ &= -28\sqrt{10}\end{aligned}$$

Observa:

98	2		80	2
49	7		40	2
7	7		20	2
1			10	2
			5	5
			1	

Realiza las siguientes multiplicaciones de raíces cuadradas.

a) $\sqrt{20} \times \sqrt{12}$
$4\sqrt{15}$

b) $\sqrt{75} \times \sqrt{50}$
$25\sqrt{6}$

c) $\sqrt{18} \times (-\sqrt{50})$
-30

d) $(-\sqrt{27}) \times (-\sqrt{32})$
$12\sqrt{6}$

e) $\sqrt{10} \times \sqrt{14}$
$2\sqrt{35}$

f) $\sqrt{8} \times \sqrt{6}$
$4\sqrt{3}$

g) $\sqrt{12} \times (-\sqrt{15})$
$-6\sqrt{5}$

h) $\sqrt{96} \times (-\sqrt{20})$
$-8\sqrt{30}$

Indicador de logro

2.6 Determina el producto de raíces cuadradas utilizando simplificación.

Secuencia

Ahora que el estudiante ya conoce el método para realizar la simplificación de raíces cuadradas y el algoritmo para multiplicar raíces, se puede utilizar la simplificación como herramienta para multiplicar raíces cuadradas con radicandos grandes.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar la simplificación de raíces cuadradas para realizar multiplicaciones y expresar el resultado de forma simplificada. Evitar el cálculo complejo de multiplicaciones como 28 × 18.

Ⓒ Brindar un método que simplifique los cálculos de la multiplicación de raíces cuadradas (en especial cuando se trata de números grandes).

Ⓔ Aplicar la herramienta de simplificación para realizar multiplicaciones con raíces cuadradas y extender el resultado de la multiplicación de un número negativo por un positivo.

Solución de algunos ítems:

a) $\sqrt{20} \times \sqrt{12} = 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{3}$
$= 4\sqrt{15}$

b) $\sqrt{75} \times \sqrt{50} = 5\sqrt{3} \times 5\sqrt{2}$
$= 25\sqrt{6}$

c) $\sqrt{18} \times (-\sqrt{50}) = 3\sqrt{2} \times (-5\sqrt{2})$
$= -15 \times 2$
$= -30$

d) $(-\sqrt{27}) \times (-\sqrt{32}) = -3\sqrt{3} \times (-4\sqrt{2})$
$= 12\sqrt{6}$

Fecha: **U2 2.6**

Ⓟ Realiza la multiplicación $\sqrt{28} \times \sqrt{18}$.

Ⓢ
$\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$
$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{28} \times \sqrt{18} = 2 \times 3 \times \sqrt{7} \times \sqrt{2}$
$= 6\sqrt{14}$

$\sqrt{28} \times \sqrt{18} = \sqrt{28 \times 18}$
$= \sqrt{2^2 \times 7 \times 3^2 \times 2}$
$= 6\sqrt{14}$

Ⓔ Realiza la multiplicación $-\sqrt{98} \times \sqrt{80}$.

$-\sqrt{98} \times \sqrt{80} = -\sqrt{98 \times 80}$
$= -\sqrt{2 \times 7^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 5}$
$= -28\sqrt{10}$

Ⓡ

a) $4\sqrt{15}$ b) $25\sqrt{6}$ c) -30 d) $12\sqrt{6}$

e) $2\sqrt{35}$ f) $4\sqrt{3}$ g) $-6\sqrt{5}$ h) $-8\sqrt{30}$

Tarea: página 47 del Cuaderno de Ejercicios.

2.7 Racionalización de denominadores

P

Encuentra una fracción equivalente que no tenga raíz cuadrada en el denominador para $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

S

Considerando la fracción equivalente: $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Realizando la multiplicación: $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por lo tanto: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Comprobando los valores de cada expresión en la calculadora.

$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106...$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707106...$

Al multiplicar y dividir una fracción por un mismo número se obtiene una fracción equivalente, es decir, que representa la misma cantidad. Por ejemplo:

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{6}$

Observa que esta expresión en la que se simplifica la raíz cuadrada del denominador es mucho más fácil de insertar en la calculadora y también para hacer operaciones de fracciones, porque así el denominador es entero.

C

El proceso en el cuál se encuentra una fracción equivalente sin raíces cuadradas en el denominador de una fracción se llama: **racionalización de denominadores.**

Para racionalizar el denominador de una fracción $\frac{b}{\sqrt{a}}$ donde $a > 0$ se siguen los pasos:

1. Se multiplica por la fracción $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.
2. Se realiza la multiplicación y se simplifica el resultado.

$\frac{b}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$

Por ejemplo, racionaliza $\frac{3}{\sqrt{6}}$:

1. $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$
2. $\frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Al realizar cualquier operación con radicales, siempre se debe racionalizar los radicales del denominador.

E

Racionaliza los siguientes números: a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$.

a) 1. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

2. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3 \times 7}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

b) Se simplifica $\sqrt{12}$: $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

1. $-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = -\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$

2. $-\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = -\left(\frac{\sqrt{5} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}\right) = -\left(\frac{\sqrt{5 \times 3}}{2 \times 3}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{6}$

Racionaliza los siguientes números.

a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

b) $-\frac{1}{\sqrt{11}}$ $-\frac{\sqrt{11}}{11}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

d) $\frac{8}{\sqrt{20}}$ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

e) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

f) $\frac{7}{\sqrt{21}}$ $\frac{\sqrt{21}}{3}$

g) $-\frac{12}{\sqrt{18}}$ $-2\sqrt{2}$

h) $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{24}}$ $-\frac{\sqrt{30}}{12}$

Indicador de logro

2.7 Racionaliza el denominador de una fracción.

Secuencia

En las clases anteriores ya se han establecido algunas formas de simplificación, y además se han utilizado para operar raíces, ahora que los estudiantes ya conocen la multiplicación de raíces cuadradas, se puede introducir la racionalización del denominador de una fracción, multiplicando y dividiendo por la misma cantidad para obtener una fracción equivalente.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar las fracciones equivalentes para determinar una forma de simplificar la raíz cuadrada del denominador de una fracción.

Ⓒ Definir la racionalización del denominador de una fracción y establecer un proceso para realizar la racionalización del denominador en donde solo aparece una raíz cuadrada; el proceso para racionalizar más de una raíz cuadrada se abordará hasta bachillerato. Además, es importante mencionar que el proceso de racionalización debe efectuarse al presentar respuestas finales.

Solución de algunos ítems:

a) $\frac{1}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

b) $-\frac{1}{\sqrt{11}} \times \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = -\frac{\sqrt{11}}{11}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

d) $\frac{8}{\sqrt{20}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{10} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

Estrategia de resolución de problemas:
Para esta clase se aplica una estrategia muy común en matemática, la cual consiste en multiplicar por un "1" de manera "adecuada", o bien en multiplicar y dividir por una misma cantidad que sea de conveniencia para expresar de otra forma alguna cantidad.

Fecha: **U2 2.7**

Ⓟ Encuentra una fracción equivalente sin raíz cuadrada en el denominador de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ⓢ Considerando la fracción equivalente:
$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ⓔ Racionaliza los números:

a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

b) $-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$

$-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}} = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$

$= -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= -\frac{\sqrt{15}}{6}$

Ⓡ
a) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ b) $-\frac{\sqrt{11}}{11}$

c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ d) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

e) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ f) $\frac{\sqrt{21}}{3}$

g) $-2\sqrt{2}$ h) $-\frac{\sqrt{30}}{12}$

Tarea: página 48 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.8 Suma y resta de raíces cuadradas

P

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $7\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ b) $7\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

S

a) Tomando $a = \sqrt{3}$: $7\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7a + 2a = 9a = 9\sqrt{3}$

b) Tomando $a = \sqrt{3}$: $7\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 7a - 2a = 5a = 5\sqrt{3}$

$7a = a + a + a + a + a + a + a.$

$2a = a + a.$

C

Para sumar y restar raíces cuadradas, se suman y restan los coeficientes de las raíces cuadradas que tienen igual radicando.

Ejemplos: a) $6 + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$ b) $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

Observa:
$\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$
$1.41\ldots + 1.73\ldots \neq 2.23\ldots$
No se puede expresar $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ de forma más simple.

Identificando los números que tienen igual radicando:

$6 + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$ | $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

Sumando y restando los coeficientes de las raíces con igual radicando:

$6 + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = 6 + (5 - 3)\sqrt{7}$ | $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = (3 + 2)\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

Por lo tanto:

$6 + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = 6 + 2\sqrt{7}$ | $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

Ten cuidado para sumar $\sqrt{a} + \sqrt{a}$, **no** es $\sqrt{a + a} = \sqrt{2a}$, es igual a: $2\sqrt{a}$.

Ten cuidado
Multiplicando: $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
Sumando: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$

Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas.

a) $\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$
$5\sqrt{3}$

b) $9\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$
$2\sqrt{2}$

c) $\sqrt{5} - 7\sqrt{5}$
$-6\sqrt{5}$

d) $5\sqrt{6} + 7\sqrt{6} + 8$
$12\sqrt{6} + 8$

e) $2\sqrt{2} - 6 - 7\sqrt{2}$
$-5\sqrt{2} - 6$

f) $9\sqrt{5} + 7\sqrt{5} + 4\sqrt{7}$
$16\sqrt{5} + 4\sqrt{7}$

g) $7\sqrt{6} - 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2}$
$7\sqrt{6} + 5\sqrt{2}$

h) $5\sqrt{7} - 4\sqrt{3} - 8\sqrt{7}$
$-3\sqrt{7} - 4\sqrt{3}$

Indicador de logro

2.8 Suma y resta raíces cuadradas semejantes.

Secuencia

Ahora que ya se ha trabajado la multiplicación y división, se introduce la suma y resta con raíces cuadradas, definiendo raíces cuadradas semejantes, y haciendo la analogía con las operaciones con polinomios.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Plantear la diferencia entre la suma y la resta de raíces cuadradas, por ello se utilizan las mismas raíces y solo cambia el signo de la operación. A partir de esto, utilizar la sustitución de la raíz cuadrada por una variable y operar como suma de monomios para deducir la forma de sumar raíces cuadradas.

Ⓒ Brindar un algoritmo para sumar raíces cuadradas con igual radicando, de manera correcta. En los recuadros se justifica por qué la suma de raíces diferentes debe quedar indicada y se brinda una advertencia para evitar un error muy típico de la suma de raíces cuadradas, esta suma no es igual a la suma de los radicandos.

Estrategia de resolución de problemas:
Para establecer que no se cumple que la suma de dos raíces es la raíz de la suma de los radicandos se utiliza la estrategia del "contraejemplo", la cual consiste en mostrar un ejemplo que no cumple el enunciado. También se puede mostrar un contraejemplo sin usar calculadora:
$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$
$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
Por lo tanto, $\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{25}$.

Uso del lenguaje matemático:
En esta clase se trabaja el uso correcto del lenguaje matemático, evitando el error común de expresar la suma de dos raíces con diferente radicando como la raíz de la suma de los radicandos. Para ello se da un contraejemplo en un recuadro y se da una advertencia en otro.

Fecha: **U2 2.8**

Ⓟ Efectúa las operaciones:

a) $7\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ b) $7\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

Ⓢ Tomando $a = \sqrt{3}$ y sustituyendo:

a) $7a + 2a = 9a$
$= 9\sqrt{3}$

b) $7a - 2a = 5a$
$= 5\sqrt{3}$

Ⓡ
a) $5\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{2}$
c) $-6\sqrt{5}$ d) $12\sqrt{6} + 8$
e) $-5\sqrt{2} - 6$ f) $16\sqrt{5} + 4\sqrt{7}$
g) $7\sqrt{6} + 5\sqrt{2}$ h) $-3\sqrt{7} - 4\sqrt{3}$

Tarea: página 49 del Cuaderno de Ejercicios.

2.9 Suma y resta de raíces cuadradas utilizando simplificación y racionalización

P

Efectúa las siguientes operaciones: a) $\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$ b) $\sqrt{12} - \frac{6}{\sqrt{3}}$.

S

a) Simplificando cada raíz cuadrada:

$$\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3^2} = 3\sqrt{2}$$
$$\sqrt{32} = \sqrt{2 \times 4^2} = 4\sqrt{2}$$
$$\sqrt{50} = \sqrt{2 \times 5^2} = 5\sqrt{2}$$

Y sumando las raíces cuadradas:

$$\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{50} = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$$
$$= (3 - 4 + 5)\sqrt{2}$$
$$= 4\sqrt{2}$$

b) Simplificando una raíz cuadrada y racionalizando la otra:

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$$
$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6}{3}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Y restando las raíces cuadradas:

$$\sqrt{12} - \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$
$$= 0$$

A las raíces cuadradas con igual radicando se les conoce como **raíces semejantes.**

C

Para sumar y restar raíces cuadradas con radicandos diferentes:

1. Se simplifican los términos a su mínima expresión.
2. Se racionaliza las raíces que sean posibles.
3. Se efectúan las sumas y restas con raíces semejantes.

Por ejemplo: $\sqrt{20} - \sqrt{45} + \frac{30}{\sqrt{5}}$.

1. $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
   $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
2. $\frac{30}{\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{30}{5}\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$
3. $\sqrt{20} - \sqrt{45} + \frac{30}{\sqrt{5}}$
   $= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas:

a) $\sqrt{20} + \sqrt{45}$
$5\sqrt{5}$

b) $\sqrt{48} + \sqrt{75} + \sqrt{27}$
$12\sqrt{3}$

c) $\sqrt{12} - \sqrt{3} + \sqrt{27}$
$4\sqrt{3}$

d) $\sqrt{12} + \frac{3}{\sqrt{3}}$
$3\sqrt{3}$

e) $\sqrt{63} + \frac{28}{\sqrt{7}}$
$7\sqrt{7}$

f) $\sqrt{72} - \frac{8}{\sqrt{2}}$
$2\sqrt{2}$

g) $\sqrt{28} + \sqrt{7} + \frac{35}{\sqrt{7}}$
$8\sqrt{7}$

h) $\sqrt{98} - \sqrt{50} + \frac{18}{\sqrt{2}}$
$11\sqrt{2}$

i) $\sqrt{75} - \sqrt{12} - \frac{3}{\sqrt{3}}$
$2\sqrt{3}$

Indicador de logro

2.9 Suma y resta de raíces cuadradas, utilizando simplificación y racionalización.

Secuencia

Anteriormente se estableció el método para sumar raíces cuadradas semejantes, ahora se utilizarán las herramientas de simplificación y racionalización para obtener raíces semejantes y aplicar lo visto en la clase anterior.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Realizar simplificaciones y luego sumar raíces cuadradas, también aplicar la racionalización y sumar raíces cuadradas, con lo cual se pueden realizar operaciones más complejas, que impliquen mayor cantidad de procedimientos. Se utilizan raíces de números que los estudiantes ya han simplificado o racionalizado, con el fin de que no pierdan tiempo en hacer el cálculo y se centren en el objetivo de la clase que es sumar raíces utilizando simplificación o racionalización de raíces. A partir del literal b) se puede mencionar que dos cantidades que no parecen iguales, luego de racionalizar, sí pueden serlo (en valor absoluto).

Ⓒ Analizar en forma general cómo se resolvería un problema que tenga radicales que se puedan tanto simplificar como racionalizar, para realizar sumas con números expresados de diferentes maneras.

Solución de algunos ítems:

a) $\sqrt{20} + \sqrt{45} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$
$= 5\sqrt{5}$

b) $\sqrt{48} + \sqrt{75} + \sqrt{27} = 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$
$= 12\sqrt{3}$

c) $\sqrt{12} - \sqrt{3} + \sqrt{27} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 3\sqrt{3}$
$= 4\sqrt{3}$

d) $\sqrt{12} + \frac{3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3}$
$= 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$
$= 3\sqrt{3}$

Fecha: **U2 2.9**

Ⓟ Efectúa las operaciones:

a) $\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$ b) $\sqrt{12} - \frac{6}{\sqrt{3}}$

Ⓢ a) $\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{50} = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$
$= 4\sqrt{2}$

b) $\sqrt{12} - \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - \frac{6\sqrt{3}}{3}$
$= 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$
$= 0$

Ⓡ a) $5\sqrt{5}$ b) $12\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{3}$ e) $7\sqrt{7}$ f) $2\sqrt{2}$
g) $8\sqrt{7}$ h) $11\sqrt{2}$ i) $2\sqrt{3}$

Tarea: página 50 del Cuaderno de Ejercicios.

2.10 Operaciones combinadas de raíces cuadradas, parte 1

P

Efectúa la operación $\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+5)$.

S

Tomando $\sqrt{3} = a$:

La propiedad distributiva cumple que:
$a(b+c) = ab + ac$.

Se puede aplicar la propiedad distributiva:

$$\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+5) = a\,(a+5) = a^2 + 5a$$

$$\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+5) = (\sqrt{3})^2 + 5\,(\sqrt{3})$$

$$= 3 + 5\sqrt{3}$$

C

La propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma se cumple para números reales y en particular para raíces cuadradas.

Para 3 números reales a, b, c se cumple que $a(b+c) = ab + ac$.

Por ejemplo: $\sqrt{5}\,(\sqrt{6}+\sqrt{5}) = \sqrt{5}\,(\sqrt{6}) + (\sqrt{5})^2$

$= \sqrt{30} + 5$

E

Efectúa la operación $\sqrt{5}\,(\sqrt{45}+7)$.

Se simplifica $\sqrt{45}$: $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Entonces: $\sqrt{5}\,(\sqrt{45}+7) = \sqrt{5}\,(3\sqrt{5}+7) = 3 \times (\sqrt{5})^2 + 7(\sqrt{5}) = 3 \times 5 + 7\sqrt{5} = 15 + 7\sqrt{5}$.

Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas:

Revisa si se simplifica antes de calcular.

a) $\sqrt{7}\,(\sqrt{7}+6)$
$7 + 6\sqrt{7}$

b) $\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-3)$
$2 - 3\sqrt{2}$

c) $\sqrt{5}\,(\sqrt{45}+3)$
$15 + 3\sqrt{5}$

d) $\sqrt{6}\,(\sqrt{24}+9)$
$12 + 9\sqrt{6}$

e) $\sqrt{3}\,(\sqrt{75}-4)$
$15 - 4\sqrt{3}$

f) $\sqrt{5}\,(\sqrt{20}-6)$
$10 - 6\sqrt{5}$

g) $\sqrt{7}\,(\sqrt{7}+\sqrt{3})$
$7 + \sqrt{21}$

h) $\sqrt{2}\,(\sqrt{18}+\sqrt{48})$
$6 + 4\sqrt{6}$

Indicador de logro

2.10 Opera raíces cuadradas utilizando la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma.

Secuencia

Ahora que ya se han tratado las cuatro operaciones básicas para raíces cuadradas, es conveniente trabajar un poco de operaciones combinadas de raíces cuadradas; en un primer momento aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma para luego analizar un caso más complejo de aplicación de la propiedad distributiva (en dos ocasiones), que será tratado en la siguiente clase.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ En la clase 2.8 se considera la raíz cuadrada como variable, ahora se puede aplicar la propiedad distributiva y analizar la forma de realizar estas operaciones combinadas de suma con multiplicación.

Ⓒ Establecer la veracidad de la propiedad distributiva para raíces cuadradas y en general para cualquier número real.

Ⓔ Se da una variante de aplicación de la propiedad distributiva, en la cual para facilitar los cálculos es mejor simplificar antes de operar.

Solución de algunos ítems:

a) $\sqrt{7}\left(\sqrt{7}+6\right)=7+6\sqrt{7}$

b) $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-3\right)=2-3\sqrt{2}$

c) $\sqrt{5}\left(\sqrt{45}+3\right)=\sqrt{5}\left(3\sqrt{5}+3\right)$
$=15+3\sqrt{5}$

d) $\sqrt{6}\left(\sqrt{24}+9\right)=\sqrt{6}\left(2\sqrt{6}+9\right)$
$=12+9\sqrt{6}$

Fecha: **U2 2.10**

Ⓟ Efectúa la operación:

$$\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+5\right)$$

Ⓢ Tomando $a=\sqrt{3}$ y sustituyendo:

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+5\right)&=a(a+5)\\&=a^2+5a\\&=\left(\sqrt{3}\right)^2+5\\&=3+5\sqrt{3}\end{aligned}$$

Ⓔ $\sqrt{5}\left(\sqrt{45}+7\right)=\sqrt{5}\left(3\sqrt{5}+7\right)$
$=15+7\sqrt{5}$

Ⓡ a) $7+6\sqrt{7}$ b) $2-3\sqrt{2}$
c) $15+3\sqrt{5}$ d) $12+9\sqrt{6}$
e) $15-4\sqrt{3}$ f) $10-6\sqrt{5}$
g) $7+\sqrt{21}$ h) $6+4\sqrt{6}$

Tarea: página 51 del Cuaderno de Ejercicios.

2.11 Operaciones combinadas de raíces cuadradas, parte 2

P

Efectúa la operación $(\sqrt{5}+3)(\sqrt{2}+1)$.

S

Desarrollando la multiplicación:

$$(\sqrt{5}+3)(\sqrt{2}+1) = \sqrt{5}(\sqrt{2})+\sqrt{5}(1)+3(\sqrt{2})+3(1)$$
$$= \sqrt{10}+\sqrt{5}+3\sqrt{2}+3$$

Para operar $(a+b)(c+d)$ se efectúa así:

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd.$$

C

La propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma se cumple para números reales y en particular para raíces cuadradas, también en el caso $(a+b)(c+d)$.

Para 4 números reales a, b, c, d se cumple que $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$.

Por ejemplo: $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$$(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \sqrt{7}(\sqrt{2})+\sqrt{7}(\sqrt{3})+\sqrt{3}(\sqrt{2})+(\sqrt{3})^2$$
$$= \sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{6}+3$$

E

Efectúa la operación $(\sqrt{2}+1)^2$.

Aplicando los productos notables:

$$(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2})^2+2(\sqrt{2})(1)+(1)^2$$
$$= 2+2\sqrt{2}+1$$
$$= 3+2\sqrt{2}$$

Desarrollo del producto notable:

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas. Simplifica las respuestas a su mínima expresión.

a) $(\sqrt{7}+2)(\sqrt{5}-4)$
$\sqrt{35}+2\sqrt{5}-4\sqrt{7}-8$

b) $(\sqrt{6}+5)(\sqrt{6}+4)$
$26+9\sqrt{6}$

c) $(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}-7)$
$23-10\sqrt{2}$

d) $(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})$
2

e) $(\sqrt{5}+6)^2$
$41+12\sqrt{5}$

f) $(\sqrt{3}-2)^2$
$7-4\sqrt{3}$

g) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{6})$
$3\sqrt{2}+6+\sqrt{15}+\sqrt{30}$

h) $(\sqrt{6}-4)(\sqrt{2}-2)$
$2\sqrt{3}-2\sqrt{6}-4\sqrt{2}+8$

i) $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$
1

Indicador de logro

2.11 Opera raíces cuadradas utilizando la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma.

Secuencia

Ahora que ya se ha visto que la propiedad distributiva se cumple para las raíces cuadradas y los números reales, se puede aplicar para el caso en el que se multiplican dos números sumados (o restados) con otros dos números sumados (o restados), en donde se debe aplicar dos veces la propiedad distributiva.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Aplicar la propiedad distributiva para realizar diferentes tipos de operaciones combinadas de sumas y restas con multiplicación.

Ⓒ Extender los resultados de aplicación de la propiedad distributiva a las raíces cuadradas y números reales.

Ⓔ Aplicar lo establecido en la Ⓒ para realizar cálculos de cuadrados perfectos y asociar el proceso con los productos notables de polinomios.

Solución de algunos ítems:

a) $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{7}-4) = \sqrt{35}-4\sqrt{7}$
$+ 2\sqrt{5} - 8$

b) $(\sqrt{6}+5)(\sqrt{6}+4) = (\sqrt{6})^2 + 9\sqrt{6} + 20$
$= 26 + 9\sqrt{6}$

c) $(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}-7) = (\sqrt{2})^2 - 10\sqrt{2} + 21$
$= 23 - 10\sqrt{2}$

d) $(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5}) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2$
$= 7 - 5$
$= 2$

Fecha: **U2 2.11**

Ⓟ Efectúa la operación:
$(\sqrt{5}+3)(\sqrt{2}+1)$

Ⓢ $(\sqrt{5}+3)(\sqrt{2}+1) = \sqrt{5}(\sqrt{2}) + \sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 3$

$= \sqrt{10} + \sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 3$

Ⓔ Efectúa la operación:
$(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1$
$= 3 + 2\sqrt{2}$

Ⓡ a) $\sqrt{35} - 4\sqrt{7} + 2\sqrt{5} - 8$
b) $9\sqrt{6} + 26$
c) $23 - 9\sqrt{2}$
d) 2
e) $41 + 12\sqrt{5}$
f) $7 - 4\sqrt{3}$
g) $3\sqrt{2} + 6 + \sqrt{15} + \sqrt{30}$
h) $2\sqrt{3} - 2\sqrt{6} - 4\sqrt{2} + 8$
i) 1

Tarea: página 52 del Cuaderno de Ejercicios.

2.12 Practica lo aprendido

1. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).

   a) $\sqrt{121} = 11$ entonces $\sqrt{12.1} = 1.1$. F

   b) Al realizar la división $\sqrt{8} \div \sqrt{2}$ se obtiene un número racional. F

   c) El resultado de efectuar $2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$ es $2 \times 3 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. V

   d) El resultado de efectuar $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es $\sqrt{2+3} = \sqrt{5}$. F

   e) Al racionalizar el número $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ se obtiene el número $\sqrt{2}$. F

2. Realiza las siguientes multiplicaciones de raíces cuadradas.

   a) $\sqrt{7} \times \sqrt{2}$ $\sqrt{14}$ b) $(-\sqrt{6}) \times \sqrt{10}$ $-2\sqrt{15}$ c) $(-\sqrt{6}) \times (-\sqrt{14})$ $2\sqrt{21}$

3. Realiza las siguientes divisiones de raíces cuadradas.

   a) $\sqrt{5} \div \sqrt{7}$ $\sqrt{\frac{5}{7}}$ b) $\sqrt{6} \div (-\sqrt{14})$ $-\sqrt{\frac{3}{7}}$ c) $(-\sqrt{6}) \div (-\sqrt{24})$ $\frac{1}{2}$

4. Expresa los siguientes números sin el símbolo de radical.

   a) $\sqrt{900}$ 30 b) $-\sqrt{\frac{400}{81}}$ $-\frac{20}{9}$

5. Expresa los siguientes números como la raíz cuadrada de un número.

   a) $2\sqrt{5}$ $\sqrt{20}$ b) $7\sqrt{2}$ $\sqrt{98}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ $\sqrt{\frac{2}{25}}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ $\sqrt{\frac{5}{16}}$

2.13 Practica lo aprendido

1. Simplifica los siguientes números a su mínima expresión.

   a) $\sqrt{27}$ $3\sqrt{3}$ b) $\sqrt{\frac{11}{64}}$ $\frac{\sqrt{11}}{8}$ c) $\sqrt{405}$ $9\sqrt{5}$

2. Efectúa las siguientes multiplicaciones de raíces cuadradas.

   a) $\sqrt{45} \times \sqrt{28}$ $6\sqrt{35}$ b) $\sqrt{30} \times \sqrt{21}$ $3\sqrt{70}$

3. Racionaliza las siguientes raíces cuadradas.

   a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ $\frac{\sqrt{6}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ $\frac{\sqrt{35}}{7}$ c) $\frac{30}{\sqrt{5}}$ $\frac{30\sqrt{5}}{5}$

4. Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas.

   a) $6\sqrt{7} + 9\sqrt{7}$ $15\sqrt{7}$ b) $13\sqrt{5} - 7 - 8\sqrt{5}$ $5\sqrt{5} - 7$ c) $\sqrt{3} - 5\sqrt{7} + 4\sqrt{3}$ $5\sqrt{3} - 5\sqrt{7}$

   d) $\sqrt{75} + \sqrt{48}$ 9 e) $\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{7}$ 0 f) $\sqrt{98} - \frac{20}{\sqrt{2}}$ $-3\sqrt{2}$

5. Efectúa las siguientes operaciones de raíces cuadradas.

   a) $\sqrt{5}\,(\sqrt{5} - 6)$ $5 - 6\sqrt{5}$ b) $\sqrt{3}\,(\sqrt{75} - 8)$ $15 - 8\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}\,(\sqrt{7} - \sqrt{5})$ $\sqrt{35} - 5$

   d) $(\sqrt{3} - 7)(\sqrt{3} - 5)$ $38 - 12\sqrt{3}$ e) $(\sqrt{8} + \sqrt{6})(\sqrt{8} - \sqrt{6})$ 2 f) $(\sqrt{5} - 4)^2$ $21 - 8\sqrt{5}$

Indicador de logro

2.12 Resuelve problemas sobre operaciones con raíces cuadradas.

Solución de algunos ítems:

Solución de algunos ítems de la clase 2.12:

1. a) $\sqrt{12.1} = \sqrt{\frac{121}{10}} = \frac{11}{\sqrt{10}}$ el cual es irracional.

   b) $\sqrt{8} \div \sqrt{2} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$

   c) $2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$
   $= 6 \times 2$
   $= 12$

   d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3$
   $= 5 + 2\sqrt{6} \neq 5$

   e) $\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{6}{3}$

2. a) $\sqrt{7} \times \sqrt{2} = \sqrt{7 \times 2}$
   $= \sqrt{14}$

   b) $(-\sqrt{6}) \times \sqrt{10} = -\sqrt{6 \times 10}$
   $= -2\sqrt{15}$

   c) $(-\sqrt{6}) \times (-\sqrt{14}) = \sqrt{3 \times 2 \times 2 \times 7}$
   $= 2\sqrt{21}$

3. c) $(-\sqrt{6}) \div (-\sqrt{24}) = \sqrt{\frac{6}{24}}$
   $= \sqrt{\frac{1}{4}}$
   $= \frac{1}{2}$

4. b) $-\sqrt{\frac{400}{81}} = -\sqrt{\frac{2^2 \times 2^2 \times 5^2}{3^2 \times 3^2}}$
   $= -\frac{2 \times 2 \times 5}{3 \times 3}$
   $= -\frac{20}{9}$

5. b) $2\sqrt{5} = \sqrt{5 \times 2^2}$
   $= \sqrt{20}$

Solución de algunos ítems de la clase 2.13:

1. a) $\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \times 3}$
   $= 3\sqrt{3}$

2. a) $\sqrt{45} \times \sqrt{28} = \sqrt{3^2 \times 5 \times 2^2 \times 7}$
   $= 6\sqrt{35}$

3. a) $\frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

4. e) $\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{7} = 2\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + \sqrt{7}$
   $= 0$

5. d) $(\sqrt{3} - 7)(\sqrt{3} - 5) = (\sqrt{3})^2 - 12\sqrt{3} + 35$
   $= 38 - 12\sqrt{3}$

Tarea: página 53 del Cuaderno de Ejercicios.

2.14 Resolución de problemas con números reales

P

En la escuela de Mario se han destinado \$225 para comprar las camisas de la promoción. Si el número de camisas coincide con el precio de cada una de ellas, ¿cuánto es el costo de cada camisa?

S

- Si fueran 3 camisas, cada camisa debería costar \$3 y se gastarían \$9 en total.
- Si fueran 10 camisas, cada camisa debería costar \$10 y se gastarían \$100 en total.

En general, tomando a como el costo de cada camisa.
El problema menciona que el número de camisas coincide con el precio de ellas.

Entonces, se compraron a camisas a un precio de a dólares.
Y como el gasto total es \$225, se cumple que $a^2 = 225$.

Por lo tanto, el costo de cada camisa es: $\sqrt{225}$.
Descomponiendo en factores primos: $\sqrt{3^2 \times 5^2} = 3 \times 5 = 15$.

Recuerda que $\sqrt{225}$ significa el número positivo que elevado al cuadrado da 225.

El costo de cada camisa es de **\$15**.

C

Para resolver una situación problemática se siguen los pasos:

1. Identificar la información que brinda el problema.

2. Si es posible realizar un esquema de la situación del problema.

3. Buscar un método de solución para el problema.

4. Brindar la respuesta al problema planteado.

5. Verificar si la respuesta satisface todas las condiciones del problema.

1. En la escuela de Carmen gastarán \$144 para comprar los uniformes de los intramuros, si el número de uniformes coincide con el precio de cada uno de ellos, ¿cuánto es el costo de cada uniforme?

   \$12

2. Un tablero de ajedrez es cuadrado y tiene 64 cuadritos, ¿cuántos cuadritos tiene cada lado del tablero?

   8 cuadritos por lado

3. Se enladrillará un terreno cuadrado con baldosas cuadradas de 0.25 m cada una, ¿cuántas baldosas hay que comprar si el terreno tiene un área de 25 m^2?

   400 baldosas para todo el terreno

Unidad 2

Indicador de logro

2.12 Resuelve problemas de aplicación utilizando conceptos sobre raíces cuadradas.

Secuencia

Una vez estudiada toda la unidad, se puede introducir la resolución de problemas aplicando los conocimientos sobre raíz cuadrada, esta clase introducirá de alguna forma la siguiente unidad, correspondiente a la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Los estudiantes iniciarán aplicando la técnica de “prueba y error”, probando algunos números que cumplan las condiciones del problema, puede que algunos determinen la cantidad de camisas de esta manera. Se pretende que al compartir la solución esta implique una ecuación cuadrática sin mencionarles que lo es..

Ⓒ Se brinda un esquema general para el abordaje y resolución de un problema, a modo de dar una estrategia general al estudiante sobre la resolución de problemas..

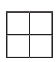
Solución de algunos ítems:

1. Este problema puede ser realizado con lo visto en la clase, puesto que es la misma situación y solo cambia el total, se espera que los estudiantes puedan dar la solución y simplificarla de manera directa:

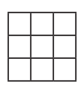
$$\sqrt{144} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 3^2}$$
$$= 12$$

Por lo tanto, se mandaron a hacer 12 uniformes a $12 cada uno.

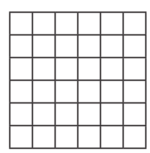
2. Realizando un esquema de la situación, puesto que el tablero es cuadrado tiene la misma cantidad de cuadritos a lo largo y a lo ancho:



4 cuadritos



9 cuadritos



36 cuadritos

Tomando x como la cantidad de cuadritos por lado, se tiene que $x^2 = 64$, entontes $x = \sqrt{64} = 8$ cuadritos por lado.

3. Como el terreno es cuadrado, entonces cada lado del terreno mide 5 m.
Así se puede calcular que se necesitan $5 \div 0.25 = 20$ baldosas por lado, por lo tanto en total se necesitan $20^2 = 400$ baldosas para todo el terreno.

Fecha: **U2 2.14**

Ⓟ El número de camisas coincide con el precio de ellas, y se gastan $225 en total. Encuentra el costo de cada camisa.

Si fueran 3 camisas, costarían $3 y el gasto total sería $9.

Ⓢ Si fueran 10 camisas, costarían $10 y el gasto total sería $100.
En general se debe cumplir que si a = número de camisas.
$a^2 = 225$

Y por la definición de raíces cuadradas, puede ser –25 o 25, pero al ser cantidad de camisas no puede ser negativo.
Por lo tanto son 25 camisas a $25 cada una.

Ⓡ 1. 12 camisas a $12 cada una.

2. 8 cuadritos por lado.

3. 400 baldosas para todo el terreno.

Tarea: página 54 del Cuaderno de Ejercicios.

2.15 Practica lo aprendido

1. Determina los números naturales que puede representar "a" para que se cumpla la siguiente relación:

$$3 < \sqrt{a} < 4$$

10, 11, 12, 13 ,14 y 15.

2. Aproxima los siguientes números tomando en cuenta que $\sqrt{5} \approx 2.236$.

a) $\sqrt{20}$ 4.472

b) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 0.4472

c) $\frac{15}{\sqrt{5}}$ 6.708

3. Considerando $x = \sqrt{5} + \sqrt{7}$, $y = \sqrt{5} - \sqrt{7}$, determina el valor de las siguientes expresiones algebraicas.

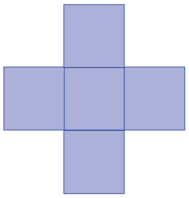
a) $(x + y)^2$ 20

b) xy -2

c) $x^2 - y^2$ $4\sqrt{35}$

4. Determina dos números que sumados dan 318 y la raíz cuadrada de uno es igual a la raíz cuadrada del otro aumentado en 20. 149 y 169

5. Determina el perímetro de la siguiente figura si tiene un área de 245 m^2. La figura está compuesta por cuadrados.



84 m

6. Se sembrarán 170 matas de frijol en dos bandejas cuadradas para cultivo de esquejes (retoños). Si uno de ellos tiene 7 divisiones por lado, ¿cuántas divisiones debe tener el otro recipiente?

11 por cada lado

7. Se deja caer un objeto de un edificio de 10 m de alto, ¿cuántos segundos después de haberlo soltado chocará contra el suelo si el tiempo viene dado por la expresión $t = \sqrt{\frac{10y}{49}}$? (y: altura de la que cae el objeto). Aproximadamente 1.43 segundos.

8. Don Juan quiere cercar su terreno cuadrado de 2 500 m^2 de área. Si cada metro cercado tiene un costo de $3.75, ¿cuánto será el costo total por cercar el terreno? $750

Indicador de logro

2.15 Resuelve problemas sobre conceptos de raíz cuadrada.

Solución de algunos ítems:

1. Para que $3 < \sqrt{a} < 4$, se debe cumplir:
$$9 < a < 16$$
Y los números naturales que lo cumplen son: 10, 11, 12, 13, 14 y 15.

2. a) Simplificando y sustituyendo el valor de $\sqrt{5}$:
$\sqrt{20} = 2\sqrt{5} = 2(2.236) = 4.472$
b) Se racionaliza y sustituye el valor de $\sqrt{5}$.
c) Se racionaliza, se simplifica y sustituye el valor de $\sqrt{5}$.

3. a) $(x + y)^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{7})^2$
$= (2\sqrt{5})^2$
$= 20$

4. En este ejercicio, al decir que la raíz de uno es igual a la raíz del otro aumentado en 20, se hace referencia a la siguiente relación:
$$\sqrt{y} = \sqrt{x + 20}$$

Si x, y son los números buscados, se cumplen las siguientes condiciones:
$$x + y = 318 \qquad (1)$$
$$\sqrt{y} = \sqrt{x + 20} \qquad (2)$$

De (2) se puede deducir que:
$$y = x + 20$$
Y sustituyendo en (1) se obtiene:
$$x + x + 20 = 318$$
$$x = 149$$
$$y = 149 + 20 = 169$$

5. Considerando el lado de cada cuadrado como x, entonces el área de cada cuadrado es x^2.
La figura está formada por 5 de estos cuadrados, entonces:
$$5x^2 = 245$$
$$x^2 = 49$$
Por lo tanto, el lado de cada cuadrado mide 7 m (no puede ser negativo).

Puesto que el perímetro de la figura cuenta con 12 lados de cuadrados, se tiene que esto es 12(7) = 84 (m).

6. Puesto que cada bandeja es cuadrada, y una de ellas tiene 7 divisiones por lado, se puede considerar que la otra tiene x separaciones por lado, entonces se cumple que:
$$x^2 + 7^2 = 170$$
$$x^2 = 170 - 49$$
$$x^2 = 121$$

Aplicando la raíz cuadrada se tiene que la otra bandeja debe tener 11 divisiones por lado.

7. Se sustituye el valor de y por la altura y se calcula el tiempo que tarda en caer el objeto.

8. Se calcula la longitud del lado del terreno cuadrado (aplicando la raíz cuadrada), $\sqrt{2\,500} = 50$, ahora calculando el perímetro, esto es 4(50) = 200 (m). Cada metro tiene un costo de \$3.75, y el costo total es 200(3.75) = 750 (dólares).

Tarea: página 55 del Cuaderno de Ejercicios.

Unidad 3. Ecuación cuadrática

Competencia de la Unidad

Resolver ecuaciones cuadráticas, utilizando diferentes métodos de resolución, para modelar y solucionar problemáticas de la vida cotidiana.

Relación y desarrollo

Séptimo grado

Unidad 5: Ecuaciones de primer grado
- Igualdad de expresiones matemáticas
- Ecuación de primer grado
- Aplicación de ecuaciones de primer grado

Octavo grado

Unidad 2: Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Métodos para resolver ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Noveno grado

Unidad 3: Ecuación cuadrática
- Ecuación cuadrática
- Aplicaciones de la ecuacion cuadrática

Unidad 4: Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + c$
- Función $y = ax^2$
- Función $y = ax^2 + c$

Primer año de bachillerato

Unidad 2: Operaciones con polinomios y números complejos
- Productos notables y factorización
- División de polinomios
- Ecuación cuadrática y números complejos

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Ecuación cuadrática	1	1. Sentido y definición de la ecuación cuadrática
	1	2. Soluciones de la ecuación cuadrática
	1	3. Solución de ecuaciones de la forma $x^2 = c$
	1	4. Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 = c$
	1	Prueba del primer trimestre
	1	5. Solución de ecuaciones de la forma $(x + m) = n$
	1	6. Solución de ecuaciones de la forma $x^2 + bx = 0$
	1	7. Solución de ecuaciones de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$
	1	8. Solución de ecuaciones de la forma $(x + a)(x + b)$
	1	9. Solución de ecuaciones cuadráticas utilizando áreas
	1	10. Solución de ecuaciones completando cuadrados
	1	11. Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$
	1	12. Fórmula general de la ecuación cuadrática
	1	13. Aplicación de la fórmula general de la ecuación cuadrática
	1	14. Métodos para resolver ecuaciones cuadráticas
	2	15. Practica lo aprendido

Lección	Horas	Clases
2. Aplicaciones de la ecuación cuadrática	1	1. Discriminante de la ecuación cuadrática
	1	2. Uso del discriminante en resolución de problemas
	1	3. Resolución de problemas con ecuaciones cuadráticas
	1	4. Practica lo aprendido
	1	5. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 3

21 horas clase + prueba de Unidad 3 + prueba del primer trimestre

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Ecuación cuadrática
Se define una ecuación cuadrática y se le da sentido observando su aparición en distintos problemas. Se estudian las soluciones de ecuaciones cuadráticas utilizando diferentes métodos, en un primer momento resolviendo por raíz cuadrada y luego por métodos de factorización, se estudia también la solución de ecuaciones cuadráticas a través de complementar cuadrados, finalizando con el uso de la fórmula general.

Lección 2: Aplicaciones de la ecuación cuadrática
Se estudia el discriminante de una ecuación cuadrática, así como su uso en la resolución de problemas. Se realizan también diversos problemas de aplicación y análisis sobre ecuaciones cuadráticas.

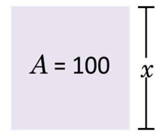
1.1 Sentido y definición de la ecuación cuadrática

P

Don Antonio tiene un terreno cuadrado para cultivar frijol, ¿cómo se puede determinar la medida de los lados del terreno si este tiene un área de 100 m^2?

S

Haciendo un esquema de la situación:



Utilizando x para simbolizar la longitud del lado.

El área del cuadrado es:
$A = L^2$
Donde L es la longitud del lado al cuadrado.

El área del terreno es de 100 m^2, entonces se puede plantear la ecuación:

$$x^2 = 100$$

Para determinar la medida de los lados del terreno hay que resolver esta ecuación.

C

La ecuación planteada en el problema es $x^2 = 100$, si se transpone el 100, también se puede expresar como $x^2 - 100 = 0$, en la cual la incógnita está elevada al cuadrado. Este tipo de ecuaciones son llamadas **ecuaciones cuadráticas.**

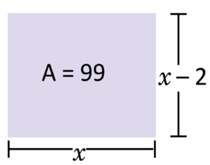
Transponer en una ecuación significa pasar de un miembro de la ecuación al otro.

En general, se define ecuación cuadrática como las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$; con a, b, c números reales y $a \neq 0$.

Por ejemplo: $2x^2 - 3 = 0$, $9x^2 - 3 = 0$, $(x + 5)^2 - 16 = 0$, $x^2 + 4x + 1 = 0$, $x^2 + 4x = 0$, etc.

E

Don Miguel tiene un terreno rectangular cuyo largo tiene 2 m más que el ancho y su área es de 99 m^2. Determina la ecuación que simboliza el problema representando con x la medida del largo.



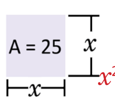
Aplicando el área del rectángulo ($A = base \times altura$). $x(x - 2) = 99$

Desarrollando el producto: $x^2 - 2x = 99$

Transponiendo el 99: $x^2 - 2x - 99 = 0$

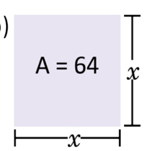
1. Encuentra la ecuación que determina la longitud desconocida en cada figura.

a)



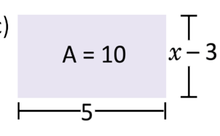
$x^2 - 25 = 0$

b)



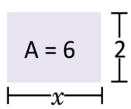
$x^2 - 64 = 0$

c)



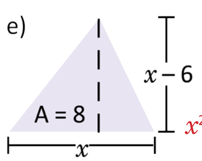
$5(x - 3) = 10$

d)



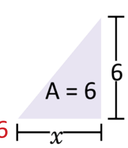
$2x - 6 = 0$

e)



$x^2 - 6x = 16$

f)



$3x - 6 = 0$

También se puede plantear el mismo problema con un triángulo, se debe tener presente que el área del triángulo es:
$A = \frac{base \times altura}{2}$

2. Determina cuáles de las ecuaciones planteadas en el ejercicio anterior son cuadráticas. a), b), e).
3. Determina la ecuación para encontrar dos números enteros consecutivos que al multiplicarlos resulten 42. x: el menor número. $x^2 + x - 42 = 0$

Indicador de logro

1.1 Plantea ecuaciones cuadráticas e identifica la necesidad de resolverla.

Secuencia

El estudio de las ecuaciones comienza en séptimo grado, se analizan las distintas propiedades de la igualdad y se utilizan para encontrar el valor numérico que satisface la igualdad. Posteriormente en octavo grado, se le da sentido a una ecuación de primer grado con dos incógnitas a través de problemas cotidianos y se estudian los distintos métodos para solucionar sistemas de ecuaciones.

En la unidad anterior se estudió la raíz cuadrada, analizando su sentido y definición, estableciendo raíces cuadradas positivas y negativas y realizando operaciones con ellas; en esta unidad es importante que el estudiante domine este conocimiento, sobre todo el hecho de que hay dos números que al elevarse al cuadrado dan como resultado el mismo número.

Propósito

Ⓟ,Ⓢ Al traducir el problema al lenguaje algebraico resulta el planteamiento de una ecuación cuadrática, no se trata de solucionar este problema, sino de obtener el planteamiento de la ecuación.

Ⓒ Definir formalmente una ecuación cuadrática como ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$; como anteriormente se definieron los números reales, se debe establecer que a, b y c son números reales y $a \neq 0$, de lo contrario la ecuación no sería de segundo grado.

Solución de algunos ítems:

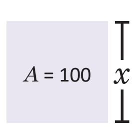
3. Sea x el número entero, su consecutivo es $x + 1$.
   Entonces, al multiplicar ambos:
   $x(x + 1) = 42$
   $x^2 + x - 42 = 0$
   Esta es la ecuación cuadrática determinada.

Observación: Se considerará correcto expresar ecuaciones en la forma:
$x^2 = a$ o $x^2 - a = 0$.

Fecha: **U3 1.1**

Ⓟ Don Antonio tiene un terreno cuadrado con área 100 m^2. ¿Cómo se puede determinar la medida de los lados?

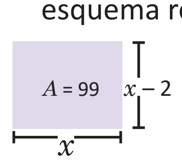
Ⓢ Esquema de la situación:



El área del terreno es 100 m^2.
La ecuación planteada es $x^2 = 100$.

Podemos determinar la medida del lado del cuadrado utilizando esta ecuación.

Ⓔ Si x representa el largo del terreno. El esquema representa la situación.



La ecuación que determina el área del rectángulo es:

$$x(x - 2) = 99$$
$$x^2 - 2x = 99$$
$$x^2 - 2x - 99 = 0$$

Ⓡ
a) $x^2 = 25$
b) $x^2 = 64$
c) $5(x - 3) = 10$
d) $2x = 6$
e) $\frac{x(x-6)}{2} = 8$
f) $3x = 6$

Tarea: página 60 del Cuaderno de Ejercicios.

1.2 Soluciones de la ecuación cuadrática

P

Determina cuáles de los números, –4, –3, 3, 4, son soluciones de las ecuaciones.

a) $3x = 12$ b) $x^2 - x - 12 = 0$

S

Utilizando –4 y sustituyendo en ambas ecuaciones.
a) $3(-4) = -12$ b) $(-4)^2 - (-4) - 12 = 16 + 4 - 12 = 8$
–4 no es solución de ninguna de las ecuaciones.

Utilizando –3 y sustituyendo en ambas ecuaciones.
a) $3(-3) = -9$ b) $(-3)^2 - (-3) - 12 = 9 + 3 - 12 = 0$
–3 no es solución de la ecuación a), pero si es solución de la ecuación b).

Utilizando 3 y sustituyendo en ambas ecuaciones.
a) $3(3) = 9$ b) $(3)^2 - (3) - 12 = 9 - 3 - 12 = -6$
3 no es solución de ninguna de las ecuaciones.

Utilizando 4 y sustituyendo en ambas ecuaciones.
a) $3(4) = 12$ b) $(4)^2 - (4) - 12 = 16 - 4 - 12 = 0$
4 es solución de ambas ecuaciones.

Por lo tanto, la ecuación a) tiene una solución (4), y la ecuación b) tiene dos soluciones (4 y –3).

C

Los valores de la incógnita que cumplen una ecuación cuadrática se llaman **soluciones.**

El proceso de **resolver una ecuación cuadrática** consiste en encontrar todas las soluciones de ella. En la ecuación cuadrática pueden haber hasta dos soluciones.

Las ecuaciones lineales tienen solamente una solución.

1. Determina cuáles de los números en los paréntesis son soluciones de las ecuaciones.

a) $x^2 - 9 = 0$ (–3, –1, 1, 3) –3, 3
b) $2x - 6 = 0$ (–3, –1, 1, 3) 3
c) $x^2 - 2x - 8 = 0$ (–4, –2, 2, 4) –2, 4
d) $2x + 8 = 0$ (–4, –2, 2, 4) –4
e) $x^2 + 4x + 3 = 0$ (–3, –1, 1, 3) –3, –1
f) $4x + 12 = 0$ (–3, –1, 1, 3) –3
g) $x^2 - 8x + 16 = 0$ (–4, –2, 2, 4) 4
h) $x - 4 = 0$ (–3, –1, 1, 3) Ningún valor es solución.

2. Determina cuáles de las ecuaciones del numeral anterior son cuadráticas y cuáles lineales. Justifica la respuesta. a), c), e), g) son cuadráticas.
b), d), f) y h) son lineales.

Unidad 3

Indicador de logro

1.2 Determina la cantidad de soluciones que tiene una ecuación cuadrática.

Secuencia

En la clase anterior, a través del planteamiento de algunas situaciones traducidas al lenguaje algebraico se le dio sentido y significado a una ecuación cuadrática, para esta clase se estudia el hecho de que una ecuación cuadrática puede tener hasta dos soluciones.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Verificar si un número es solución de una ecuación sustituyendo el número por la variable y comprobando si se cumple la igualdad.

Ⓒ Definir las soluciones de una ecuación cuadrática y establecer que una ecuación cuadrática puede contar con cero, una o hasta dos soluciones y reconocer que las ecuaciones lineales tienen a lo sumo una solución.

Fecha:

U3 1.2

Ⓟ Cuáles de los números, –4, –3, 3, 4, son soluciones de las ecuaciones.

a) $3x = 12$

b) $x^2 - x - 12 = 0$

Ⓢ Para –4.

a) $3(-4) = -12$ b) $(-4)^2 - (-4) - 12 = 8$

–4 no es solución de ninguna ecuación.

Para –3.

a) $3(-3) = -9$ b) $(-3)^2 - (-3) - 12 = 0$

–3 es solución de b).

Para 3.

a) $3(3) = 9$ b) $(3)^2 - (3) - 12 = -6$

3 no es solución de ninguna ecuación.

Para 4.

a) $3(4) = 12$ b) $(4)^2 - (4) - 12 = 0$

4 es solución de ambas ecuaciones.

Ⓡ a) –3 y 3

b) 3

c) –2 y 4

d) –4

e) –1 y e)

f) –3

g) 4

h) 4

Tarea: página 61 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Solución de ecuaciones de la forma $x^2 = c$

P

Resuelve la ecuación cuadrática planteada en el problema de don Antonio de la primera clase.

$$x^2 = 100$$

S

Para resolver esta ecuación se puede utilizar la idea de las raíces cuadradas de un número.
Como $x^2 = 100$ significa que al elevar x al cuadrado da como resultado 100.

Entonces: $x = \pm\sqrt{100}$.

Expresando sin el símbolo de radical, $x = \pm 10$.

Al elevar un número al cuadrado da el mismo resultado que elevar el negativo del número al cuadrado:

$$3^2 = (-3)^2 = 9$$

El problema de don Antonio era sobre la longitud de los lados del terreno, por lo que la solución negativa no se puede tomar en cuenta y por lo tanto, la solución del problema es: **10 m.**

C

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 = c$ se siguen los pasos:

1. Se resuelve la ecuación determinando las raíces cuadradas de c.

$$x = \pm\sqrt{c}$$

2. Se expresa el número sin el símbolo de radical, si es posible.

Por ejemplo: $x^2 = \frac{1}{4}$

1. $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$
2. $x = \pm\frac{1}{2}$

E

Resuelve la ecuación cuadrática $x^2 - 20 = 0$.

Se transpone el número 20 en la ecuación $x^2 = 20$.

Se resuelve la ecuación $x^2 = 81$. 1. $x = \pm\sqrt{20}$ 2. $x = \pm 2\sqrt{5}$

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 = 16$
$x = \pm 4$

b) $x^2 = \frac{1}{9}$
$x = \pm\frac{1}{3}$

c) $x^2 = \frac{4}{9}$
$x = \pm\frac{2}{3}$

d) $x^2 - 1 = 0$
$x = \pm 1$

e) $x^2 - 9 = 0$
$x = \pm 3$

f) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$
$x = \pm\frac{1}{2}$

g) $\frac{16}{25} - x^2 = 0$
$x = \pm\frac{4}{5}$

h) $\frac{4}{36} - x^2 = 0$
$x = \pm\frac{2}{6}$

2. El hermano de Julia es 4 años mayor que ella y la hermana es 4 años menor, ¿qué edad tiene Julia si al multiplicar las edades de sus hermanos resulta 20? La edad de Julia es 6 años.

Indicador de logro

1.3 Resuelve ecuaciones de la forma $x^2 = c$.

Secuencia

En la clase 1, a partir de un problema se planteó una ecuación y se definió como cuadrática. Para esta clase se utiliza la información de este mismo problema, con el propósito de encontrar los valores que satisfacen la ecuación planteada.

Propósito

Ⓟ,Ⓢ Encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 = 100$. Utilizando el concepto de raíz cuadrada, las soluciones del problema son los números que elevados al cuadrado dan como resultado el valor 100.

Ⓒ Justificar paso a paso el proceso para resolver una ecuación cuadrática de la forma $x^2 = c$; al hacer referencia a esta ecuación es importante mencionar que $c > 0$ y que además siempre existen dos soluciones, una positiva y otra negativa. Siempre hay que recalcar que la ecuación cuadrática de esta forma tiene una solución negativa, y que en este caso, por hablar de una longitud, se descarta y se considera solo la positiva. Considerar que la siguiente expresión es un error: $\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$

Pues $\sqrt{x^2}$ no es necesariamente igual a x, como se vio en la unidad de la raíz cuadrada.

Solución de algunos ítems:

x: edad de Julia.

$$(x + 4)(x - 4) = 20$$
$$x^2 - 16 = 20$$
$$x^2 = 36$$
$$x = \pm 6$$

Como $x > 0$, entonces la edad de Julia es 6 años.

Fecha: **U3 1.3**

Ⓟ Resuelve la ecuación:
$x^2 = 100$

Ⓢ Utilizando el concepto de raíz cuadrada.

$x^2 = 100$
$x = \pm\sqrt{100}$
$x = \pm 10$

Los números que elevados al cuadrado dan 100 son 10 y –10.
Por tanto, son soluciones de la ecuación.

Ⓔ Resuelve la ecuación:
$x^2 - 20 = 0$
$x^2 = 20$
$x = \pm\sqrt{20}$
$x = \pm 2\sqrt{5}$

Ⓡ 1. a) $x = \pm 4$
b) $x = \pm\frac{1}{3}$
c) $x = \pm\frac{2}{3}$
d) $x = \pm 1$
e) $x = \pm 3$

Tarea: página 62 del Cuaderno de Ejercicios.

1.4 Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 = c$

P

Marta y Mario juegan a "las adivinanzas", Marta le dice a Mario que ella está pensando un número que multiplicado con su triple da como resultado 12, ¿cómo puede determinar Mario el número que podría estar pensando Marta?

S

Representando por x el número que está pensando Marta.
Entonces el triple del número que está pensando Marta es representado por "$3x$".
Luego para representar que el número multiplicado con su triple es 12 , se plantea la siguiente ecuación: $x(3x) = 12$.

Multiplicando los términos: $3x^2 = 12$.

Despejando "x^2", $x^2 = \frac{12}{3} \Rightarrow x^2 = 4$.

Resolviendo la ecuación, $x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$.

Por lo tanto, el número que está pensando Marta podría ser: **+2 o −2**.

C

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 = c$, $c \neq 0$ se siguen los pasos:

1. Se despeja el término x^2.
$$x^2 = \frac{c}{a}$$
2. Se resuelve la ecuación determinando las raíces cuadradas de $\frac{c}{a}$.
$$x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$
3. Se expresa sin el símbolo de radical o se simplifica a la mínima expresión, cuando se pueda.

Observa que si el signo de a es diferente al signo de c entonces $\frac{a}{c}$ tiene signo negativo, entonces la ecuación no tendría solución en los números reales porque no están definidas las raíces cuadradas de un número negativo.

E

Resuelve la ecuación cuadrática: $3x^2 - 2 = 0$

Se transpone el −2 en la ecuación: $3x^2 = 2$

Se resuelve la ecuación $3x^2 = 2$. 1. $x^2 = \frac{2}{3}$ 2. $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

Cuando hay un radical en el denominador debe racionalizarse.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 = 18$
$x = \pm 3$

b) $-4x^2 = -1$
$x = \pm\frac{1}{2}$

c) $x^2 = 7$
$x = \pm\sqrt{7}$

d) $-4x^2 + 4 = 0$
$x = \pm 1$

e) $10 - 2x^2 = 0$
$x = \pm\sqrt{5}$

f) $-x^2 + 2 = 0$
$x = \pm\sqrt{2}$

Observa que las ecuaciones de la forma $x^2 = c$; son un caso especial de las de la forma $ax^2 = c$, cuando $a = 1$.

2. Encuentra las longitudes de una cancha de baloncesto, si el largo de la cancha es el doble de su ancho y tiene un área de 450 m². Las longitudes de la cancha de baloncesto son 15 m y 30 m.

Unidad 3

61

Indicador de logro

1.4 Resuelve ecuaciones de la forma $ax^2 = c$.

Secuencia

Hasta esta clase se han resuelto ecuaciones cuadráticas donde se deben realizar a lo sumo dos pasos, uno de ellos puede ser despejar primero la variable y luego extraer la raíz cuadrada, para esta clase se estudia un tipo de ecuación cuadrática que puede resolverse hasta con tres pasos, es decir, en estos casos, se agrega el paso dividir por el número que está multiplicando a la variable.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ A partir del Problema inicial se debe plantear una ecuación del tipo: $ax^2 = c$, esta ecuación se resuelve utilizando las propiedades de la igualdad vistas en séptimo y las propiedades de los radicales vistas en la unidad anterior.

Ⓒ Establecer los pasos que se deben seguir para resolver una ecuación cuadrática del tipo $ax^2 = c$.

Ⓔ La diferencia con el Problema inicial se encuentra en la forma de la ecuación, en este caso, se necesita transponer el término constante y luego dividir por el coeficiente que acompaña a la variable.

Solución de algunos ítems:

1. e) $10 - 2x^2 = 0$

$$-2x^2 = -10$$
$$x^2 = 5$$
$$x = \pm\sqrt{5}$$

2. Sea a: el ancho de la cancha de baloncesto.

$$a(2a) = 450$$
$$2a^2 = 450$$
$$a^2 = 225$$
$$a = \sqrt{225}$$
$$a = \pm 15$$

Como se trata de una longitud, se elige la solución positiva. Por tanto, $a = 15$.

Las longitudes de la cancha de baloncesto son 15 m y 30 m.

Fecha:

U3 1.4

Ⓟ Un número multiplicado con su triple da como resultado 12. ¿Cuál es el número?

Ⓢ Sea x ese número.

$x(3x) = 12$

$3x^2 = 12$

$x^2 = \frac{12}{3}$ Dividiendo por 3

$x = \pm\sqrt{4}$

$x = \pm 2$

Por tanto, Marta pudo pensar dos números: +2 o –2.

Ⓔ Resuelve la ecuación: $3x^2 - 2 = 0$

$3x^2 = 2$ Dividiendo por 3

$x^2 = \frac{2}{3}$

$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

Ⓡ 1. a) -3 y 3

b) $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$

c) $\sqrt{7}$ y $-\sqrt{7}$

d) -1 y 1

e) $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$

Tarea: página 63 del Cuaderno de Ejercicios.

1.5 Solución de ecuaciones de la forma $(x + m)^2 = n$

P

Resuelve la ecuación cuadrática $(x + 1)^2 = 25$.

S

Para resolver esta ecuación se representará la parte dentro del paréntesis $x + 1$ por $w = x + 1$ luego se usa la idea de raíz cuadrada.

$w^2 = 25$ Sustituyendo $w = x + 1$,

$w = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

$x + 1 = \pm 5$ sustituyendo nuevamente $x + 1 = w$.

La estrategia de representar una parte de la ecuación por una letra diferente se conoce como **cambio de variable.**

Es decir, $x + 1 = 5$ y $x + 1 = -5$.

$x = 5 - 1 = 4$ y $x = -5 - 1 = -6$ despejando x.

Finalmente las soluciones de la ecuación $(x + 1)^2 = 25$ son: $\boldsymbol{x = 4}$ y $\boldsymbol{x = -6}$.

C

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $(x + m)^2 = n$ se siguen los pasos:

1. Se cambia la variable $x + m$ por w:
   $w^2 = n$
2. Se resuelve la ecuación de la forma $x^2 = n$:
   $w = \pm\sqrt{n}$
3. Se sustituye a la variable inicial:
   $x + m = \pm\sqrt{n}$
4. Se resuelve para la variable inicial:
   $x = -m \pm\sqrt{n}$

Por ejemplo:

$(x - 3)^2 = 7$ Haciendo $w = x - 3$

1. $w^2 = 7$
2. $w = \pm\sqrt{7}$
3. $x - 3 = \pm\sqrt{7}$
4. $x = 3 \pm\sqrt{7}$

Observa que
Si $n = 0$; la ecuación solo tiene una solución, $x = -m$.

Si n es negativo; la ecuación no tiene solución.

E

Resuelve la ecuación cuadrática: $(x - 5)^2 - 12 = 0$.

Se transpone -12 en la ecuación: $(x - 5)^2 = 12$.

Se resuelve la ecuación $(x - 5)^2 = 12$.

1. $w^2 = 12$ 2. $w = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$ 3. $x - 5 = \pm 2\sqrt{3}$ 4. $x = 5 \pm 2\sqrt{3}$

---

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $(x + 4)^2 = 4$
$x = -6, -2$

b) $(x - 2)^2 = 2$
$x = 2 \pm \sqrt{2}$

c) $(-x - 3)^2 = 8$
$x = 3 \pm 2\sqrt{2}$

d) $(x + 2)^2 = 0$
$x = -2$

e) $(x - 4)^2 - 16 = 0$
$x = 0, 8$

f) $(x + 3)^2 - 3 = 0$
$x = -3 \pm \sqrt{3}$

g) $(-x + 6)^2 - 12 = 0$
$x = 6 \pm 2\sqrt{3}$

h) $(1 - x)^2 = 0$
$x = 1$

2. ¿Cuánto debe aumentar cada lado del terreno cuadrado de don Antonio si quiere cultivar 144 m^2 de frijol?

Los lados del terreno deben aumentar en 2 m.

Recuerda que los lados del terreno de don Antonio medían 10 m cada uno, y se determinó en la clase 3 de esta lección.

Indicador de logro

1.5 Resuelve ecuaciones de la forma $(x + m)^2 = n$.

Secuencia

En clases anteriores se han resuelto ecuaciones cuadráticas de la forma: $ax^2 = c$, incluyendo el caso especial cuando $a = 1$, en estos casos, el exponente 2 corresponde a la variable; para esta clase, 2 es el exponente de $x + m$.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Se utiliza un cambio de variable para llevar la expresión al caso visto en la clase 1.3, luego de esto se debe realizar el proceso ya conocido por el estudiante; es importante regresar a la variable original y resolver la ecuación lineal para esta variable.

Se establecen formalmente los pasos a seguir para resolver una ecuación de la forma $(x + m)^2 = n$. Es importante hacer ver que si $n = 0$ la solución es simplemente $x = -m$ y si $n < 0$, la ecuación no posee solución definida en los números reales.

Solución de algunos ítems:

2. Utilizando la información del problema, se plantea la ecuación:

$(x + 10)^2 = 144$ Tomando: $w = x + 10$
$w^2 = 144$
$w = \pm\sqrt{144}$
$w = \pm 12$ Sustituyendo: $x + 10 = w$
$x + 10 = \pm 12$
$x = -10 \pm 12$

Entonces, $x = -22$ y $x = 2$.
Como se trata de una longitud, se toma $x > 0$.

Por tanto, el lado del terreno debe aumentar en 2 m.

Fecha: **U3 1.5**

Ⓟ Resuelve la ecuación cuadrática:
$(x + 1)^2 = 25$

Ⓢ $(x + 1)^2 = 25$

$w^2 = 25$ Tomando $w = x + 1$
$w = \pm\sqrt{25}$
$w = \pm 5$

$x + 1 = \pm 5$ Sustituyendo $x + 1 = w$
$x = -1 \pm 5$

Por tanto, las soluciones son $x = 4$ y $x = -6$.

Ⓔ $(x - 5)^2 - 12 = 0$
$(x - 5)^2 = 12$ Transponiendo 12
$w^2 = 12$ Tomando $w = x - 5$
$w = \pm\sqrt{12}$
$w = \pm 2\sqrt{3}$
$x - 5 = \pm 2\sqrt{3}$
$x = 5 \pm 2\sqrt{3}$

Ⓡ 1. a) $x = -6, -2$
b) $x = 2 \pm\sqrt{2}$
c) $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$

Tarea: página 64 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 Solución de ecuaciones de la forma $x^2 + bx = 0$

P

Resuelve la ecuación cuadrática $x^2 + 5x = 0$.

S

La siguiente propiedad se cumple para cualesquiera números reales A, B.

Si $A \times B = 0$ entonces $A = 0$ o $B = 0$

Además, la expresión $x^2 + 5x$ se puede factorizar sacando factor común x: $x^2 + 5x = 0$.

Y se tiene la ecuación: $x(x + 5) = 0$.

Se cumple que $x = 0$ o $x + 5 = 0$.

Resolviendo la ecuación lineal $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$.

Y las soluciones para la ecuación cuadrática $x^2 + 5x = 0$ son: $\boldsymbol{x = 0}$ o $\boldsymbol{x = -5}$.

C

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + bx = 0$ se siguen los pasos:

1. Se factoriza la expresión utilizando factor común:
$$x(x + b) = 0$$

2. Se aplica la propiedad enunciada al inicio y se determinan las ecuaciones lineales a resolver:
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x + b = 0$$

3. Se determinan las soluciones de la ecuación cuadrática resolviendo la ecuación lineal $x + b = 0$.
$$x = 0 \qquad \text{o} \quad x + b = 0 \Rightarrow x = -b$$

Observa que la solución $x = 0$ siempre es solución de las ecuaciones de la forma $x^2 + bx = 0$.

E

¿Cómo se resuelve la ecuación $ax^2 + bx = 0$? Por ejemplo: $3x^2 + 2x = 0$.

Se factoriza $x(a + bx) = 0$ y luego se encuentran las soluciones.

1. $x(3x + 2) = 0$
2. $x = 0$ o $3x + 2 = 0$
3. $x = 0$ o $x = -\frac{2}{3}$

Observa que la solución $x = 0$ siempre es solución de las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$.

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 - 5x = 0$
$x = 0$ o $x = 5$

b) $x^2 + x = 0$
$x = 0$ o $x = -1$

c) $3x^2 + 5x = 0$
$x = 0$ o $x = -\frac{5}{3}$

d) $4x^2 - x = 0$
$x = 0$ o $x = \frac{1}{4}$

e) $-x^2 + x = 0$
$x = 0$ o $x = 1$

f) $-x^2 - 2x = 0$
$x = 0$ o $x = -2$

g) $2x^2 + 8x = 0$
$x = 0$ o $x = -4$

h) $-3x^2 + 6x = 0$
$x = 0$ o $x = 2$

Indicador de logro

1.6 Resuelve ecuaciones de la forma $x^2 + bx = 0$.

Secuencia

Anteriormente se resolvieron ecuaciones donde únicamente aparece la variable con exponente 2 y se da solución a una ecuación de la forma $ax^2 = c$, en esta clase se resuelven ecuaciones que poseen además un término en x con exponente 1, este tipo de ecuaciones se solucionarán utilizando la factorización.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar la factorización y el hecho de que si A × B = 0 entonces A = 0 o bien B = 0; para resolver la ecuación cuadrática, la solución serán aquellos valores que cumplan esta característica.

Es importante observar que para resolver este tipo de ecuaciones se utiliza el factor común visto en la clase 3.2 de la Unidad 1. La variante, respecto al Problema inicial, radica en el coeficiente de x, el cual es distinto de 1 y diferente de cero, por tanto, al factorizar la expresión, resulta $x(ax + b) = 0$; en este caso, resolver la ecuación lineal resultante involucra el proceso adicional de dividir por el coeficiente a.

Solución de algunos ítems:

Item e)

$$-x^2 + x = 0$$
$$x(-x + 1) = 0$$
$$x = 0 \text{ o } -x + 1 = 0$$
$$x = 1$$

En el problema inicial desde el punto de vista de las soluciones como conjunto, debería escribirse $x = 0$ y $x = -5$, pues ambos valores cumplen ser solución. Se escribe $x = 0$ o $x = -5$ debido a la propiedad de los números reales mencionada en el resultado. De ser posible, aclarar esto con los estudiantes.

Fecha: **U3 1.6**

Ⓟ Resuelve la ecuación cuadrática:
$x^2 + 5x = 0$

Ⓢ Para dos números reales cualquiera A y B se cumple que: Si A × B = 0 entonces, A = 0 o B = 0.
$x^2 + 5x = 0$
$x(x + 5) = 0$ Tomando factor común
Se cumple que: $x = 0$ o $x + 5 = 0$
$x = 0$ o $x = -5$

Por tanto, las soluciones son:
$x = 0$ o $x = -5$.

Ⓔ Factoriza: $3x^2 + 2x = 0$
$3x^2 + 2x = 0$
$x(3x + 2) = 0$ Factor común x
$x = 0$ o $3x = -2$
$x = 0$ o $x = -\frac{2}{3}$

Ⓡ a) $x = 0$ o $x = 5$
b) $x = 0$ o $x = -1$
c) $x = 0$ o $x = -\frac{5}{3}$
d) $x = 0$ o $x = \frac{1}{4}$

Tarea: página 65 del Cuaderno de Ejercicios.

1.7 Solución de ecuaciones de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$

P

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática: $x^2 + 4x + 4 = 0$.

S

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = 0$.

Entonces:

$$x + 2 = 0$$
$$\boldsymbol{x = -2}$$

El trinomio cuadrado perfecto se factoriza:
$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$

C

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ se siguen los pasos:

1. Se factoriza la expresión utilizando el trinomio cuadrado perfecto:
   $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 = 0$

2. Se aplica la propiedad enunciada al inicio de la clase 6 y se determina la ecuación lineal a resolver
   $x + a = 0$.

3. Se determinan las soluciones de la ecuación cuadrática:
   $\boldsymbol{x = -a}$

E

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

1. $4x^2 + 4x + 1 = w^2 + 2w + 1 = 0$ Tomando $w = 2x$,

2. $(w + 1)^2 = (2x + 1)^2 = 0$ sustituyendo nuevamente $2x = w$,

3. $2x + 1 = 0$.

   $x = -\frac{1}{2}$

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$
$x = -3$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$
$x = 4$

c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$
$x = \frac{3}{2}$

d) $9y^2 + 6y + 1 = 0$
$y = -\frac{1}{3}$

e) $y^2 - 10y + 25 = 0$
$y = 5$

f) $y^2 + 14y + 49 = 0$
$y = -7$

Indicador de logro

1.7 Resuelve ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2+2ax+a^2 = 0$ utilizando el trinomio cuadrado perfecto.

Secuencia

En la Unidad 1 se estudió la factorización de trinomios de la forma $x^2 + 2ax + a^2$, para esta clase se utiliza este conocimiento para resolver una ecuación de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Como el trinomio $x^2 + 4x + 4 = 0$ se factoriza como $(x + 2)^2 = 0$, el único número que cumple esta relación es -2, por tanto, este tipo de ecuaciones solo tiene una solución.

Ⓔ En este caso, se debe realizar un cambio de variable adecuado para que sea más evidente que se trata de un trinomio cuadrado perfecto y resolver de forma similar al Problema inicial y además la solución de esta ecuación es una fracción.

Solución de algunos ítems:

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$

$(x - 4)^2 = 0$

$x - 4 = 0$

$x = 4$

d) $9y^2 + 6y + 1 = 0$

$w^2 + 2w + 1 = 0$ Tomando $w = 3y$

$(w + 1)^2 = 0$

$w + 1 = 0$ Sustituyendo $3y = w$

$3y + 1 = 0$

$y = -\frac{1}{3}$

Fecha: **U3 1.7**

Ⓟ Resuelve la ecuación:
$x^2 + 4x + 4 = 0$

Ⓢ
$x^2 + 4x + 4 = 0$
$(x + 2)^2 = 0$ Factorizando el trinomio cuadrado perfecto.

Se resuelve como en la clase 1.5
$w^2 = 0$ Tomando $w = x + 2$
$x + 2 = 0.$ Por tanto, $x = -2$.

Ⓔ Resuelve la ecuación: $4x^2 + 4x + 1 = 0$
Tomando $w = 2x$
$4x^2 + 4x + 1 = w^2 + 2w + 1 = 0$
$(w + 1)^2 = 0$
Sustituyendo $2x = w$
$(2x + 1)^2 = 0$
$2x + 1 = 0$
$x = -\frac{1}{2}$

Ⓡ
a) $x = -3$
b) $x = 4$
c) $x = \frac{3}{2}$
d) $y = -\frac{1}{3}$

Tarea: página 66 del Cuaderno de Ejercicios.

1.8 Solución de ecuaciones de la forma $(x + a)(x + b) = 0$

P

Resuelve la ecuación cuadrática: $(x - 2)(x - 3) = 0$.

S

Se tiene $\underbrace{(x - 2)}_{A} \times \underbrace{(x - 3)}_{B} = 0$ se debe cumplir que

$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$

Resolviendo las ecuaciones lineales:

$$x = 2 \quad \text{o} \quad x = 3$$

Para cualesquiera números reales A, B se cumple que Si $A \times B = 0$ entonces $A = 0$ o $B = 0$.

C

Para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $(x - a)(x - b) = 0$ se siguen los pasos:

1. Se aplica la propiedad y se determinan las ecuaciones lineales a resolver:
   $x - a = 0$ o $x - b = 0$
2. Se determinan las soluciones de la ecuación cuadrática resolviendo las ecuaciones lineales:
   $x = a$ o $x = b$

Por ejemplo: $(x + 1)(x - 4) = 0$

1. $x + 1 = 0$ o $x - 4 = 0$
2. $x = -1$ o $x = 4$

E

Resuelve la ecuación cuadrática: $x^2 + 5x + 6 = 0$.

En este caso primero se factoriza la expresión buscando el producto notable correspondiente, 2 números que multiplicados dan 6 y sumados 5, son 3 y 2.

Resolviendo: $x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x + 2) = 0$

1. $x + 3 = 0$ o $x + 2 = 0$
2. $x = -3$ o $x = -2$

Las expresiones de la forma:
$x^2 + (a + b)x + ab = 0$
se factorizan de la siguiente manera:
$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $(x - 2)(x - 1) = 0$
$x = 2$ o $x = 1$

b) $(x + 5)(x - 3) = 0$
$x = -5$ o $x = 3$

c) $(x - 7)(x + 2) = 0$
$x = 7$ o $x = -2$

d) $(x + 4)(x + 3) = 0$
$x = -4$ o $x = -3$

e) $x^2 - 7x + 6 = 0$
$x = 6$ o $x = 1$

f) $x^2 - 2x - 8 = 0$
$x = 4$ o $x = -2$

g) $x^2 + x - 6 = 0$
$x = -3$ o $x = 2$

h) $x^2 - 4x + 3 = 0$
$x = 1$ o $x = 3$

2. Encuentra dos números consecutivos que al elevarlos al cuadrado y luego sumarlos, dé como resultado 25. -4 y -3, también 3 y 4.

Unidad 3

Indicador de logro

1.8 Resuelve ecuaciones cuadráticas de la forma: $(x + a)(x + b) = 0$.

Secuencia

En la clase anterior se estudiaron las ecuaciones cuadráticas que se resuelven factorizando trinomios cuadrados perfectos, para esta clase se resolverán ecuaciones cuadráticas factorizando trinomios que no son cuadrados perfectos.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizando el hecho de que dos números multiplicados entre sí dan como resultado cero si alguno de ellos es cero (visto en la clase 1.6), se encuentran los valores para x que cumplen esta relación.

Ⓔ Factorizar el trinomio de la ecuación de la forma que se hizo en la clase 3.3 de la Unidad 1 y resolver de forma similar al Problema inicial.

Solución de algunos ítems:

1. g) $x^2 + x - 6 = 0$

$(x + 3)(x - 2) = 0$

$x + 3 = 0$ o $x - 2 = 0$

$x = -3$ o $x = 2$

2. Sea x un número entero, el siguiente número entero que le sigue es $x + 1$.

$x^2 + (x + 1)^2 = 25$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$

$2x^2 + 2x - 24 = 0$

$x^2 + x - 12 = 0$

$(x + 4)(x - 3) = 0$

Las soluciones de esta ecuación son:

$x + 4 = 0$ o $x - 3 = 0$

$x = -4$ o $x = 3$

Las parejas de números que cumplen son: -4 y -3, y además 3 y 4.

Se verifica que:

$(-4)^2 + (-3)^2 = 25$

$(3)^2 + (4)^2 = 25$

Como en la clase 1.6, desde el punto de vista de las soluciones como conjunto, en el problema inicial debería escribirse $x = 2$ y $x = 3$, pues ambos valores cumplen con ser solución. Se escribe $x = 2$ o $x = 3$ debido a la propiedad de los números reales mencionada en Ⓢ. De ser posible aclarar esto con los estudiantes.

Fecha: **U3 1.8**

Ⓟ Resuelve la ecuación cuadrática:
$(x - 2)(x - 3) = 0$

Ⓢ Utilizando también el hecho de que:
Si A × B = 0, entonces A = 0 o B = 0.

Si $(x - 2)(x - 3) = 0$
Entonces, $x - 2 = 0$ o $x - 3 = 0$.

Por tanto, $x = 2$ o $x = 3$.

Ⓔ $x^2 + 5x + 6 = 0$
$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2) = 0$

$x + 3 = 0$ o $x + 2 = 0$
$x = -3$ o $x = -2$

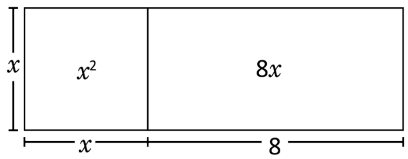
Ⓡ 1. a) $x = 2$ o $x = 1$
b) $x = -5$ o $x = 3$
c) $x = 7$ o $x = -2$
d) $x = -4$ o $x = -3$

Tarea: página 67 del Cuaderno de Ejercicios.

1.9 Solución de ecuaciones cuadráticas utilizando áreas

P

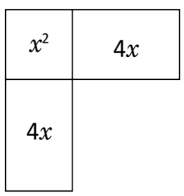
El área de la figura es 33 cm^2. Encuentra la medida del lado x utilizando una justificación geométrica.



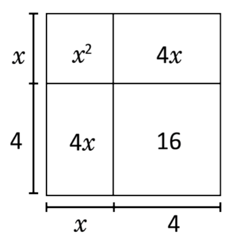
Puedes pensar en recortar y adecuar las piezas de modo conveniente.

S

1. Dividiendo el rectángulo en dos partes iguales y girando 90° una de esas partes.



2. Completando el cuadrado de lado 4.



3. El área de la figura inicial es 33 cm^2, si se agrega un cuadrado de lado 4, el área de la figura anterior es 49 cm^2.

Por tanto, el lado x debe tomar el valor de 3 cm, ya que **(7 cm)^2 = 49 cm^2**.

Solución algebraica:

$x^2 + 8x = 33$

1. $x^2 + 4x + 4x = 33$

2. $x^2 + 2(4x) + 4^2 = 33 + 4^2$

3. $(x + 4)^2 = 49$

Solución: $x = 3$

C

Se pueden utilizar argumentos geométricos para encontrar la solución positiva de una ecuación cuadrática.

Las ecuaciones cuadráticas tienen hasta dos soluciones, pero dado que se trata del lado de una figura solo se considera la positiva.

Utiliza argumentos geométricos para encontrar la solución positiva de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 2x = 8$
$x = 2$

b) $x^2 + 10x = 56$
$x = 4$

c) $x^2 + 6x = 27$
$x = 3$

Indicador de logro

1.9 Utiliza argumentos geométricos para encontrar la solución positiva de ecuaciones del tipo $x^2 + bx + c = 0$.

Secuencia

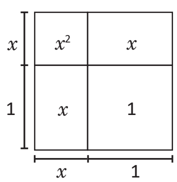
Anteriormente se resolvieron ecuaciones cuadráticas utilizando factorización y el concepto de raíz cuadrada. Para esta clase se analiza cómo encontrar la solución positiva de una ecuación cuadrática utilizando modelos de área. Esta clase es una introducción al tema siguiente: Solución de ecuaciones completando cuadrados.

Propósito

Ⓟ, La ecuación que determina el área de la figura es, $x^2 + 8x = 33$ cm². Mediante estas condiciones y modificando las piezas se debe encontrar el valor del lado x del cuadrado.

Ⓢ Dividir el rectángulo de área $8x$ en dos piezas iguales, de tal modo que las piezas resultantes tengan un lado cuya medida sea x y puedan conectarse con los lados del cuadrado. Acomodando las piezas, resulta un espacio vacío con forma de cuadrado, se completa el espacio, la figura total resulta ser un cuadrado de lado $x + 4$, cuya área es 33 cm² + 16 cm² = 49 cm², para que esto se cumpla, $x = 3$.

Solución de algunos ítems:



$(x + 1)^2 = 8 + 1$
$(x + 1)^2 = 9$
$x + 1 = 3$
$x = 2$

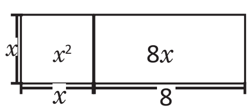
Observación: Para esta clase, se toma como solución únicamente el valor positivo porque se trabaja con áreas.

Recalcar que el lado x indica un valor desconocido y que las medidas de las piezas solo son valores arbitrarios para poder manipularlas, no confundir esta medida con la solución para x. Además el tamaño de las figuras en el Problema inicial y solución debería ser el mismo, pero se adecuó debido al espacio disponible en la página.

Fecha:

U3 1.9

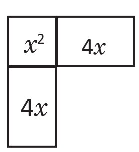
Ⓟ Encuentra la medida del lado x



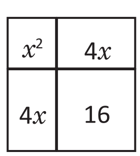
Área: 33 cm²

Ⓢ

1. Dividiendo el rectángulo en las dos partes iguales de la derecha.



2. Completando el cuadrado de lado 4.



3. El área de la figura es:
33 cm² + 16 cm² = 49 cm².
Por tanto, $(x + 4)^2 = 49$.
$x + 4 = 7$
$x = 3$ $\quad x = 3$ cm

Ⓡ a) $x = 2$
b) $x = 4$
c) $x = 3$

Tarea: página 68 del Cuaderno de Ejercicios.

1.10 Solución de ecuaciones completando cuadrados

P

Resuelve la ecuación cuadrática: $x^2 + 8x - 20 = 0$.

S

Para resolver se puede transformar a la forma $(x + m)^2 = n$ y aplicar lo visto en la clase anterior.

Se transpone el –20: $x^2 + 8x = 20$.

Sumando un número apropiado en ambos miembros de la ecuación, de manera que la expresión del miembro izquierdo sea un trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 20 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

Simplificando las fracciones y haciendo algunos cálculos se tendrá la ecuación: $x^2 + 8x + 16 = 36$.

En el desarrollo del cuadrado de un binomio la expresión es la siguiente:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Y el término a^2 puede obtenerse al dividir el coeficiente que acompaña a "x" entre 2 y elevarlo al cuadrado.

$$\left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2$$

Dado que la expresión del miembro izquierdo es un trinomio cuadrado perfecto, la ecuación puede ser expresada como $(x + 4)^2 = 36$.

Resolviendo esta ecuación de la forma $(x + m)^2 = n$: $x + 4 = \pm 6 \Rightarrow x + 4 = 6$ o $x + 4 = -6$.

Por lo tanto, las soluciones son: $\mathbf{x = 2}$ y $\mathbf{x = -10}$.

C

Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c = 0$ se siguen los pasos:

Por ejemplo: $x^2 + 2x - 1 = 0$

1. Se pasa el término c al miembro derecho. — 1. $x^2 + 2x = 1$
2. Se suma un número apropiado en ambos miembros de la ecuación de manera que la expresión del miembro izquierdo sea un trinomio cuadrado perfecto. — 2. $x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$
3. Se simplifica la expresión y se realizan los cálculos. — 3. $(x + 1)^2 = 1 + 1 = 2$
4. Se resuelve la ecuación de la forma $(x + m)^2 = n$. — 4. $x + 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$

Soluciones. $x = -1 + \sqrt{2}$ o $x = -1 - \sqrt{2}$

A la solución de ecuaciones cuadráticas utilizando este procedimiento se le conoce como solución por **complemento de cuadrados**.

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$
$x = -3$ o $x = -1$

b) $x^2 - 6x + 5 = 0$
$x = 5$ o $x = 1$

c) $x^2 - 6x - 7 = 0$
$x = 7$ o $x = -1$

d) $x^2 - 8x + 16 = 0$
$x = 4$

e) $x^2 + 2x - 2 = 0$
$x = -1 \pm \sqrt{3}$

f) $x^2 - 4x + 2 = 0$
$x = 2 \pm \sqrt{2}$

g) $x^2 + 5x + 5 = 0$
$x = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

h) $x^2 + x - 1 = 0$
$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Indicador de logro

1.10 Utiliza el procedimiento de complementación de cuadrados, para resolver ecuaciones cuadráticas.

Secuencia

El proceso desarrollado en la clase anterior para resolver ecuaciones cuadráticas utilizando áreas es muy importante para el desarrollo de esta clase, dado que se realizan algebraicamente los mismos procesos que se realizaron geométricamente en la anterior.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Darse cuenta que la ecuación no se puede resolver utilizando los métodos vistos en clases anteriores. El proceso utilizado tiene como objetivo completar un cuadrado perfecto para la variable x, para finalmente resolver una ecuación del tipo $(x + m)^2 = n$. Al explicar el proceso de solución se puede hacer la relación con los pasos realizados en la clase anterior.

Ⓔ Establecer formalmente los pasos a realizar para resolver una ecuación cuadrática utilizando el complemento de cuadrados.

Solución de algunos ítems:

a)

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$
$$x^2 + 4x = -3$$
$$x^2 + 4x + \left(\tfrac{4}{2}\right)^2 = -3 + \left(\tfrac{4}{2}\right)^2$$
$$x^2 + 4x + 2^2 = -3 + 2^2$$
$$(x + 2)^2 = 1$$
$$x + 2 = \pm 1$$
$$x = -2 \pm 1$$
$$x = -3,\ x = -1$$

Al proceso de solucionar una ecuación cuadrática por complemento de cuadrados se le llama también **complementación de cuadrados.**

Fecha: **U3 1.10**

Ⓟ Resuelve la ecuación cuadrática:
$x^2 + 8x - 20 = 0$

Ⓢ

$x^2 + 8x - 20 = 0$

$x^2 + 8x = 20$ Transponiendo.

$x^2 + 8x + \left(\tfrac{8}{2}\right)^2 = 20 + \left(\tfrac{8}{2}\right)^2$ Completando cuadrados.

$x^2 + 8x + 16 = 36$

$(x + 4)^2 = 36$

$x + 4 = \pm 6$

$x = -4 \pm 6$

Por tanto, $x = -10$ o $x = 2$.

Ⓡ

1. a)

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$x^2 + 4x = -3$ Transponiendo.

$x^2 + 4x + \left(\tfrac{4}{2}\right)^2 = -3 + \left(\tfrac{4}{2}\right)^2$ Completando cuadrados.

$x^2 + 4x + 4 = 1$

$(x + 2)^2 = 1$

$x + 2 = \pm 1$

$x = -2 \pm 1$

Por tanto, $x = -3$ o $x = -1$.

b) $x = 5$ o $x = 1$, c) $x = 7$ o $x = -1$, d) $x = 4$

Tarea: página 69 del Cuaderno de Ejercicios.

1.11 Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

P

Para resolver la siguiente ecuación sigue los pasos a), b), c).

$$3x^2 + 5x + 1 = 0$$

a) Divide la ecuación por el coeficiente de x^2 y pasa el termino constante al lado derecho de la ecuación.
b) Suma por un numero conveniente y completa cuadrados.
c) Despeja la variable x.

S

a) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

$x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0$ Dividiendo por 3.

$x^2 + \frac{5}{3}x = -\frac{1}{3}$

b) $x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$ Sumando por un número conveniente.

$(x + \frac{5}{6})^2 = -\frac{1}{3} + \frac{25}{36}$ Completando cuadrados.

c) $(x + \frac{5}{6})^2 = \frac{25-12}{36}$ Sumando las fracciones de la derecha.

$x + \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{13}}{6}$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$ Despejando x.

C

Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se pueden seguir los pasos:

1. Se divide la ecuación por el coeficiente a de x^2.
2. Se pasa el término constante al miembro derecho.
3. Se suma un número apropiado en ambos miembros de la ecuación, de manera que la expresión del miembro izquierdo, sea un trinomio cuadrado perfecto.
4. Se simplifica la expresión y se realizan los cálculos necesarios.
5. Se resuelve la ecuación de la forma $(x + m)^2 = n$.

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $2x^2 + 5x - 1 = 0$ b) $2x^2 - 3x - 4 = 0$ c) $5x^2 + 5x + 1 = 0$ d) $7x^2 + 7x + 1 = 0$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$ $x = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$ $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$ $x = \frac{-7 \pm \sqrt{21}}{14}$

Indicador de logro

1.11 Resuelve una ecuación cuadrática usando una secuencia de pasos, como una estrategia previa para deducir la fórmula general de la ecuación cuadrática.

Secuencia

Ya que se cuenta con la estrategia de completar cuadrados perfectos para resolver una ecuación cuadrática, aquí se pretende establecer una serie de pasos para resolver una ecuación cuadrática, de modo que este método sea utilizado para deducir la fórmula general.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar los temas estudiados en la clase 1.10 y en la clase 1.5, para determinar las soluciones de una ecuación cuadrática utilizando el método para completar cuadrados perfectos. Para este problema es necesario que los estudiantes apliquen varios conocimientos previos.

Ⓔ Sistematizar el proceso para resolver una ecuación cuadrática, siguiendo los pasos que sirven para deducir la fórmula general de dicha ecuación.

Solución de algunos ítems:

c) $5x^2 + 5x + 1 = 0$

$$x^2 + x + \frac{1}{5} = 0$$
$$x^2 + x = -\frac{1}{5}$$
$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{-4+5}{20}$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20}$$
$$x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{20}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{10}$$
$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$$

Se recomienda que los estudiantes comiencen con el literal c) de la parte de problemas y ejercicios, puesto que a) y b) al simplificar llevan una variable que lo hace más difícil

Posibles dificultades:
El proceso explicado en esta clase es un tanto complejo, lleva muchos pasos y es necesario verificar que los estudiantes realicen correctamente cada uno de ellos para llegar a la respuesta correcta.

Fecha: **U3 1.11**

Ⓟ Resuelve la ecuación siguiendo los pasos a), b) y c) que menciona el libro: $3x^2 + 5x + 1 = 0$

Ⓢ

a) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

$x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0$ Dividiendo por 3.

$x^2 + \frac{5}{3}x = -\frac{1}{3}$

b) $x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$ Sumando a ambos lados.

$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \frac{25}{36}$ Completando cuadrados.

c) $\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{13}{36}$ Sumando las fracciones.

$x + \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{13}}{6}$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$ Despejando x.

Ⓡ

a) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$

b) $x = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$

c) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$

d) $x = \frac{-7 \pm \sqrt{21}}{14}$

Tarea: página 70 del Cuaderno de Ejercicios.

1.12 Fórmula general de la ecuación cuadrática

P

Encuentra la fórmula para resolver la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$.

S

Para resolver se puede dividir por "a" para transformar a la forma $x^2 + bx + c = 0$ y aplicar lo visto en la clase anterior.

Ahora se procederá resolviendo la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Primero se divide entre el coeficiente de x^2 ambos lados de la ecuación, para que el coeficiente sea 1.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Luego se transpone $\frac{c}{a}$.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Se completan cuadrados perfectos.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Se hacen los cálculos.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Se hacen los cálculos al lado derecho de la ecuación.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Se resuelve la ecuación.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

C

Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se puede utilizar la fórmula a la que se llegó al final de la solución:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A esta fórmula se le conoce como **fórmula general de la ecuación cuadrática.** Y para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática se sustituyen los valores de a, b, c en la fórmula.

Por ejemplo: $3x^2 + 5x + 1 = 0$

Si se sustituye $a = 3$, $b = 5$, $c = 1$ en la fórmula general, se verifica que

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $5x^2 - 3x - 1 = 0$ $\quad x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{10}$

b) $-4x^2 - x + 1 = 0$ $\quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$

c) $x^2 + 3x - 9 = 0$ $\quad x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

d) $-4x^2 + 5x + 5 = 0$ $\quad x = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{8}$

Indicador de logro

1.12 Utiliza la completación de cuadrados para determinar la fórmula general de la ecuación cuadrática.

Secuencia

Para esta clase ya se cuenta con que los estudiantes pueden resolver una ecuación cuadrática particular siguiendo los pasos para deducir la fórmula general de la ecuación. Ahora se aplicará el método visto en la clase anterior para deducir la fórmula general.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Aplicar el método descrito a una ecuación cuadrática escrita en forma general, para deducir una fórmula que permita resolver cualquier ecuación cuadrática. Esta clase puede ser un poco compleja, el docente puede intervenir para guiar la solución de los estudiantes, si estos no encuentran un camino.

Ⓔ Primero se trabaja un ítem en el que no se debe simplificar, y que la respuesta final inicia con un número positivo, luego el número es positivo, pero en el denominador queda un negativo, luego las respuestas inician con número negativo, y además en el tercer ítem se debe dar una simplificación en la raíz.

Solución de algunos ítems:

a) $5x^2 - 3x - 1 = 0$

$a = 5$, $b = -3$, $c = -1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(5)(-1)}}{2(5)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{10}$$

b) $-4x^2 - x + 1 = 0$

$a = -4$, $b = -1$, $c = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-4)(1)}}{2(-4)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{-8} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$$

Otra forma:
Multiplicar ambos miembros por -1, se obtiene la ecuación $4x^2 + x - 1 = 0$, y al resolver:
$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$

Fecha: **U3 1.12**

Ⓟ Resuelve la ecuación cuadrática general.
$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

Ⓢ $ax^2 + bx + c = 0$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ Dividiendo por a.

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ Sumando a ambos lados.

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ Completando cuadrados.

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ Sumando las fracciones.

$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Despejando x.

Ⓡ
a) $x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{10}$
b) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$
c) $x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$
d) $x = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{8}$

Tarea: página 71 del Cuaderno de Ejercicios.

1.13 Aplicación de la fórmula general de la ecuación cuadrática

P

Resuelve las ecuaciones utilizando la fórmula general de la ecuación cuadrática.

a) $4x^2 + 2x - 1 = 0$

b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

S

Sustituyendo en la fórmula general:

a) $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{\cancel{2}^{1}(-1 \pm 1\sqrt{5})}{\cancel{8}_{4}}$$ Es necesario simplificar

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \text{ o } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

b) $a = 3$, $b = 5$, $c = -2$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$$ Es necesario calcular las raíces cuadradas de 49

$$= \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$$x = \frac{-5 + 7}{6} \qquad x = \frac{-5 - 7}{6}$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ o } x = -2$$ Se calculan las dos soluciones

C

Para aplicar la fórmula general de la ecuación cuadrática solamente se identifican los valores de a, b, c en la ecuación cuadrática; al calcular las soluciones es posible que sea necesario simplificar o expresar las raíces como números racionales (cuando sea posible, determinar las raíces cuadradas del radicando).

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 + x - 1 = 0$
$x = -1$ o $x = \frac{1}{2}$

b) $3x^2 - 5x - 2 = 0$
$x = 2$ o $x = -\frac{1}{3}$

c) $6x^2 + 5x + 1 = 0$
$x = -\frac{1}{3}$ o $x = -\frac{1}{2}$

d) $9x^2 - 12x + 4 = 0$
$x = \frac{2}{3}$

e) $4x^2 + 20x + 25 = 0$
$x = -\frac{5}{2}$

f) $2x^2 - 4x + 1 = 0$
$x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

g) $4x^2 + 6x + 1 = 0$
$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$

h) $-2x^2 + 2x + 1 = 0$
$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

Indicador de logro

1.13 Utiliza la fórmula general de la ecuación cuadrática identificando los valores de la ecuación general.

Secuencia

Una vez establecida la fórmula general, ahora se trabajará un poco más con ella, identificando diferentes casos en donde las soluciones se pueden simplificar, o se pueden expresar por separado.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Presentar dos ecuaciones cuadráticas en cuya solución se aplica la fórmula general, en el caso del literal a) se debe simplificar y en el caso del literal b) se pueden determinar dos números racionales que satisfacen dicha ecuación. Siempre que se puedan calcular los valores racionales (exactos) de x, se debe hacer, no hay que dejar soluciones en la forma $x = \frac{-7 \pm 5}{6}$.

Ⓔ El objetivo es que los estudiantes comiencen trabajando ecuaciones cuadráticas en las que puedan determinar dos soluciones racionales, primero combinando la solución entera y fraccionaria, luego con dos soluciones fraccionarias, después cuando en la raíz el radicando sea 0 y tenga solo una solución fraccionaria, y finalmente las ecuaciones que llevan a soluciones donde hay que simplificar pero son irracionales.

Solución de algunos ítems:

a) $2x^2 + x - 1 = 0$

$a = 2,\ b = 1,\ c = -1$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$

$x = \frac{-1 \pm 3}{4}$

$x = -1 \quad x = \frac{1}{2}$

d) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

$a = 9,\ b = -12,\ c = 4$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(9)(4)}}{2(9)}$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{18}$

$x = \frac{2}{3}$

Posibles dificultades:

Al solucionar el literal a) del Problema inicial pueden cometer el error: $\frac{\overset{-1}{\cancel{-2}} \pm 2\sqrt{5}}{\underset{4}{\cancel{8}}}$

Fecha: **U3 1.13**

Ⓟ Resuelve utilizando la fórmula general de la ecuación cuadrática.

Ⓢ

a) $4x^2 + 2x - 1 = 0$

$a = 4,\ b = 2,\ c = -1$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8}$

$x = \frac{\cancel{-2} \pm \cancel{2}\sqrt{5}}{\underset{4}{\cancel{8}}}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ o $\frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$

b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

$a = 3,\ b = 5,\ c = -2$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$

$x = \frac{-5 \pm 7}{6}$

$x = \frac{-5 - 7}{6}$ o $x = \frac{-5 + 7}{6}$

$x = -2$ o $x = \frac{1}{3}$

Ⓡ

a) $x = -1$ o $x = \frac{1}{2}$

b) $x = 2$ o $x = -\frac{1}{3}$

c) $x = -\frac{1}{2}$ o $x = -\frac{1}{3}$

d) $x = \frac{2}{3}$

e) $x = -\frac{5}{2}$

f) $x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

g) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$

h) $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

Tarea: página 72 del Cuaderno de Ejercicios.

1.14 Métodos para resolver ecuaciones cuadráticas

P

Resuelve la ecuación cuadrática $x^2 + 7x + 12 = 0$ usando factorización, fórmula general y completando cuadrados, ¿coinciden las soluciones? Escribe en el cuaderno tu opinión sobre cada método.

S

Factorización

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$(x + 4)(x + 3) = 0$

$x = -4$ o $x = -3$

Fórmula general

$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(12)}}{2(1)}$

$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2}$

$= \frac{-7 \pm 1}{2}$

$x = -3$ o $x = -4$

Completando cuadrados

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$x^2 + 7x = -12$

$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$(x + \frac{7}{2})^2 = -12 + \frac{49}{4}$

$(x + \frac{7}{2})^2 = \frac{-48 + 49}{4}$

$(x + \frac{7}{2})^2 = \frac{1}{4}$

$x + \frac{7}{2} = \pm \frac{1}{2}$

$x = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}$ $\quad x = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2}$

$x = -3$ o $x = -4$

Observa que en este caso resultó más sencillo y práctico aplicar el método de factorización; además, el método de la fórmula cuadrática conlleva un poco más de cálculo, pero es aplicable a todos los casos; finalmente, el método completando cuadrados, para este caso resultó complejo, pero hay casos en que puede resultar más sencillo.

C

Para escoger el método más eficiente de resolver ecuaciones cuadráticas se puede:

1. Resolver usando factorización.
2. Si no es posible encontrar una factorización se puede aplicar alguno de los otros dos métodos.

La fórmula general es aplicable en todos los casos pero en ocasiones puede conllevar un cálculo más complejo que si se utiliza otro método.

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método que consideres más conveniente.

a) $x^2 - \frac{4}{9} = 0$

$x = \pm \frac{2}{3}$

b) $4x^2 - 16 = 0$

$x = \pm 2$

c) $(6 - x)^2 - 1 = 0$

$x = 7$ o $x = 5$

d) $x^2 - 8x - 9 = 0$

$x = 9$ o $x = -1$

e) $x^2 + 3x - 1 = 0$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

f) $5x^2 + 10x = 0$

$x = 0$ o $x = -2$

g) $x^2 - 10x + 25 = 0$

$x = 5$

h) $5x^2 - 11x + 2 = 0$

$x = 2$ o $x = \frac{1}{5}$

Indicador de logro

1.14 Compara los métodos de solución desarrollados para resolver ecuaciones cuadráticas.

Secuencia

En las clases anteriores los estudiantes han aprendido a resolver ecuaciones cuadráticas utilizando diferentes métodos, ahora se les presentarán diferentes ecuaciones cuadráticas, de modo que ellos determinen el método más conveniente para resolverlas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Resumir los diferentes métodos que existen para resolver una ecuación cuadrática, y mencionar que en ocasiones es posible que algún método no sea tan adecuado para ciertas condiciones.

Ⓔ Para asesorar correctamente a los estudiantes en determinar el método más conveniente se recomienda al docente que si la respuesta de la ecuación son números enteros, entonces es mejor utilizar la factorización, y si son fraccionarios, es mejor utilizar el despeje por raíz cuadrada o fórmula general.

Solución de algunos ítems:

a) $x^2 - \frac{4}{9} = 0$

$x^2 = \frac{4}{9}$

$x = \pm\sqrt{\frac{4}{9}}$

$x = \pm\frac{2}{3}$

Este literal se puede resolver factorizando por diferencia de cuadrados, pero no todos los estudiantes lo harán de esta forma.

d) $x^2 - 8x - 9 = 0$

$(x - 9)(x + 1) = 0$

$x - 9 = 0$ o $x + 1 = 0$

$x = 9$ o $x = -1$

d) $x^2 - 8x - 9 = 0$

$(x - 9)(x + 1) = 0$

$x - 9 = 0$ o $x + 1 = 0$

$x = 9$ o $x = -1$

g) $x^2 - 10x + 25 = 0$

$(x - 5)^2 = 0$

$x = 5$

Fecha: **U3 1.14**

Ⓟ Resuelve la ecuación $x^2 + 7x + 12 = 0$, usando factorización, fórmula general y completando cuadrados.

Ⓢ Factorización

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$(x + 4)(x + 3) = 0$

$x = -4$ o $x = -3$

Fórmula cuadrática

$x = \frac{-7 \pm\sqrt{7^2 - 4(1)(12)}}{2(1)}$

$x = \frac{-7 \pm 1}{2}$

$x = -4$ o $x = -3$

Completando cuadrados

$x^2 + 7x + 12 = 0$

$x^2 + 7x = -12$

$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \frac{49}{4}$

$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$x + \frac{7}{2} = \pm\frac{1}{2}$

$x = -4$ o $x = -3$

Ⓡ

a) $x = \pm\frac{2}{3}$

b) $x = \pm2$

c) $x = 7$ o $x = 5$

d) $x = 9$ o $x = -1$

e) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$

f) $x = 0$ o $x = -2$

g) $x = 5$

h) $x = 2$ o $x = \frac{1}{5}$

Tarea: página 73 del Cuaderno de Ejercicios.

1.15 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando los métodos vistos en clase:

Forma $ax^2 = c$.

a) $2x^2 = 2$ — $x = \pm 1$
b) $-9x^2 = -1$ — $x = \pm\frac{1}{3}$
c) $3x^2 - 27 = 0$ — $x = \pm 3$
d) $21 - 3x^2 = 0$ — $x = \pm\sqrt{7}$
e) $-x^2 - 3 = 0$ — No tiene solución

Forma $(x + m)^2 = n$.

a) $(x+1)^2 = 9$ — $x = 2$ o $x = -4$
b) $(-x+2)^2 = 3$ — $x = 2 + \sqrt{3}$ o $x = 2 - \sqrt{3}$
c) $(x-4)^2 - 12 = 0$ — $x = 4 + 2\sqrt{3}$ o $x = 4 - 2\sqrt{3}$
d) $(-3 - x)^2 = 0$ — $x = -3$
e) $(5 - x)^2 + 3 = 0$ — No tiene solución

Forma $x^2 + bx + c = 0$ (Completa cuadrados perfectos).

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$ — $x = 1$ o $x = -3$
b) $x^2 + 4x - 12 = 0$ — $x = 2$ o $x = -6$
c) $x^2 + 6x + 9 = 0$ — $x = -3$
d) $x^2 - 2x - 8 = 0$ — $x = 4$ o $x = -2$
e) $x^2 - 8x + 12 = 0$ — $x = 6$ o $x = 2$
f) $x^2 + 4x - 1 = 0$ — $x = -2 \pm \sqrt{5}$
g) $x^2 + 2x + 4 = 0$ — No tiene solución
h) $x^2 - x - 6 = 0$ — $x = 3$ o $x = -2$
i) $x^2 - 5x + 3 = 0$ — $x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$
j) $x^2 - 5x + 6 = 0$ — $x = 3$ o $x = 2$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general:

a) $3x^2 - 11x + 6 = 0$ — $x = 3$ o $x = \frac{2}{3}$
b) $4x^2 + 17x - 15 = 0$ — $x = -5$ o $x = \frac{3}{4}$
c) $12x^2 - 13x + 3 = 0$ — $x = \frac{1}{3}$ o $x = \frac{3}{4}$
d) $4x^2 + 8x + 3 = 0$ — $x = -\frac{1}{2}$ o $x = -\frac{3}{2}$
e) $-3x^2 + 5x - 1 = 0$ — $x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$
f) $4x^2 - 7x + 2 = 0$ — $x = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{8}$
g) $3x^2 + 6x + 2 = 0$ — $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$
h) $x^2 - 4x - 1 = 0$ — $x = 2 \pm \sqrt{5}$

1.16 Practica lo aprendido

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando factorización:

Forma $x^2 + bx = 0$.

a) $x^2 - 7x = 0$ — $x = 0$ o $x = 7$
b) $2x^2 - x = 0$ — $x = 0$ o $x = \frac{1}{2}$
c) $x^2 + 3x = 0$ — $x = 0$ o $x = -3$
d) $4x^2 + 12x = 0$ — $x = 0$ o $x = -3$

Forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$.

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ — $x = 1$
b) $x^2 - 8x + 16 = 0$ — $x = 4$
c) $16x^2 + 8x + 1 = 0$ — $x = -\frac{1}{4}$
d) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ — $x = -\frac{2}{3}$

Forma $(x + a)(x + b) = 0$.

a) $(x-1)(x-6) = 0$ — $x = 1$ o $x = 6$
b) $(x-3)(x+2) = 0$ — $x = 3$ o $x = -2$
c) $(x+5)(x-7) = 0$ — $x = -5$ o $x = 7$
d) $(x+2)(x+4) = 0$ — $x = -2$ o $x = -4$

Forma $x^2 + (a + b)x + ab = 0$.

a) $x^2 - 9x + 8 = 0$ — $x = 1$ o $x = 8$
b) $x^2 - 2x - 24 = 0$ — $x = 6$ o $x = -4$
c) $x^2 + 7x - 18 = 0$ — $x = -9$ o $x = 2$
d) $x^2 - 11x + 28 = 0$ — $x = 7$ o $x = 4$

2. Utiliza argumentos geométricos para encontrar la solución positiva de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 6x = 7$ — $x = 1$
b) $x^2 + 10x = 11$ — $x = 1$
c) $x^2 + 8x = 9$ — $x = 1$

Indicador de logro

1.15 y 1.16 Resuelve ecuaciones cuadráticas, utilizando los métodos estudiados.

Solución de algunos ítems:

Ítems de la clase 1.15:

1. Forma $ax^2 = c$.

a) $2x^2 = 2$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

Forma $(x + m)^2 = n$.

c) $(x - 4)^2 - 12 = 0$

$(x - 4)^2 = 12$

$x - 4 = \pm 2\sqrt{3}$

$x = 4 \pm 2\sqrt{3}$

Forma $x^2 + bx + c = 0$

f) $x^2 + 4x - 1 = 0$

$x^2 + 4x = 1$

$x^2 + 4x + 2^2 = 1 + 2^2$

$(x + 2)^2 = 5$

$x + 2 = \pm\sqrt{5}$

$x = -2 \pm \sqrt{5}$

2. g) $3x^2 + 6x + 2 = 0$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{6}$

$x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$

Ítems de la clase 1.16:

Forma $x^2 + bx = 0$

a) $x^2 - 7x = 0$

$x(x - 7) = 0$

$x = 0$ o $x = 7$

Forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 1)^2 = 0$

$x = 1$

Forma $(x + a)(x + b) = 0$

a) $(x - 1)(x - 6) = 0$

$x - 1 = 0$ o $x - 6 = 0$

$x = 1$ o $x = 6$

Forma $x^2 + (a + b)x + ab = 0$

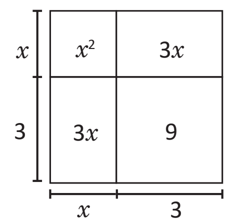
a) $x^2 - 9x + 8 = 0$

$(x - 1)(x - 8) = 0$

$x - 1 = 0$ o $x - 8 = 0$

$x = 1$ o $x = 8$

2. a) $x^2 + 6x = 7$



$(x + 3)^2 = 7 + 9$

$(x + 3)^2 = 16$

$x + 3 = 4$

$x = 1$

Tarea: página 74 del Cuaderno de Ejercicios.

2.1 Discriminante de la ecuación cuadrática

P

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas aplicando la fórmula general. Observa el valor del radicando.

a) $2x^2 + 3x + 1 = 0$ b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ c) $2x^2 + x + 1 = 0$

S

a) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$

$= \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$

$= \frac{-3 \pm 1}{4}$

$x = -\frac{1}{2}$ y $x = -1$

El radicando es mayor que cero y hay dos soluciones.

b) $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(4)(1)}}{2(4)}$

$= \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{8}$

$= \frac{\cancel{-4}^{-1}}{\cancel{8}_{2}} = -\frac{1}{2}$

El radicando es cero y la solución es única.

c) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{4}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4}$

Observa que no se han definido las raíces cuadradas de números negativos, entonces $\pm\sqrt{-7}$ no son números reales.

El radicando es menor que cero y no hay solución en los números reales.

C

El radicando de la fórmula general que viene dado por la expresión $b^2 - 4ac$ es llamado **el discriminante** de la ecuación cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ → Discriminante

Observa que el discriminante puede cumplir cualquiera de los siguientes tres casos:

a) $b^2 - 4ac > 0$

$2x^2 + 3x + 1 = 0$, en este caso la ecuación cuadrática tiene **dos soluciones**.

b) $b^2 - 4ac = 0$

$4x^2 + 4x + 1 = 0$, en este caso la ecuación cuadrática tiene solo **una solución**.

El discriminante es cero porque la ecuación cuadrática es un trinomio cuadrado perfecto.

c) $b^2 - 4ac < 0$

$2x^2 + x + 1 = 0$, en este caso la ecuación cuadrática **no tiene solución en los números reales.**

1. Determina si las siguientes ecuaciones cuadráticas tienen 0, 1 o 2 soluciones, comparando el valor del discriminante con cero.

a) $x^2 + 6x - 9 = 0$ Tiene 2 soluciones.

b) $x^2 + 2x + 2 = 0$ No tiene solución.

c) $x^2 - 2x + 1 = 0$ Tiene 1 solución.

d) $x^2 - 2x = 0$ Tiene 2 soluciones.

e) $x^2 + 1 = 0$ No tiene solución.

f) $5x^2 - 9x + 1 = 0$ Tiene 2 soluciones.

g) $4x^2 - 9 = 0$ Tiene 2 soluciones.

h) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ Tiene 1 solución.

2. Determina cuántas soluciones tiene la ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx = 0$, $b \neq 0$.

Tiene 2 soluciones.

Indicador de logro

2.1 Determina e interpreta la cantidad de soluciones que tiene una ecuación cuadrática.

Secuencia

Ya estudiados los métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas, se introducirá el análisis del discriminante para saber la naturaleza de las soluciones de estas ecuaciones.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Examinar el radicando de la fórmula cuadrática en tres situaciones diferentes y compararlo con las soluciones de la ecuación cuadrática.

Ⓔ Definir el discriminante de una ecuación cuadrática, asociarlo con el radicando de la fórmula general y caracterizar las soluciones de la ecuación cuadrática con el valor del discriminante.

Solución de algunos ítems:

1. a) $a = 1$, $b = 6$, $c = -9$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 6^2 - 4(1)(-9) \\ &= 36 + 36 \\ &= 72 \end{aligned}$$

Tiene 2 soluciones.

b) $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 2^2 - 4(1)(2) \\ &= 4 - 8 \\ &= -4 \end{aligned}$$

No tiene solución.

c) $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-2)^2 - 4(1)(1) \\ &= 4 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tiene 1 solución.

d) $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (-2)^2 - 4(1)(0) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Tiene 2 soluciones.

2. $a = 1$, $b \neq 0$, $c = 0$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= b^2 - 4(1)(0) \\ &= b^2 > 0 \end{aligned}$$

Tiene 2 soluciones.

Fecha: **U3 2.1**

Ⓟ Resuelve las ecuaciones cuadráticas con la fórmula general. Observa el radicando de cada ecuación.

Ⓢ a) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$

$x = \frac{-3 \pm 1}{4}$

$x = -\frac{1}{2}$ o $x = -1$

El radicando es mayor que cero y la ecuación tiene 2 soluciones.

b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(4)(1)}}{2(4)}$

$x = \frac{-4 \pm 0}{8}$

$x = -\frac{1}{2}$

El radicando es cero y la ecuación tiene 1 solución.

c) $2x^2 + x + 1 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4}$

El radicando es menor que cero y la ecuación no tiene solución.

Ⓡ a) Tiene 2 soluciones b) No tiene solución c) Tiene 1 solución d) Tiene 2 soluciones
e) No tiene solución f) Tiene 2 soluciones g) Tiene 2 soluciones h) Tiene 1 solución

Tarea: página 75 del Cuaderno de Ejercicios.

2.2 Uso del discriminante en resolución de problemas

P

Muestra que no existen dos números reales tales que su suma sea 4 y su producto sea 5.

S

Sean x y y los dos números. Debe cumplirse que $x + y = 4$ y además $xy = 5$.

Tomando la primera ecuación:

$x + y = 4$	
$x^2 + xy = 4x$	Multiplicando por x en ambos lados,
$x^2 + 5 = 4x$	dado que $xy = 5$,
$x^2 - 4x + 5 = 0$	trasladando y ordenando los terminos en el lado izquierdo.

Analizando el discriminante de la ecuación cuadrática:

$(-4)^2 - 4(1)(5) < 0$

Discriminante de una ecuación cuadrática: $b^2 - 4ac < 0$.

Entonces, no existen soluciones en los números reales para esta ecuación cuadrática. Por tanto, no existen números reales tales que la suma sea 4 y multiplicados den 5.

C

Se puede utilizar el discriminante de una ecuación cuadrática para resolver diversos problemas. Se plantea la ecuación cuadrática y se analizan sus soluciones. En la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

a) $b^2 - 4ac > 0$	Existen dos soluciones reales.
b) $b^2 - 4ac = 0$	Existe una solución real.
c) $b^2 - 4ac < 0$	No existen soluciones reales.

1. La suma de dos números es 4 y al multiplicarlos el resultado es c. Qué valores debe tomar c de forma que
   a) La ecuación tenga dos soluciones reales. $c < 4$
   b) La ecuación tenga una solución real. $c = 4$
   c) La ecuación no tenga soluciones reales. $c > 4$

2. Una persona asegura que su casa tiene forma rectangular y que el perímetro de la misma es de 18 m y que además, su área es de 21 m^2. Demuestra que la persona estaba mintiendo.
   Si un lado mide x m, la ecuación es $x^2 - 9x + 21 = 0$, y el discriminante es menor que cero.

3. Don José tiene un terreno rectangular de 700 m^2 de área, ¿puede cercar el terreno utilizando 100 m de alambre?
   No es posible, si un lado mide x m, la ecuación $x^2 - 50x + 700 = 0$, y el discriminante es menor que cero.

Indicador de logro

2.2 Utiliza el discriminante para determinar si una ecuación cuadrática tiene una solución, dos o ninguna.

Secuencia

Con el contenido visto en la clase anterior sobre el análisis del discriminante, ahora se puede introducir la resolución de problemas que conlleven este análisis.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Aplicar el valor del discriminante para mostrar la no existencia de dos números bajo las condiciones que enuncia el Problema inicial; para la solución es posible que a los estudiantes no se les ocurra multiplicar ambos miembros de la ecuación por x, pero si trabajan las ecuaciones de modo que sustituya una en otra, se deducirá la misma ecuación cuadrática y se tiene que analizar el mismo discriminante.

Solución de algunos ítems:

Forma 1

$$x + y = 4$$
$$xy = c$$
$$x(4 - x) = c$$
$$4x - x^2 = c$$
$$x^2 - 4x + c = 0$$

Forma 2

$$x + y = 4$$
$$x^2 + xy = 4x$$
$$x^2 + c = 4x$$
$$x^2 - 4x + c = 0$$

Analizando el discriminante para cada literal de este problema se debe cumplir que:

a) $b^2 - 4ac > 0$
$(-4)^2 - 4(1)(c) > 0$
$16 - 4c > 0$
Por prueba y error se puede comprobar que $c < 4$.

b) $b^2 - 4ac = 0$
$(-4)^2 - 4(1)(c) = 0$
$16 - 4c = 0$
$16 = 4c$
$4 = c$

c) De manera análoga al literal a), se puede comprobar que $c > 4$.

Fecha: **U3 2.2**

Ⓟ Muestra que no existen dos números que sumados den 4 y multiplicados 5.

Ⓢ Sean x, y los números.

$x + y = 4$

$xy = 5$

$x^2 + xy = 4x$ Multiplicando por x cada miembro de la ecuación.

$x^2 + 5 = 4x$ Sustituyendo $xy = 5$.

$x^2 - 4x + 5 = 0$ Ordenando.

Analizando el discriminante:

$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(5)$
$= 16 - 20 = -4 < 0$

Por lo tanto, no existen estos números.

Ⓡ

1a) $c < 4$ 1b) $c = 4$ 1c) $c > 4$

2. Sea x la longitud de un lado. La ecuación es $x^2 - 9x + 21 = 0$, y el discriminante es -3, por lo tanto no existe un terreno con estas dimensiones.

3. Sea x la longitud de un lado. La ecuación es $x^2 - 50x + 700 = 0$, y el discriminante es -300, por lo tanto, no alcanza la cantidad de alambre para el terreno.

Tarea: página 76 del Cuaderno de Ejercicios.

2.3 Resolución de problemas con ecuaciones cuadráticas

P

Don Juan construirá su casa en un terreno rectangular de 72 m^2 de área y 36 m de perímetro. Para solicitar los permisos de construcción le piden las dimensiones del terreno, ¿cómo se podría determinar las dimensiones del terreno con esta información?

S

Si se representa el largo del terreno por x, ¿cómo se representa el ancho usando x?

Como la suma del largo y el ancho es igual a la mitad del perímetro $\left(\frac{36}{2} = 18\right)$, entonces el ancho es "$18 - x$".

Planteando la ecuación y utilizando el valor de área $x\,(18 - x) = 72$.

Desarrollando: $-x^2 + 18x = 72 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2 - 18x + 72$.

Utilizando factorización: $x^2 - 18x + 72 = 0 \quad \Rightarrow (x - 12)(x - 6) = 0$.

Entonces: $x - 12 = 0$ o $x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 12$ o $x = 6$.

Como x representa el lado más largo: $x = 12$.

Entonces, el ancho del terreno de don Juan es 6.

Por lo tanto, las dimensiones del terreno de don Juan son: **12 m de largo** y **6 m de ancho.**

C

Para resolver una situación problemática, en general, se pueden seguir los pasos:

1. Si es posible, realizar un esquema de la situación del problema.
2. Se identifica la información que brinda el problema y se define qué cantidad representa la incógnita.
3. Se representan todas las cantidades con la misma incógnita.
4. Se plantea la ecuación cuadrática que hay que resolver (establecer la igualdad).
5. Se resuelve la ecuación cuadrática.
6. Se analizan si las soluciones son adecuadas al problema.

1. Se construirá una casa en un terreno de 28 m de perímetro y 48 m^2 de área, ¿cuáles son las dimensiones del terreno? 6 m y 8 m

2. La distancia en km recorrida por un avión está dada por la ecuación $x = 140t + 3t^2$, donde t representa el tiempo recorrido en horas después del despegue. Determina cuánto dura un viaje en este avión desde El Salvador hasta Costa Rica si la distancia entre estos países es aproximadamente de 775 km.

5 horas

Indicador de logro

2.3 Plantea ecuaciones cuadráticas que resuelven situaciones problemáticas.

Secuencia

Finalmente, después de tener todas las herramientas para resolver ecuaciones cuadráticas, es posible abordar algunos problemas de aplicación, en los cuales los estudiantes tengan que plantear la ecuación y luego resolverla.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar los tipos de problemas sobre determinar números que sumados dan una cantidad y multiplicados otra cantidad, en donde para plantear la ecuación cuadrática puede ocupar lo visto en la clase anterior.

Ⓔ Determinar un esquema general sobre cómo resolver problemas que impliquen el planteamiento de una ecuación cuadrática y su posterior solución.

Solución de algunos ítems:

1. Planteando la ecuación:
Sea x la longitud de la base, y y la longitud de la altura.

$$x + y = 14$$
$$xy = 48$$
$$x(14 - x) = 48$$
$$14x - x^2 = 48$$
$$x^2 - 14x + 48 = 0$$
$$(x - 8)(x - 6) = 0$$
$$x = 8 \text{ o } x = 6$$

Por lo tanto, las dimensiones del terreno son 6 m y 8 m.

Aplicación a la vida cotidiana:
Para esta clase se da la aplicación de la fórmula física de movimiento acelerado en el ítem 2, en donde los valores son semejantes a los de un avión en la vida real. Así mismo se ve el énfasis en el desarrollo de capacidades productivas en el ítem 1 y el Problema inicial.

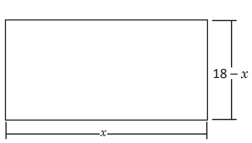
Observación:
El tiempo real de vuelo entre El Salvador y Costa Rica es aproximadamente 1 hora.

Fecha:

U3 2.3

Ⓟ Determina las dimensiones de un terreno de 36 m de perímetro y 72 m² de área.

Ⓢ x: la longitud de un lado



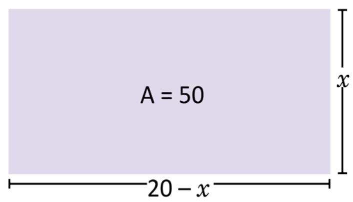
$$x(18 - x) = 72$$
$$18x - x^2 = 72$$
$$x^2 - 18x + 72 = 0$$
$$(x - 12)(x - 6) = 0$$
$$x = 12 \text{ o } x = 6$$

Ⓡ
1. Las dimensiones del terreno deben ser 6 m y 8 m.
2. El vuelo tarda 5 horas.

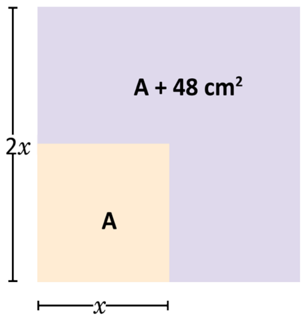
Tarea: página 77 del Cuaderno de Ejercicios.

2.4 Practica lo aprendido

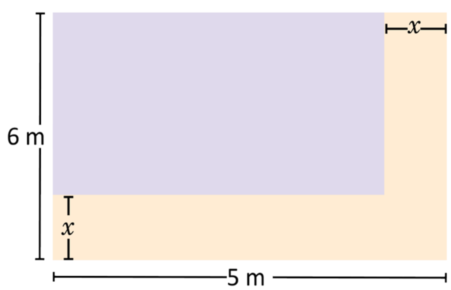
1. Encuentra las dimensiones del siguiente rectángulo.
   $10 + 5\sqrt{2}$ y $10 - 5\sqrt{2}$



2. Si se duplica el lado de un cuadrado su área aumenta en 48 cm^2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?
   4 cm



3. En la figura, el área del rectángulo sombreado de morado es de 12 cm^2, encuentra el valor de x.
   $x = 2$ cm



4. Encuentra dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 25.
   –4 y –3 o 3 y 4

5. Se construirá una casa en un terreno de 30 m de perímetro y 54 m^2 de área. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno? 6 m y 9 m

Indicador de logro

2.4 Resuelve problemas correspondientes a la ecuación cuadrática.

Solución de algunos ítems:

1.
$$x(20 - x) = 50$$
$$20x - x^2 = 50$$
$$x^2 - 20x = -50$$
$$x^2 - 20x + 10^2 = -50 + 10^2$$
$$(x - 10)^2 = 50$$
$$x - 10 = \pm\sqrt{50}$$
$$x - 10 = \pm 5\sqrt{2}$$
$$x = 10 \pm 5\sqrt{2}$$

Si un lado mide $10 + 5\sqrt{2}$ entonces el otro lado mide: $20 - (10 + 5\sqrt{2}) = 10 - 5\sqrt{2}$

Por lo tanto, las dimensiones son: $10 - 5\sqrt{2}$ y $10 + 5\sqrt{2}$

2.
$$A = x^2$$
$$(2x)^2 = A + 48$$
$$(2x)^2 = x^2 + 48$$
$$4x^2 = x^2 + 48$$
$$3x^2 = 48$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm 4$$
$$x = 4$$

4.
$$x^2 + (x + 1)^2 = 25$$
$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$$
$$2x^2 + 2x - 24 = 0$$
$$x^2 + x - 12 = 0$$
$$(x + 4)(x - 3) = 0$$
$$x + 4 = 0 \text{ o } x - 3 = 0$$
$$x = -4 \text{ o } x = 3$$

Si $x = -4$ entonces $x + 1 = -3$
Si $x = 3$ entonces $x + 1 = 4$

Se tienen dos soluciones:
-4 y -3 o 3 y 4

5. Se asume que el terreno es rectangular (ver clase 2.3).

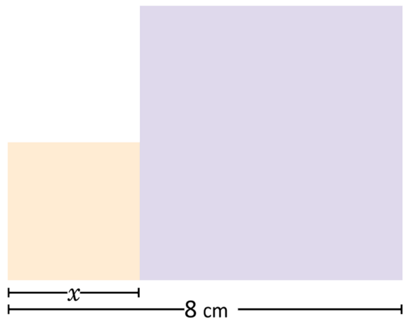
La mitad del perímetro es 15 m
Los lados miden x y $15 - x$
Entonces $x(15 - x) = 54$
$$15x - x^2 = 54$$
$$x^2 - 15x + 54 = 0$$
$$(x - 9)(x - 6) = 0$$
$$x - 9 = 0 \text{ o } x - 6 = 0$$
$$x = 9 \text{ o } x = 6$$

Tarea: página 78 del Cuaderno de Ejercicios.

2.5 Practica lo aprendido

1. La siguiente figura está compuesta por dos cuadrados. ¿Cuánto valen los lados de ambos cuadrados si las dos áreas suman 34 cm^2?

3 m y 5 m

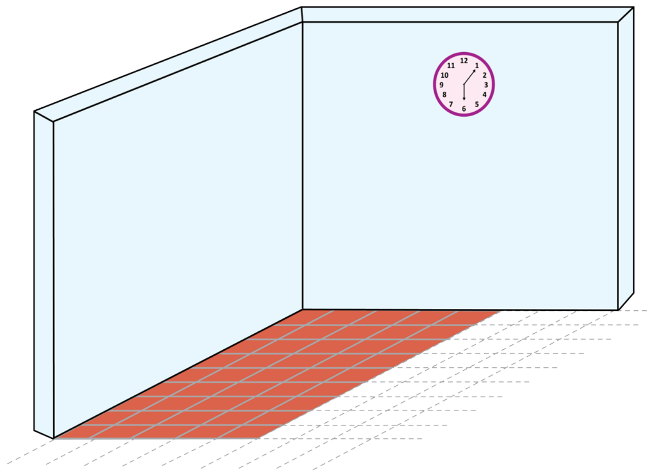


2. Ana hará un marco de madera para un espejo cuadrado de 400 cm^2 de área. ¿Qué dimensiones tienen los lados del espejo?

20 cm

3. Se utilizaron 240 ladrillos cuadrados para poner el piso de una casa de 60 m^2 de área. Determina el tamaño de los ladrillos que se usaron.

0.5 m

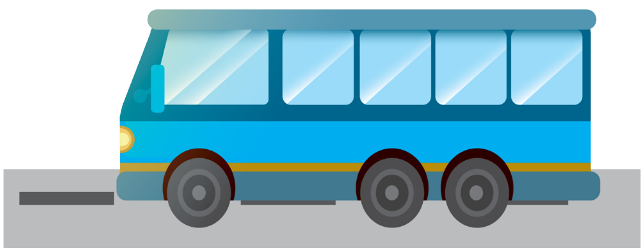


4. Ana compra 5 bolsitas con 5 chibolas cada una, y la señora de la tienda donde las compra le dijo que por cada bolsita extra que le comprara le aumentaría una chibola a cada bolsita, ¿cuántas bolsitas tiene que comprar Ana para obtener 64 chibolas?

8 bolsitas

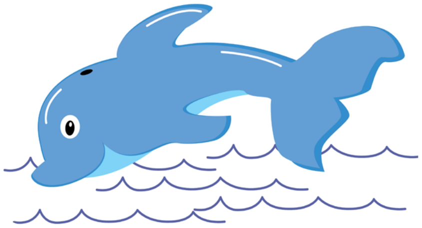
5. Mario es conductor de un bus y sabe que si cobra \$0.40 de pasaje se sube un promedio de 90 personas por viaje, si por cada centavo de pasaje que aumente se subirá una persona menos, ¿cuánto debe aumentar Mario al pasaje para obtener \$42 al finalizar el viaje?

20 centavos o
30 centavos



6. La altura sobre el nivel del mar que lleva un delfín al salir del agua está dada por la ecuación $h = 7t - 5t^2$, donde t representa el tiempo recorrido en segundos después que sale del agua. ¿Cuánto tiempo estará fuera del agua el delfín?

1.4 segundos



Indicador de logro

2.5 Resuelve problemas correspondientes a la ecuación cuadrática.

Solución de algunos ítems:

1.
$$x^2 + (8 - x)^2 = 34$$
$$x^2 + 64 - 16x + x^2 = 34$$
$$2x^2 - 16x + 30 = 0$$
$$x^2 - 8x + 15 = 0$$
$$(x - 5)(x - 3) = 0$$
$$x - 5 = 0 \text{ o } x - 3 = 0$$
$$x = 5 \text{ o } x = 3$$

Por lo tanto, las dimensiones son: 3 m y 5 m.

2.
$$x^2 = 400$$
$$x = \pm\sqrt{400}$$
$$x = \pm 20$$
$$x = 20$$

Por lo tanto, el espejo tiene dimensiones de 20 cm por lado.

3. Se debe determinar la longitud del lado del ladrillo.

Sea x la longitud de un ladrillo, entonces:

$$240x^2 = 60$$
$$x^2 = \frac{60}{240}$$
$$x^2 = \frac{1}{4}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$
$$x = \pm\frac{1}{2}$$
$$x = \frac{1}{2}$$
$$x = 0.5$$

4. x = número de bolsitas extra

$5 + x$ = número de bolsitas a comprar

$$(5 + x)(5 + x) = 64$$
$$(5 + x)^2 = 64$$
$$5 + x = \pm 8$$
$$x = -5 + 8 \quad \text{o} \quad x = -5 - 8$$
$$x = 3 \quad \text{o} \quad x = -13$$

Debe comprar 5 + 3 = 8 bolsitas.

5. Sea x el número de centavos que se aumentará, entonces:

$$(0.4 + 0.01x)(90 - x) = 42$$
$$100(0.4 + 0.01x)(90 - x) = 100(42)$$
$$(40 + x)(90 - x) = 4\,200$$
$$3600 + 50x - x^2 = 4\,200$$
$$x^2 - 50x + 600 = 0$$
$$(x - 30)(x - 20) = 0$$
$$x - 30 = 0 \text{ o } x - 20 = 0$$
$$x = 30 \text{ o } x = 20$$

Mario debe aumentar 20 o 30 centavos al pasaje.

6. El delfín saldrá del agua cuando $h = 0$ y entrará al agua cuando $h = 0$.

$$7t - 5t^2 = 0$$
$$t(7 - 5t) = 0$$
$$t = 0 \text{ o } 7 - 5t = 0$$
$$t = 0 \text{ o } t = \frac{7}{5}$$
$$t = 0 \text{ o } t = 1.4$$

El delfín estará fuera del agua 1.4 segundos.

Tarea: página 78 del Cuaderno de Ejercicios.

Unidad 4. Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + c$

Competencia de la Unidad

Determina las características de la función $y = ax^2+c$, trazando con precisión la gráfica y resolviendo problemas sobre la variación de la función.

Relación y desarrollo

Sexto grado

Unidad 5: Proporcionalidad
- Proporciones
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa

Séptimo grado

Unidad 6: Proporcionalidad directa e inversa
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa
- Aplicación de la proporcionalidad

Octavo grado

Unidad 3: Función lineal
- Función lineal
- Función lineal y ecuación de primer grado con dos incógnitas
- Aplicación de la función lineal

Noveno grado

Unidad 3: Ecuación cuadrática
- Ecuación cuadrática
- Aplicación de ecuaciones cuadráticas

Unidad 4: Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + c$
- Función $y = ax^2$
- Función $y = ax^2 + c$

Primer año de bachillerato

Unidad 4: Funciones reales
- Definición de función
- Función cuadrática
- Aplicaciones de la función cuadrática
- Otras funciones
- Práctica en GeoGebra

Segundo año de bachillerato

Unidad 4: Funciones trascendentales 1
- Potencia y raíz n-ésima
- Funciones y ecuaciones exponenciales

Unidad 5: Funciones trascendentales 2
- Función biyectiva e inversa
- Función logarítmica
- Funciones trigonométricas
- Práctica en GeoGebra

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Función $y = ax^2$	1	1. Proporcionalidad directa con el cuadrado, parte 1
	1	2. Proporcionalidad directa con el cuadrado, parte 2
	1	3. Función $y = x^2$
	1	4. Función $y = ax^2$; $a > 1$
	1	5. Función $y = ax^2$; $0 < a < 1$
	1	6. Función $y = -ax^2$; $a > 0$
	1	7. Características de $y = ax^2$
	1	8. Variación de $y = ax^2$, parte 1
	1	9. Variación de $y = ax^2$, parte 2
	1	10. Variación de $y = ax^2$, parte 3
	1	11. Practica lo aprendido
2. Función $y = ax^2 + c$	1	1. Función $y = ax^2 + c$; $c > 0$
	1	2. Función $y = ax^2 + c$; $c < 0$
	1	3. Condiciones iniciales para encontrar la ecuación de una función
	1	4. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 4

15 horas clase + prueba de la Unidad 4

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Función $y = ax^2$

Se estudia la función $y = ax^2$, estableciendo su necesidad a partir de la relación de proporción entre dos variables, cuando una de ellas esta elevada al cuadrado. Se grafican todos los casos de la función $y = ax^2$ tomando como referencia la función más simple cuando $a = 1$; se analizan las características y propiedades de esta función, los intervalos donde es creciente, decreciente y el eje de simetría. En esta lección surgen algunos conceptos nuevos para el estudiante, como dilatación y compresión vertical de una función, además de los conceptos de máximo y mínimo.

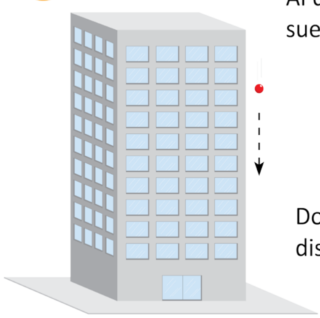
Lección 2: $y = ax^2 + c$

A partir de los conocimientos de la función $y = ax^2$ se obtiene con desplazamientos la gráfica de la función $y = ax^2 + c$, dependiendo del valor de c. Se utilizan además procesos de análisis para obtener la ecuación de una función de la forma $y = ax^2 + c$ a partir de ciertos datos iniciales.

Lección 1 Función $y = ax^2$

1.1 Proporcionalidad directa con el cuadrado, parte 1

P



Al dejar caer una pelota desde un edificio, la distancia que recorre hasta llegar al suelo varía como lo muestra la siguiente tabla:

x (segundos)	0	1	2	3	4
y (metros)	0	5	20	45	80

Donde x es el tiempo transcurrido (desde que se deja caer la pelota) y y es la distancia recorrida por la pelota después de x segundos.

y es directamente proporcional a x, si cuando x cambia en una cantidad de veces entonces y cambia en la misma cantidad.

a) Cuando x toma los valores 0, 1, 2, 3 y 4, ¿qué valores toma y? ¿Es y directamente proporcional a x?

b) En tu cuaderno, completa la siguiente tabla y responde, ¿qué relación hay entre x^2 y y?

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1			
y	0	5	20	45	80

c) ¿Cuál será la distancia recorrida después de 5 segundos?

d) Escribe y en términos de x.

S

a) Cuando x toma los valores 0, 1, 2, 3 y 4, entonces y toma los valores 0, 5, 20, 45 y 80, respectivamente (ver tabla).

Si y fuese directamente proporcional a x, entonces al cambiar x dos o tres veces, y también cambiaría dos o tres veces. Pero esto no ocurre.

Al cambiar $x = 1$ dos veces ($x = 2$) el valor de $y = 5$ cambia cuatro veces ($y = 20$).
Al cambiar $x = 1$ tres veces ($x = 3$) el valor de $y = 5$ cambia nueve veces ($y = 45$).

x 3
x 2

x (segundos)	0	1	2	3	4
y (metros)	0	5	20	45	80

x 4
x 9

Por tanto, y no es directamente proporcional a x.

b) La tabla queda de la siguiente manera:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
y	0	5	20	45	80

Al multiplicar por 5 cada una de las cantidades en x^2, el resultado son sus respectivas cantidades en y:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
y	0	5	20	45	80

Luego, y es igual a multiplicar 5 por x^2.

c) La distancia recorrida después de 5 segundos será:

$$5(5^2) = 5(25)$$
$$= 125 \text{ metros}$$

d) $y = 5x^2$

C

Una magnitud y **es directamente proporcional al cuadrado de otra magnitud** x si $y = ax^2$. El número a es una **constante**, es decir, un número real fijo.

Por ejemplo, la distancia que recorre una pelota al caer, es directamente proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido desde que se deja caer.

En el Problema inicial, la constante a es igual a 5. Este es un valor aproximado de la cantidad real, la cual se verá más detenidamente en ciencias naturales.

1. El área del cuadrado es directamente proporcional al cuadrado de su diagonal, donde $a = \frac{1}{2}$.

   a) Completa los valores para el área en la siguiente tabla, donde x representa la diagonal del cuadrado (en cm) y y es el área (en cm^2) del mismo:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64
y	0	0.5	2	4.5	8	12.5	18	24.5	32

   b) Escribe y (el área) en términos de x (su diagonal). $y = \frac{1}{2}x^2$

2. El área del círculo es directamente proporcional al cuadrado de su radio.

   a) ¿Cuál es el valor de la constante? π
   b) Si x representa el radio del círculo y y su área, escribe y en términos de x. $y = \pi x^2$
   c) Completa los valores para el área en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64
y	0	1	4π	9π	16π	25π	36π	49π	64π

Indicador de logro

1.1 Plantea una ecuación de la forma $y = ax^2$ a partir del uso de tablas y encontrando la proporcionalidad directa con el cuadrado de la ecuación.

Secuencia

El estudio de la proporcionalidad directa se realiza desde sexto grado, donde se analizan situaciones que pueden ser descritas con una proporcionalidad directa o inversa, este estudio se extiende en séptimo grado, donde además, se utilizan tablas y se grafican pares ordenados para interpretar los cambios entre las variables; en octavo grado se grafican funciones lineales a partir de la relación de proporción entre dos variables, donde la razón de cambio entre ambas variables es llamada **pendiente de la función**.

Es importante mencionar que en esta unidad, el estudio se enfoca en las funciones de la forma $y = ax^2 + c$, el estudio de funciones del tipo: $y = ax^2 + bx + c$ se realizará hasta bachillerato.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Analizar la relación de proporción entre dos variables mediante el uso de tablas.
En el literal a), se pretende observar que no existe relación de proporción entre las variables x y y, sin embargo, en el literal b) se puede analizar que sí existe una relación directa entre la variable y y el cuadrado de x, esta regla de correspondencia se plantea formalmente en d).

Ⓔ Mostrar que la variable y se obtiene al multiplicar x^2 por un mismo número, de esta forma y es directamente proporcional a x^2.

Puede que algunos estudiantes aún no dominen completamente el concepto de proporcionalidad directa, en este caso, puede utilizarse una clase específicamente con el fin de recordar los conceptos fundamentales para esta unidad. Para este fin, revisar la clase 1.2 de la Unidad 6 de séptimo grado.

Fecha: **U4 1.1**

Ⓟ

x (segundos)	0	1	2	3	4
y (metros)	0	5	20	45	80

a) ¿Es y directamente proporcional a x?
b) Completa la tabla, ¿qué relación hay entre x^2 y y?

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1			
y	0	5	20	45	80

c) ¿Cuál será la distancia recorrida después de 5 segundos?
d) Escribe y en términos de x.

Ⓢ

×2 ×3

x (segundos)	0	1	2	3	4
y (metros)	0	5	20	45	80

×4 ×9

a) y no es directamente proporcional a x

b)

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
y	0	5	20	45	80

×5 ×5 ×5 ×5 ×5

c) $5(5^2) = 5(25) = 125$ metros
d) $y = 5x^2$

Ⓡ 1. b) $y = \frac{1}{2}x^2$ 2. a) π
b) $y = \pi x^2$

Tarea: página 82 del Cuaderno de Ejercicios.

1.2 Proporcionalidad directa con el cuadrado, parte 2

P

La variable y es directamente proporcional al cuadrado de la variable x. Además, si $x = 3$, entonces $y = 18$. Plantea $y = ax^2$ encontrando el valor de la constante a.

S

De acuerdo al enunciado del problema, $y = ax^2$.

Para encontrar el valor de la constante a se sustituyen $x = 3$ y $y = 18$ y se resuelve la ecuación:

$$18 = a(3)^2$$
$$18 = 9a$$
$$a = \frac{18}{9}$$
$$a = 2$$

Por lo tanto, $y = 2x^2$.

C

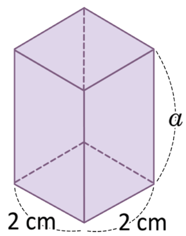
Si $y = ax^2$, entonces el valor de la constante a puede encontrarse sustituyendo un par de valores particulares de x y y, luego se resuelve la ecuación.

Si y es directamente proporcional al cuadrado de x, entonces se dice que **y es función de x**, pues cada valor de x determina un único valor de y.

En general, la función $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales ($a \neq 0$) se llama **función cuadrática**. Las funciones $y = ax^2$ y $y = ax^2 + c$ son casos especiales que se estudiarán en esta unidad, la forma completa de la función cuadrática se estudiará hasta bachillerato.

1. En cada literal, y es directamente proporcional a x^2. Calcula el valor de la constante en los siguientes casos:
   a) Cuando $x = 2$ entonces $y = 12$. $a = 3$; $y = 3x^2$
   b) Cuando $x = 3$ entonces $y = 18$. $a = 2$; $y = 2x^2$
   c) Cuando $x = 6$ entonces $y = 18$. $a = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}x^2$

2. El volumen de un prisma de base cuadrada y altura constante varía proporcionalmente al cuadrado del lado de su base. Si el lado de la base mide 2 cm el volumen es igual a 12 cm^3, ¿cuánto mide su altura? La altura es 3 cm



El volumen de un prisma es igual al producto de su altura por el área de su base.

Indicador de logro

1.2 Utiliza la proporcionalidad directa para encontrar la constante de proporcionalidad dada la variable independiente y dependiente.

Secuencia

En la clase anterior se estudiaron relaciones de proporción directa entre una variable y el cuadrado de otra y se obtuvo además la ecuación que modela esa relación. Para esta clase se trabaja directamente con ecuaciones que describen proporcionalidad directa con el cuadrado; se encuentra la constante de proporción a partir de datos iniciales que pueden tomar las variables y se concluye que a este tipo de ecuaciones se les conoce como **funciones cuadráticas**. En séptimo y octavo grado se ha estudiado a profundidad la función lineal, en noveno grado y primer año de bachillerato se estudiará todo lo pertinente a la función cuadrática.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Consolidar el concepto de **constante de proporción directa** a través de un problema, donde se calcule esta constante conociendo los valores que toman las variables en un mismo momento.

Solución de algunos ítems:

1.
c) Cuando $x = 6$ entonces $y = 18$.

$$y = ax^2$$
$$18 = a(6)^2$$
$$a = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, $y = \frac{1}{2}x^2$

2.
Si y representa el volumen del prisma.

$$y = a(2)^2$$
$$12 = a(2)^2$$
$$a = \frac{12}{4} = 3$$

Por lo tanto, su altura mide 3 cm.

Fecha:

U4 1.2

Ⓟ En la ecuación $y = ax^2$. Si $x = 3$ entonces $y = 18$. Encuentra el valor de a.

Ⓢ Se sabe que $y = ax^2$.
Si $x = 3$ y $y = 18$.

$$18 = a(3)^2$$
$$18 = 9a$$
$$a = \frac{18}{9}$$
$$a = 2$$

Por tanto, $y = 2x^2$.

Observa que para cada valor de x existe un único valor de y.

Ⓡ

1. a) Cuando $x = 2$ entonces $y = 12$.

$$y = ax^2$$
$$12 = a(2)^2$$
$$a = \frac{12}{4} = 3$$

Por lo tanto, $y = 3x^2$.

b) $a = 2$; $y = 2x^2$
c) $a = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}x^2$

2. $a = 3$; la altura del prisma es 3 cm.

Tarea: página 83 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 La función $y = x^2$

Dada la función $y = x^2$, donde $a = 1$:

a) En tu cuaderno completa la siguiente tabla:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	16								

b) Ubica en el plano cartesiano los pares ordenados (x, y) encontrados en el literal anterior y responde: ¿están todos en una línea recta?

c) Completa las siguientes tablas y ubica los pares ordenados en el plano cartesiano. ¿Cómo es la línea que se forma?

x	–1	–0.9	–0.8	–0.7	–0.6	–0.5	–0.4	–0.3	–0.2	–0.1	0
y	1	0.81									0

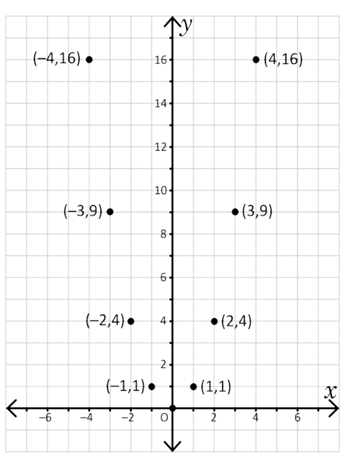
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	0.01									

a) Cada valor de y es igual a elevar al cuadrado su correspondiente valor de x. Debe tenerse cuidado con el signo, por ejemplo: $(-4)^2 = (-4)(-4) = 16$. De acuerdo a esto, la tabla queda de la siguiente manera:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

b) Para ubicar los puntos en el plano cartesiano se hace lo siguiente: se sitúa la primera coordenada sobre el eje x; a partir de esta, se cuentan las unidades correspondientes a la segunda coordenada, hacia arriba si es positiva o hacia abajo si es negativa (en ambos casos en forma vertical).

De acuerdo a lo anterior, los puntos del literal a) quedan situados como se muestra en la figura. Claramente, no están sobre una línea recta:



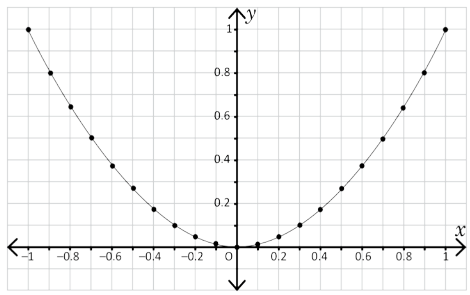
Unidad 4

c) Los resultados en la tabla son los siguientes:

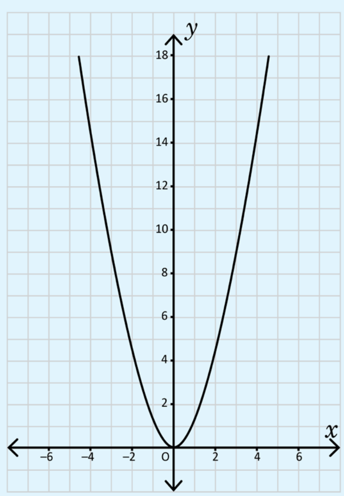
x	–1	–0.9	–0.8	–0.7	–0.6	–0.5	–0.4	–0.3	–0.2	–0.1	0
y	1	0.81	0.64	0.49	0.36	0.25	0.16	0.09	0.04	0.01	0

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1

La línea que se forma se muestra en la figura:



La gráfica de la función $y = x^2$ se llama **parábola** y pasa por el origen (0, 0).



Todas las funciones cuadráticas tienen una parábola como gráfica, y su forma es similar a la de $y = x^2$.

1. Con base a los resultados encontrados en el Problema inicial, ¿qué relación hay entre los valores de y cuando $x = –1$ y $x = 1$?, ¿ocurre lo mismo cuando $x = –2$ y $x = 2$? Si $x = 1$ y $x = –1$, entonces $y = 1$. Si $x = 2$ y $x = –2$, entonces $y = 4$.
2. En general, ¿qué relación hay entre los valores de y cuando $x = –m$ y $x = m$? En ambos casos $y = m^2$
3. Si “doblas” la gráfica de $y = x^2$ justo por el eje y, ¿qué ocurre con las partes de la gráfica que quedan a ambos lados? Las dos partes de la gráfica coinciden

Indicador de logro

1.3 Describe las características de la función $y = x^2$ a partir de los puntos ubicados en el plano cartesiano.

Secuencia

En las clases anteriores se analizó la proporcionalidad con el cuadrado utilizando tablas; para esta clase se grafican los pares ordenados que resultan de los valores que aparecen en la tabla. Así como en octavo grado, con la gráfica de la función lineal, el objetivo es analizar la forma de la gráfica de una proporcionalidad directa con el cuadrado, en el plano cartesiano.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ En a) y b) se trata de que el estudiante pueda discernir que la gráfica resultante no es una línea recta pero que posee una particularidad, que puede ser descriptible y en c) se espera de que el estudiante pueda observar que hay cierta regularidad entre los puntos graficados en el plano cartesiano y que pueden ser descritos mediante una línea curva.

Ⓟ Es la primera vez en el que a la gráfica de la función $y = x^2$ se le describe con el nombre de **parábola**, se debe hacer énfasis en las características de esta función, como su abertura y el hecho de que a cada número real x y su opuesto siempre le corresponde el mismo valor para y.

Solución de algunos ítems:

1. Si $x = 1$ y $x = -1$, la variable y toma el mismo valor $y = 1$. Lo mismo ocurre si $x = -2$ y $x = 2$, y toma el valor de 4.
   Lo importante es notar que a números opuestos de x, le corresponde el mismo número en y.

2. Cuando $x = -m$ y $x = m$ en ambos casos $y = m^2$.

Materiales:
Construcción del plano cartesiano. Utilizando medio pliego de papel bond y plumones, se puede formar una cuadrícula preferiblemente de 20 × 20 y porteriormente forrar con cinta adhesiva.

Posibles dificultades:
En c), indicar el uso correcto de la calculadora.
Si se escribe -0.8^2 el resultado será -0.64, indicar que se escriba de la forma correcta $(-0.8)^2$, y el resultado será 0.64.

Fecha: **U4 1.3**

Ⓟ a)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

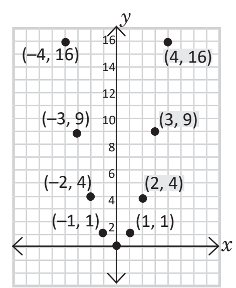
b) Ubica los pares ordenados (x, y) de a).

c) Completa la tabla y ubica los pares ordenados.

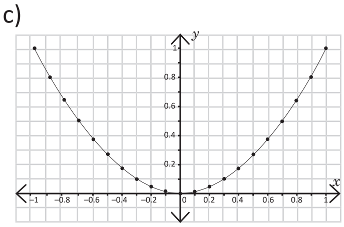
x	–0.7	–0.6	–0.5	–0.4	–0.3	–0.2	–0.1
y	0.49	0.36	0.25	0.16	0.09	0.04	0.01

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
y	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49

Ⓢ b)



c)



Tarea: página 84 del Cuaderno de Ejercicios.

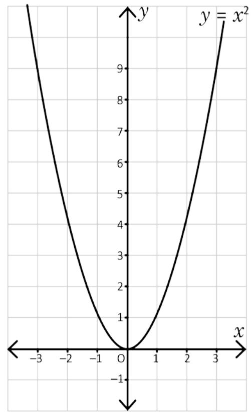
1.4 La función $y = ax^2$; $a > 1$

P

A partir de la gráfica de $y = x^2$, realiza lo siguiente:

a) Completa la tabla y grafica la función $y = 2x^2$ en el mismo plano que $y = x^2$.

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
x^2	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$2x^2$	8								



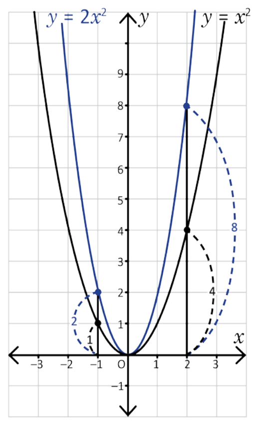
b) ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = 2x^2$?

c) Compara el valor de y para ambas funciones cuando $x = -1$ y $x = 2$, ¿qué ocurre?

S

a) Los valores de $y = 2x^2$ son el resultado de multiplicar por 2 los de $y = x^2$. La tabla queda de la siguiente manera:

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
x^2	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$2x^2$	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8



b) Similitudes en ambas gráficas: pasan por el origen (0, 0), son parábolas y al doblar por el eje y la parte de la gráfica que queda del lado derecho coincide con la del lado izquierdo.

Diferencias en ambas gráficas: los demás puntos, diferentes del origen, no coinciden. Además, $y = 2x^2$ "está arriba" de $y = x^2$.

c) Al observar la tabla y la gráfica, el valor de $y = 2x^2$ es el doble del valor de $y = x^2$ cuando $x = -1$. Lo mismo ocurre para $x = 2$; en general, el valor de la función $y = 2x^2$ es el doble del valor de la función $y = x^2$.

La gráfica de $y = 2x^2$ resulta de alargar verticalmente en un factor 2 la gráfica de $y = x^2$. A esto se le llama **dilatación vertical**.

C

Si a es un número mayor que 1 ($a > 1$), entonces para elaborar la gráfica de $y = ax^2$ se multiplica por a todos los valores de $y = x^2$. El **eje de simetría** de una parábola es la recta vertical que divide a la parábola en dos partes congruentes, en el caso de $y = ax^2$ el eje de simetría es el eje y.

Grafica las siguientes funciones a partir de la gráfica de $y = x^2$:

a) $y = 3x^2$

b) $y = 4x^2$

c) $y = \frac{3}{2}x^2$

Indicador de logro

1.4 Elabora la gráfica de $y = ax^2$ con $a > 1$, a partir de la gráfica $y = x^2$.

Secuencia

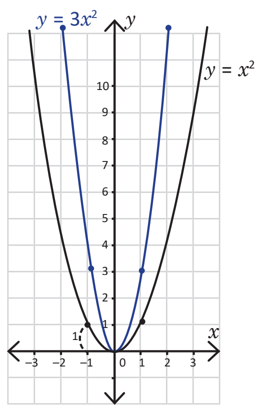
En esta clase se aprovecha el conocimiento de la gráfica $y = x^2$ y se compara con $y = 2x^2$ para observar el cambio que produce una constante mayor que 1 cuando está multiplicando la variable.

Propósito

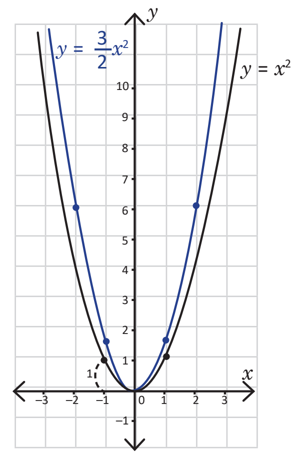
Ⓟ, En la tabla se pueden comparar los valores de x^2 y de $2x^2$ para posteriormente identificar cómo cambia la gráfica de la función $y = 2x^2$ con respecto a la función $y = x^2$.
Ⓢ Cuando $a > 1$, el efecto producido en $y = ax^2$ se llama **dilatación vertical**, es importante que el estudiante utilice correctamente el lenguaje matemático para comunicar sus ideas.

Solución de algunos ítems:

a)



c)



Se debe partir siempre de $y = x^2$, así las demás funciones surgen de una transformación de esta. Graficar todas en un mismo plano ayuda a observar las variaciones.

Fecha: **U4 1.4**

Ⓟ a) Completa la tabla:

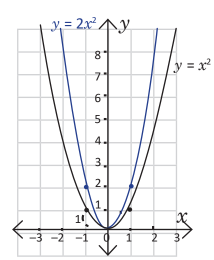
x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
x^2	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$2x^2$	8	4.50	2	0.50	0	0.50	2	4.5	8

Grafica $y = 2x^2$ y $y = x^2$ en el mismo plano.

b) Escribe las similitudes y diferencias entre ambas gráficas.

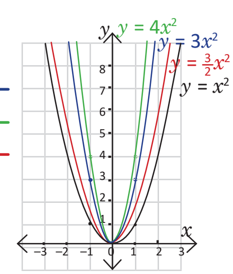
c) Para $x = -1$ y $x = 2$. ¿Qué ocurre con y en ambos casos?

Ⓢ b) Similitudes: pasan por (0, 0), el eje de simetría es el eje y.
Diferencias: el único punto que tienen en común es el origen. Además la gráfica $y = 2x^2$ está arriba de $y = x^2$.
c) El valor de y, para $y = 2x^2$ es siempre el doble que el de la función $y = x^2$.



Ⓡ

a) —
b) —
c) —



Tarea: página 85 del Cuaderno de Ejercicios.

1.5 Función $y = ax^2$; $0 < a < 1$

P

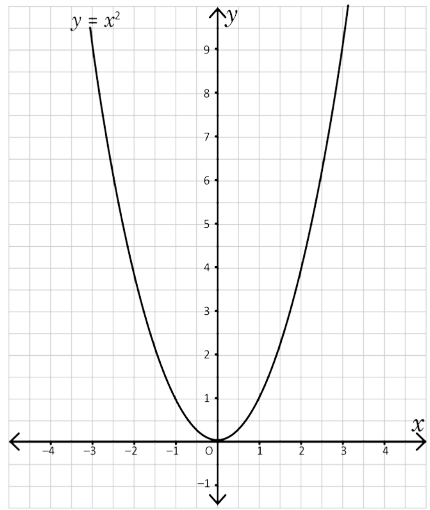
A partir de la gráfica de $y = x^2$, realiza lo siguiente:

a) Completa la tabla y grafica la función $y = \frac{1}{2}x^2$ en el mismo plano que $y = x^2$.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\frac{1}{2}x^2$							

b) ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = \frac{1}{2}x^2$?

c) Compara el valor de y para ambas funciones, cuando $x = -3$ y $x = 2$, ¿qué ocurre?



S

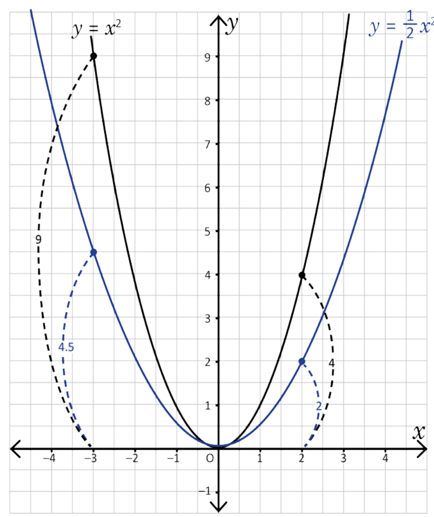
a) Los valores de $y = \frac{1}{2}x^2$ son el resultado de multiplicar por $\frac{1}{2}$ los de $y = x^2$. La tabla queda de la siguiente manera:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9 $\times\frac{1}{2}$	4 $\times\frac{1}{2}$	1 $\times\frac{1}{2}$	0 $\times\frac{1}{2}$	1	4	9
$\frac{1}{2}x^2$	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5

b) Similitudes en ambas gráficas: pasan por el origen (0, 0), son parábolas y el eje y es eje de simetría.

Diferencias en ambas gráficas: los demás puntos diferentes del origen no coinciden. Además, $y = \frac{1}{2}x^2$ "está debajo" de $y = x^2$.

c) Al observar la tabla y la gráfica, el valor de $y = \frac{1}{2}x^2$ es la mitad del valor de $y = x^2$ cuando $x = -3$. Lo mismo ocurre para $x = 2$; en general, el valor de la función $y = \frac{1}{2}x^2$ es $\frac{1}{2}$ del valor de la función $y = x^2$.



La gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$ resulta de reducir verticalmente en un factor 2 la gráfica de $y = x^2$. A esto se le llama **compresión vertical**.

C

Si a es un número mayor que cero y menor que 1 ($0 < a < 1$), entonces para elaborar la gráfica de $y = ax^2$ se multiplica por a todos los valores de $y = x^2$.

Grafica las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{3}x^2$ b) $y = \frac{1}{4}x^2$ c) $y = \frac{2}{3}x^2$

Indicador de logro

1.5 Elabora la gráfica de $y = ax^2$ con $0 < a < 1$, a partir de la gráfica $y = x^2$.

Secuencia

Al igual que en la clase anterior, utilizando como base la función $y = x^2$ se grafica la función $y = ax^2$ con $0 < a < 1$, comparando las variaciones respecto a la función $y = x^2$. El efecto que produce $a > 1$ se le llama **dilatación vertical** y si $0 < a < 1$ se le llama **compresión vertical**.

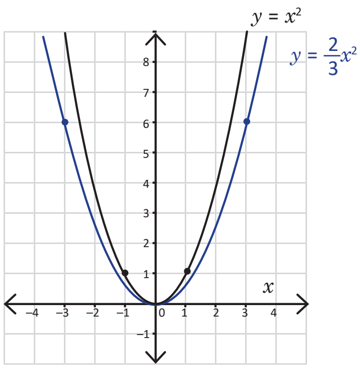
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar los datos en la tabla para comparar la función $y = \frac{1}{2}x^2$ con la función $y = x^2$ y posteriormente graficar ambas funciones. En c), el objetivo es observar que los valores de $y = x^2$ crecen más rápidamente que los valores de $y = \frac{1}{2}x^2$.

Solución de algunos ítems:

c) Para mayor exactitud en el trazo de la gráfica se puede realizar la tabla; graficar algunos pares ordenados y trazar la curva.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\frac{2}{3}x^2$	6	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	6



Al desarrollar la clase, se debe graficar la parábola luego de completar la tabla, posteriormente solucionar b) y c). La disposición de la pizarra se ha realizado considerando el espacio disponible.

Fecha: **U4 1.5**

Ⓟ a) Completa la tabla:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5

Grafica $y = \frac{1}{2}x^2$ y $y = x^2$ en el mismo plano.

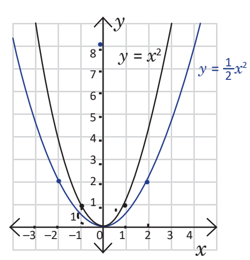
b) Escribe las similitudes y diferencias entre ambas gráficas.

c) Para $x = –3$ y $x = 2$. ¿Qué ocurre con y en ambos casos?

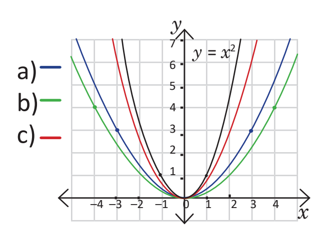
Ⓢ b) Similitudes: pasan por (0, 0), el eje de simetría es el eje y.

Diferencias: el único punto que tienen en común es el origen. Además, la gráfica $y = \frac{1}{2}x^2$ está debajo de $y = x^2$.

c) El valor de y, para $y = \frac{1}{2}x^2$ es siempre la mitad que el de la función $y = x^2$.



Ⓡ



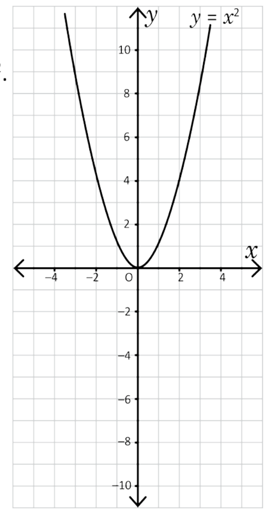
Tarea: página 86 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 Función $y = -ax^2$; $a > 0$

P

A partir de la gráfica de $y = x^2$, realiza lo siguiente:

a) Completa la tabla y grafica la función $y = -x^2$ en el mismo plano que $y = x^2$.



x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$	–9						

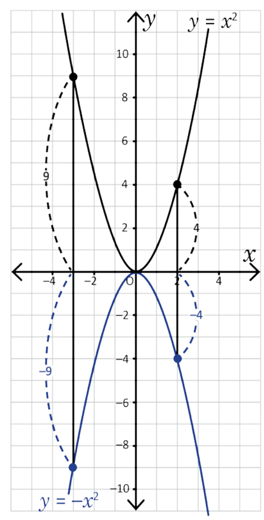
b) ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$?

c) Compara el valor de y para ambas funciones cuando $x = -3$ y $x = 2$, ¿qué ocurre?

S

a) Los valores de $y = -x^2$ son el resultado de multiplicar por –1 los de $y = x^2$. La tabla queda de la siguiente manera:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9 × (–1)	4 × (–1)	1 × (–1)	0 × (–1)	1	4	9
$-x^2$	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9



b) Similitudes en ambas gráficas: pasan por el origen (0, 0), son parábolas y el eje y es eje de simetría.

Diferencias en ambas gráficas: los demás puntos diferentes del origen no coinciden. Además, $y = -x^2$ está debajo del eje x.

c) Al observar la tabla y la gráfica, el valor de $y = -x^2$ es el opuesto negativo del valor de $y = x^2$ cuando $x = -3$. Lo mismo ocurre para $x = 2$; en general, el valor de la función $y = -x^2$ es el negativo del valor de la función $y = x^2$.

C

Si a es un número mayor que cero ($a > 0$), entonces para elaborar la gráfica de $y = -ax^2$ se multiplica por –1 todos los valores de $y = ax^2$. La función $y = -ax^2$ es una **reflexión con respecto al eje x** de la función $y = ax^2$; en este caso se dice que la parábola de $y = -ax^2$ se abre hacia abajo.

Grafica las funciones: $y = -2x^2$ y $y = -\frac{1}{2}x^2$ y compáralas con las gráficas de $y = 2x^2$ y $y = \frac{1}{2}x^2$.

Unidad 4

Indicador de logro

1.6 Elabora la gráfica de $y = -ax^2$ con $a > 0$, a partir de la gráfica $y = x^2$.

Secuencia

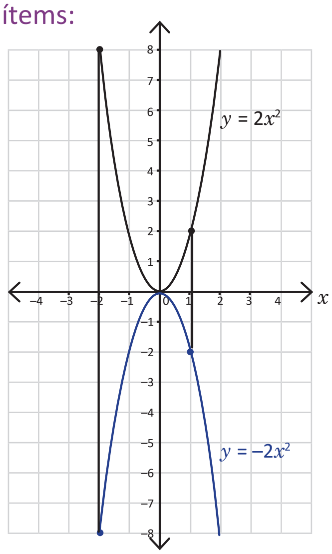
En clases anteriores se estudió la función $y = ax^2$, cuando $0 < a < 1$ y cuando $a > 1$, observando los cambios producidos por a y comparando con $y = x^2$. Para esta clase, se trabaja el caso cuando el coeficiente a está siendo multiplicado por un signo menos, el nombre que recibe esta transformación es **reflexión con respecto al eje x**, debido a la propiedad de simetría que cumple esta función al ser comparada con $y = x^2$.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar una situación similar a la estudiada durante las últimas dos clases para construir la gráfica de una parábola cuando el coeficiente a es negativo y distinto de cero. En b), se deben analizar detalladamente las características de esta función, principalmente el hecho de que su abertura es hacia abajo.

Se debe utilizar correctamente el lenguaje matemático y referirse a esta transformación con el nombre de reflexión, ya que si se dobla la imagen de la gráfica por el eje x, las gráficas $y = x^2$ y $y = -x^2$ coinciden.

Solución de algunos ítems:



Se debe indicar que se grafiquen las funciones $y = 2x^2$ y $y = -2x^2$ en un mismo plano.

Fecha: **U4 1.6**

Ⓟ a) Completa la tabla:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

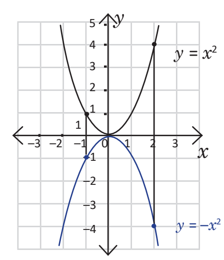
Grafica $y = 2x^2$ y $y = -x^2$ en el mismo plano.

b) Escribe las similitudes y diferencias entre ambas gráficas.

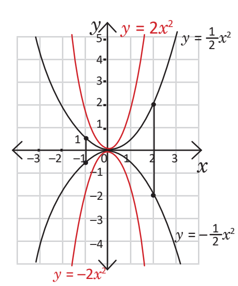
c) Para $x = -3$ y $x = 2$, ¿qué ocurre con y?

Ⓢ b) Similitudes: pasan por (0, 0), el eje de simetría es el eje y.
Diferencias: la gráfica $y = -x^2$ está debajo del eje x y su único punto en común es el (0, 0).

c) El valor de y, para $y = -x^2$ es siempre el número opuesto al de la función $y = x^2$.



Ⓡ



Tarea: página 87 del Cuaderno de Ejercicios.

1.7 Características de $y = ax^2$

P

Utilizando las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$:

a) Grafica en el mismo plano las funciones: $y = 3x^2$, $y = -3x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$ y $y = -\frac{1}{3}x^2$ (utiliza las que ya graficaste en clases anteriores).

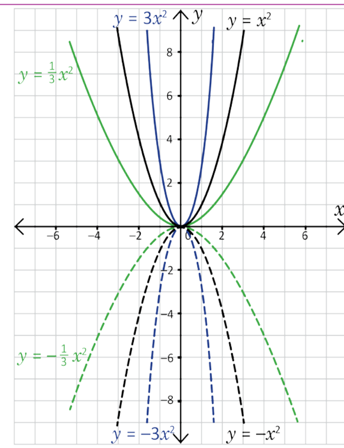
b) Si a es cualquier número real, excepto 0 (es decir, puede ser positivo o negativo), escribe las características de la gráfica de la función $y = ax^2$.

S

a) La gráfica de la función $y = -3x^2$ es una reflexión con respecto al eje x de la gráfica $y = 3x^2$. De forma similar, la gráfica de $y = -\frac{1}{3}x^2$ es una reflexión con respecto al eje x de la gráfica de $y = \frac{1}{3}x^2$.

b) Características de la función $y = ax^2$:

- Sin importar el valor de a, la gráfica de $y = ax^2$ es una parábola que pasa por el origen (0, 0) y el eje y es eje de simetría.
- Si el valor absoluto de a es mayor que 1, entonces la parábola se acerca al eje y; mientras que si el valor absoluto de a está entre 0 y 1, entonces la parábola se aleja del eje y.
- Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba.
- Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

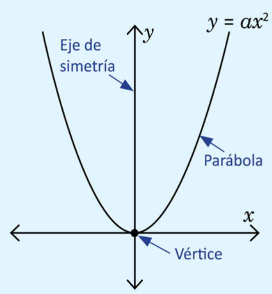


C

A la gráfica de la función $y = ax^2$ se le llama parábola, y tiene al eje y como eje de simetría. El punto de intersección entre la parábola y su eje de simetría se llama **vértice**; en el caso de $y = ax^2$, el vértice coincide con el origen (0, 0).

Si el valor absoluto de a es mayor que 1, entonces la parábola se acerca al eje y; mientras que si el valor absoluto de a está entre 0 y 1, entonces la parábola se aleja del eje y.

Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $a < 0$, entonces la parábola se abre hacia abajo.



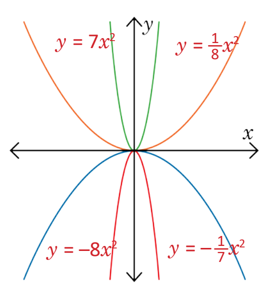
A cada función de la izquierda asígnale su respectiva gráfica en la derecha. Justifica tu respuesta.

a) $y = -\frac{1}{7}x^2$

b) $y = -8x^2$

c) $y = 7x^2$

d) $y = \frac{1}{8}x^2$



Indicador de logro

1.7 Identifica las características de la función $y = ax^2$ y de la función $y = -ax^2$ a partir de los valores de a.

Secuencia

Anteriormente se analizaron las gráficas de las funciones $y = ax^2$ y $y = -ax^2$. En esta clase se estudian las características de la función $y = ax^2$, destacando conceptos importantes, como el vértice, su eje de simetría y la forma que toma la parábola dependiendo de los valores que pueda tomar a.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Para a), graficar varios casos particulares de parábolas para analizar las características que poseen estas funciones.
Para b), generalizar las características de la función $y = ax^2$ a partir de lo observado en a).

Ⓒ Establecer cuáles son los elementos de una parábola y la forma de la gráfica según los valores que pueda tomar a. Es importante que el estudiante tenga claro el concepto de valor absoluto pues es necesario para poder establecer las características de la función.

Si el estudiante no comprende las características de la parábola cuando se menciona el valor absoluto, se les debe sugerir que observen qué sucede con las formas de las funciones $y = 3x^2$ y $y = -3x^2$ donde $a = 3$ y poseen el mismo valor absoluto.

Fecha: **U4 1.7**

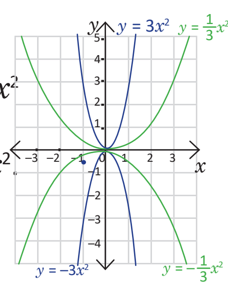
Ⓟ a) Grafica las funciones: $y = 3x^2$, $y = -3x^2$
$y = \frac{1}{3}x^2$, $y = -\frac{1}{3}x^2$

b) Escribe las características de $y = ax^2$.
Si a puede tomar cualquier número real distinto de cero.

Ⓢ

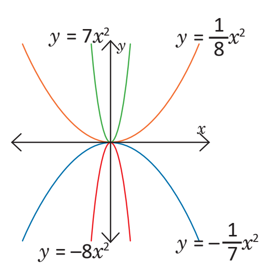
a) $y = -3x^2$ es una reflexión de $y = 3x^2$

$y = -\frac{1}{3}x^2$ es una reflexión de $y = \frac{1}{3}x^2$



b) Características de $y = ax^2$:
- Si $a > 0$, abertura hacia arriba.
- Si $a < 0$, abertura hacia abajo.
- Si $|a| > 1$, la parábola se acerca al eje y.
- Si $0 < |a| < 1$, la parábola se aleja del eje y.

Ⓡ



Tarea: página 88 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.8 Variación de $y = ax^2$, parte 1

P

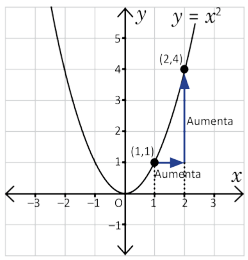
A partir de las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$ responde lo siguiente:

a) Si el valor de x aumenta de 1 a 2, ¿cómo cambia el valor de y en $y = x^2$ y en $y = -x^2$?
b) Si el valor de x aumenta de –2 a –1, ¿cómo cambia el valor de y en $y = x^2$ y en $y = -x^2$?

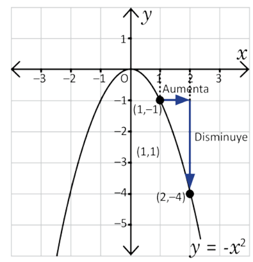
S

a) Al observar las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$ se puede concluir lo siguiente:

Si el valor de x aumenta de 1 a 2, entonces el valor de y aumenta de 1 a 4.

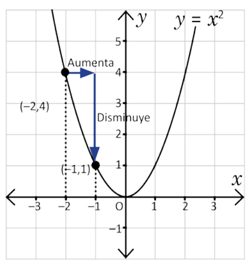


Si el valor de x aumenta de 1 a 2, entonces el valor de y disminuye de –1 a –4.

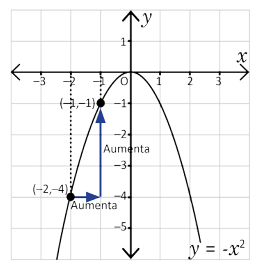


b) De forma similar al literal anterior se puede concluir lo siguiente:

Si el valor de x aumenta de –2 a –1, entonces el valor de y disminuye de 4 a 1.

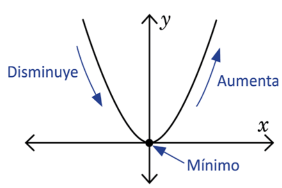
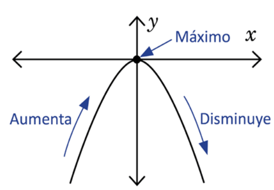


Si el valor de x aumenta de –2 a –1, entonces el valor de y aumenta de –4 a –1.



C

Dada la función $y = ax^2$ y a un número real excepto 0 (positivo o negativo). Al ir aumentando el valor de x, ocurre lo siguiente:

$a > 0$	$a < 0$
a) Si $x < 0$ entonces el valor de y disminuye. b) Si $x > 0$ entonces el valor de y aumenta. c) Si $x = 0$ entonces $y = 0$. En este caso, se dice que $y = 0$ es el valor **mínimo** de la función $y = ax^2$.  	a) Si $x < 0$ entonces el valor de y aumenta. b) Si $x > 0$ entonces el valor de y disminuye. c) Si $x = 0$ entonces $y = 0$. En este caso, se dice que $y = 0$ es el valor **máximo** de la función $y = ax^2$. 

Para $y = x^2$: De 2 a 3, y aumenta. De –3 a –2, y disminuye.
Para $y = -x^2$: De 2 a 3, y disminuye. De –3 a –2, y aumenta.

1. A partir de las gráficas de las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$, si el valor de x aumenta de 2 a 3, ¿cómo cambia el valor de y en ambos casos?, ¿y si aumenta de –3 a –2?
2. En la función $y = x^2$, ¿existen valores de x que cumplan $y = -4$? Justifica tu respuesta.

En $y = x^2$, si $x = 2$, entonces $y = 4$, si $x = -2$, entonces $y = 4$. Luego, como el valor de y siempre es positivo, no existe ningún número que cumpla $y = -4$.
Otra forma es observar que en la gráfica de la función $y = x^2$ los valores de y siempre son positivos.

Indicador de logro

1.8 Describe el cambio en los valores de la función $y = ax^2$ en el intervalo que no incluye la coordenada x del vértice.

Secuencia

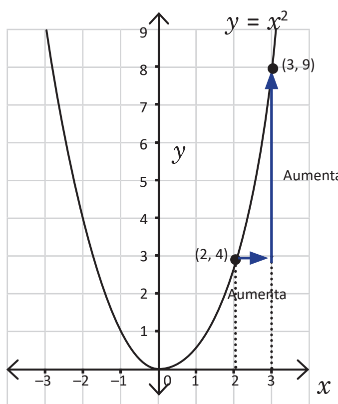
En esta clase se estudiará el comportamiento de la función a medida que los valores de x aumentan, además de los valores máximos y mínimos de la función, estos conceptos se estudiarán más ampliamente y con mayor rigurosidad en bachillerato. Además, en esta clase se estudian los intervalos que no incluyen la coordenada x del vértice.

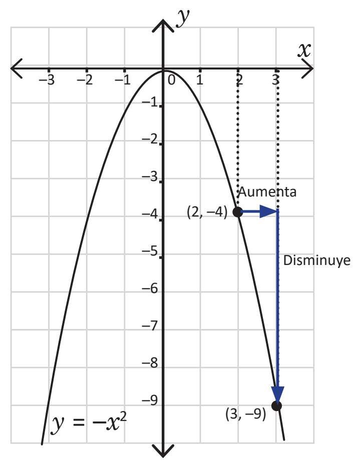
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Lo importante es observar cómo cambia y a medida que x aumenta, y notar las diferencias entre ambas funciones. Distinguir que existe un punto que es el mínimo y un punto que es el máximo de la función.

Ⓒ Lo importante es que el valor de y aumenta o disminuye en un lado del eje de simetría, por lo tanto, basta comparar los valores de y en los extremos del intervalo.

Solución de algunos ítems:





Para el problema inicial, se sugiere tener dibujados en papel bond las cuatro parábolas de la solución antes de iniciar la clase.

Fecha: **U4 1.8**

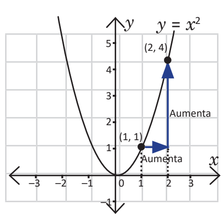
Ⓟ Para las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$.

a) Si x aumenta de 1 a 2, ¿cómo cambia y?

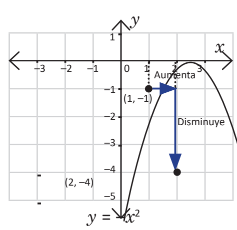
b) Si x aumenta de –2 a –1, ¿cómo cambia y?

Ⓢ a)

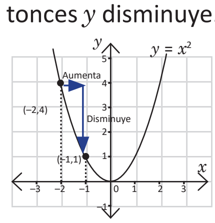
Si x aumenta entonces y aumenta.



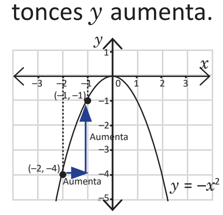
Si x aumenta entonces y disminuye.



b) Si x aumenta entonces y disminuye.



Si x aumenta entonces y aumenta.



Ⓡ 1. Para $y = x^2$:

Si x aumenta de 2 a 3, y aumenta.
Si x aumenta de –3 a –2, y disminuye.
Para $y = -x^2$:
Si x aumenta de 2 a 3, y disminuye.
Si x aumenta de –3 a –2, y aumenta.

Tarea: página 89 del Cuaderno de Ejercicios.

1.9 Variación de $y = ax^2$, parte 2

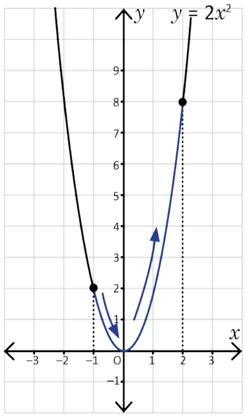
P

En la función $y = 2x^2$, si el valor de x se encuentra entre –1 y 2, ¿entre cuáles números se encuentra y?

Utiliza la gráfica de $y = 2x^2$.

S

Para determinar los valores de y se trazan segmentos verticales que van, el primero desde $x = -1$ hasta la parábola, y el segundo desde $x = 2$ hasta la parábola.



Se observa lo siguiente:

- El valor mínimo que toma y es 0 (cuando $x = 0$).
- El valor máximo que toma y es 8 (cuando $x = 2$).

Por lo tanto, el valor de y se encuentra entre 0 y 8.

C

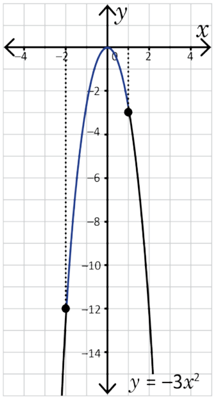
A los valores que toma la variable x se les llama **dominio**, y a los valores que toma y se les llama **rango**. Estos dos conceptos se verán con mayor profundidad en bachillerato.

E

En la función $y = -3x^2$, si el valor de x se encuentra entre –2 y 1, ¿entre cuáles números se encuentra y?

- El valor mínimo de y es –12 (cuando $x = -2$).
- El valor máximo de y es 0 (cuando $x = 0$).

Por lo tanto, el valor de y se encuentra entre –12 y 0.



1. Si $y = 3x^2$, ¿entre cuáles valores se encuentra y si x está entre –2 y 3? y se encuentra entre 0 y 27.
2. Si $y = -2x^2$, ¿entre cuáles valores se encuentra y si x está entre 2 y 4? y se encuentra entre –8 y –32.
3. Si $y = \frac{1}{2}x^2$, ¿entre cuáles valores se encuentra y si x está entre –1 y 2? y se encuentra entre 0 y 2.

Indicador de logro

1.9 Encuentra el rango de la función $y = ax^2$ dado su dominio que incluye la coordenada x del vértice.

Secuencia

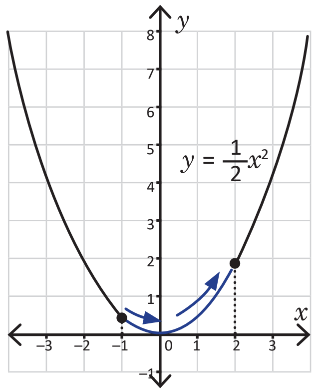
En la clase anterior se estudiaron las variaciones de la función $y = ax^2$, y el cambio de y cuando x aumenta, introduciendo de esta forma los conceptos de mínimo y máximo de una función. En esta clase se introducen de forma no tan rigurosa, los conceptos de **dominio y rango**, estos conceptos se estudiarán con mayor detalle en bachillerato. Además, en esta clase se estudian los intervalos que contienen las coordenadas x del vértice.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Hay que observar que cuando un punto de la gráfica pasa el eje de simetría, existe un cambio entre aumento y disminución.
No hay que olvidar que no es únicamente comparar el valor de y en los extremos, es decir, el valor mínimo o máximo se encuentra en el vértice.

Ⓒ Proponer una variante al Problema inicial, en este caso el coeficiente que acompaña a x es negativo, por lo tanto, su gráfica es abierta hacia abajo, siendo importante enfatizar que los posibles valores de y siempre son negativos o cero.

Solución de algunos ítems:



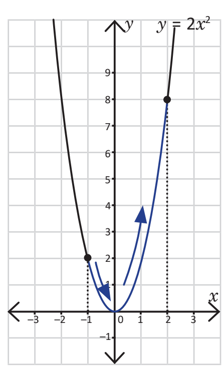
Cuando x esta entre –1 y 2:
El valor mínimo de y es 0.
El valor máximo de y es 2.

Por tanto, el valor de y se encuentra entre 0 y 2.

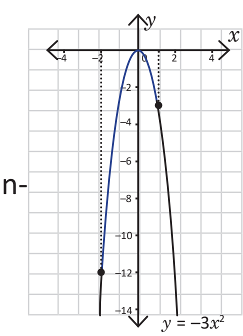
Fecha: **U4 1.9**

Ⓟ En la función $y = 2x^2$:
Si x se encuentra entre –1 y 2, ¿entre qué valores se encuentra y?

Ⓢ Cuando x está entre –1 y 2:
El valor mínimo de y es 0.
El valor máximo de y es 8.
Por tanto, el valor de y se encuentra entre 0 y 8.



Ⓔ Si x está entre –2 y 1:
El mínimo de y es –12.
El máximo de y es 0.
Por tanto, y se encuentra entre –12 y 0.



Ⓡ

1. Para $y = 3x^2$.
   Si x se encuentra entre –2 y 3 entonces y se encuentra entre 0 y 27.

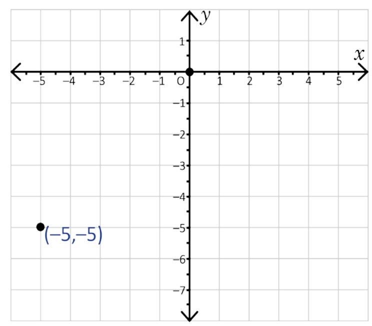
Tarea: página 90 del Cuaderno de Ejercicios.

1.10 Practica lo aprendido

1. Completa la tabla y gráfica la función $y = -\frac{1}{5}x^2$.

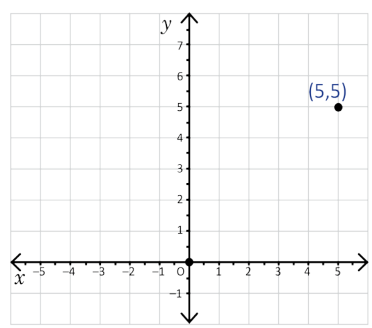
x	–5	–3	0	3	5
x^2	25	9	0	9	25
$-\frac{1}{5}x^2$		–1.8			–5

Los valores $x = -5$ y $x = 5$ tienen el mismo valor $y = -5$. En general, los valores $x = -m$ y $x = m$ tienen el mismo valor en y.



2. Completa la tabla y gráfica la función $y = \frac{1}{5}x^2$. Compara con la gráfica anterior.

x	–5	–3	0	3	5
x^2	25	9	0	9	25
$\frac{1}{5}x^2$					



3. En cada literal, y es directamente proporcional a x^2. Calcula el valor de la constante en los siguientes casos:

   a) Cuando $x = 2$ entonces $y = 24$. $y = 6x^2$
   b) Cuando $x = 8$ entonces $y = 16$. $y = \frac{1}{4}x^2$
   c) Cuando $x = 2$ entonces $y = -6$. $y = -\frac{3}{2}x^2$

4. En el mismo plano, grafica las siguientes funciones:

   a) $y = \frac{3}{2}x^2$ b) $y = \frac{2}{3}x^2$ c) $y = -\frac{3}{2}x^2$ d) $y = -\frac{2}{3}x^2$

5. A partir de las gráficas de $y = \frac{1}{6}x^2$ y $y = -\frac{1}{6}x^2$:

   a) Si el valor de x aumenta de 1 a 6, ¿cómo cambia el valor de y en ambos casos? y aumenta para $y = \frac{1}{6}x^2$; y disminuye para $y = -\frac{1}{6}x^2$
   b) Si el valor de x aumenta de –12 a –6, ¿cómo cambia el valor de y en ambos casos? y disminuye para $y = \frac{1}{6}x^2$; y aumenta para $y = -\frac{1}{6}x^2$

6. Sea $y = 2x^2$:

   a) Si el valor de x está entre –1 y 3, ¿entre cuáles valores se encuentra y? y se encuentra entre 0 y 18.
   b) Si el valor de x está entre –2 y 4, ¿entre cuáles valores se encuentra y? y se encuentra entre 0 y 32.

Indicador de logro

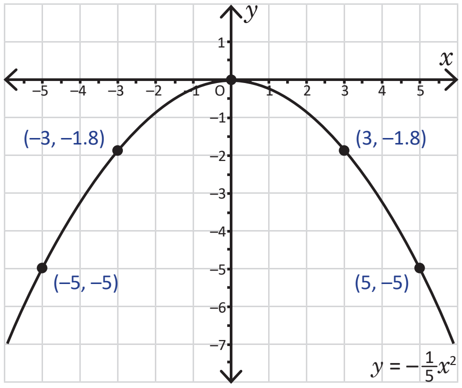
1.10 Resuelve problemas relacionados con la función $y = ax^2$.

Solución de algunos ítems:

1. El signo negativo indica que la parábola se abre hacia abajo y el vértice es (0, 0). Para graficarla, se toman el vértice y los valores de x que se encuentran tanta a la derecha como a la izquierda del vértice.

x	–5	–3	0	3	5
x^2	25	9	0	9	25
$-\frac{1}{5}x^2$	–5	–1.8	0	–1.8	–5

Los valores de x = –5 y x = 5 tienen el mismo valor y = –5. En general, los valores $x = -m$ y $x = m$ tienen el mismo valor en y.

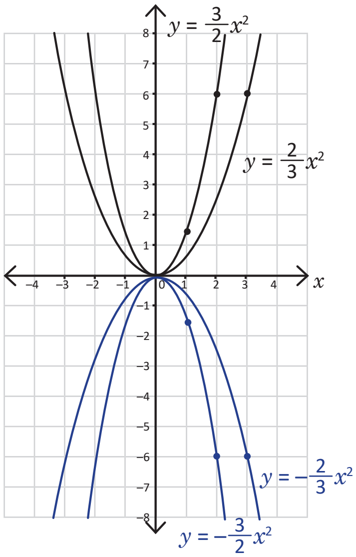


3. c) Se sabe que $y = ax^2$.
Si x = 2 y y = –6.

$$-6 = a(2)^2$$
$$-6 = 4a$$
$$a = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Por tanto, $y = -\frac{3}{2}x^2$.

4.



Tarea: página 91 del Cuaderno de Ejercicios.

1.11 Practica lo aprendido

1. Sea $y = -6x^2$:

   a) Si el valor de x está entre –3 y 2, ¿entre cuáles valores se encuentra y? y se encuentra entre –54 y 0.

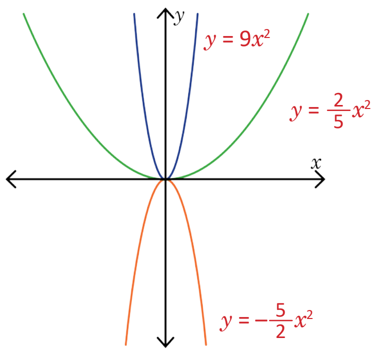
   b) Si el valor de x está entre –1 y 1, ¿entre cuáles valores se encuentra y? y se encuentra entre –6 y 0.

2. A cada función de la izquierda asígnale su respectiva gráfica en la derecha:

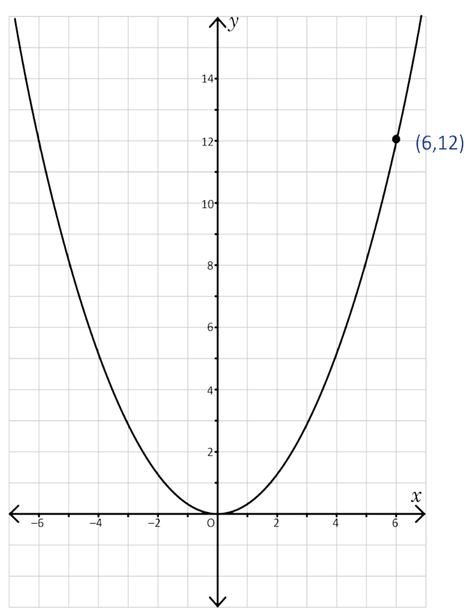
   a) $y = \frac{2}{5}x^2$

   b) $y = -\frac{5}{2}x^2$

   c) $y = 9x^2$



3. La siguiente gráfica es de una función $y = ax^2$, ¿cuál es el valor de a?



$a = 3$, $y = 3x^2$

Indicador de logro

1.11 Resuelve problemas que involucren la función $y = ax^2$.

Solución de algunos ítems:

1.

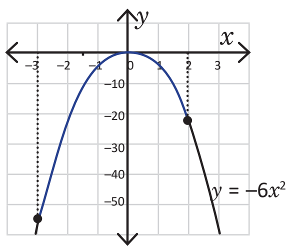
a)

Cuando $x = -3$, $y = -54$.

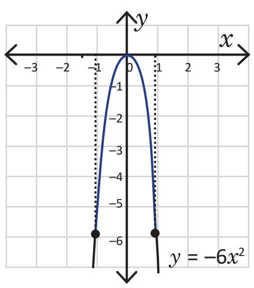
Cuando $x = 2$, $y = -24$.

Como x está entre un valor positivo y un valor negativo, la gráfica de la función aumenta de –54 a 0 y posteriormente disminuye de 0 a –24

Por tanto, y se encuentra entre –54 y 0.



b)



Cuando $x = -1$, $y = -6$.

Cuando $x = 1$, $y = -6$.

Por tanto, y se encuentra entre –6 y 0.

Tarea: página 91 del Cuaderno de Ejercicios.

3.

En la gráfica se observa que la función pasa por el punto (6,12).

Como la función tiene la forma $y = ax^2$, se tiene que:

$$y = ax^2$$
$$12 = a(6)^2$$
$$a = \frac{12}{36}$$
$$a = \frac{1}{3}$$

2.1 Función $y = ax^2 + c$; $c > 0$

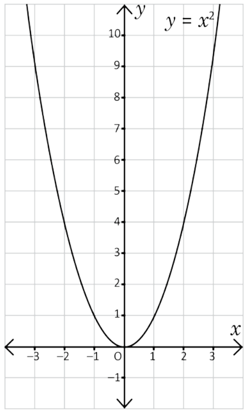
P

A partir de la gráfica de $y = x^2$:

a) Completa la tabla y grafica la función $y = x^2 + 2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 + 2$	6				

La gráfica de $y = x^2 + 2$ es una parábola.



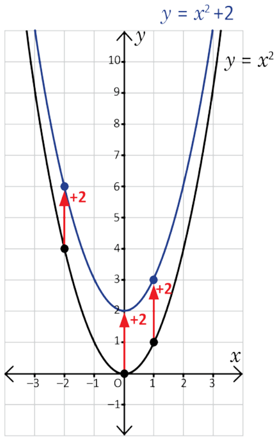
b) ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^2 + 2$?

c) Describe con tus palabras qué le ocurre a la gráfica de $y = x^2$ para obtener $y = x^2 + 2$.

S

a) Los valores de $y = x^2 + 2$ son el resultado de sumar 2 a los valores de $y = x^2$. La tabla queda de la siguiente manera:

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 + 2$	6	3	2	3	6



b) Similitudes en ambas gráficas: son parábolas y el eje y sigue siendo eje de simetría.

Diferencias en ambas gráficas: no hay puntos coincidentes. Incluso, el vértice en $y = x^2$ es (0, 0); mientras que en $y = x^2 + 2$ es (0, 2), se encuentra dos unidades arriba.

c) La gráfica de $y = x^2$ se desplazó dos unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $y = x^2 + 2$.

C

Si a es cualquier número real excepto 0 (positivo o negativo) y c es un número positivo ($c > 0$) entonces, la gráfica de $y = ax^2 + c$ es un **desplazamiento vertical de c unidades** (hacia arriba) de la gráfica de $y = ax^2$. El eje de simetría de $y = ax^2 + c$ es el eje y, y su vértice es $(0, c)$.

Grafica las siguientes funciones. En cada caso escribe cuál es el vértice:

a) $y = x^2 + 3$
Vértice: (0,3)

b) $y = -x^2 + 3$
Vértice: (0,3)

c) $y = -2x^2 + 2$
Vértice: (0,2)

Unidad 4

Indicador de logro

2.1 Grafica la función $y = ax^2 + c$, con $c > 0$ realizando desplazamientos verticales en c unidades, a partir de la gráfica $y = ax^2$.

Secuencia

En la lección anterior, se estudiaron las distintas gráficas en el plano para la función $y = ax^2$, a partir de los diferentes valores que pueda tomar la constante a, se estudiaron también conceptos importantes, como el máximo y mínimo de la función; además, el dominio y rango.

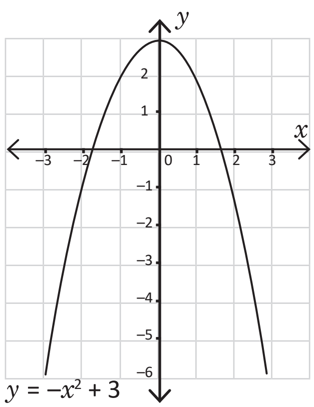
Esta lección se enfoca en las funciones del tipo $y = ax^2 + c$, analizando los desplazamientos provocados según sea el valor de c.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Se debe observar que si se desplaza la gráfica de $y = x^2$, dos unidades, se obtiene precisamente la gráfica de $y = x^2 + 2$. Comparar también los vértices de ambas funciones.

Ⓒ Establecer formalmente que la función $y = ax^2 + c$ es un desplazamiento vertical de c unidades respecto a la función $y = ax^2$.
Hay que comprender que las coordenadas y del vértice coinciden con el valor de c.

Solución de algunos ítems:



Si $x = 0$ entonces $y = 3$. Por tanto, el vértice es (0, 3).

Observación:
Al dibujar en la pizarra las tablas que aparecen en el Problema inicial, deben dejarse en blanco, tal y como se encuentra en la página del libro, se deben rellenar estos espacios en el momento adecuado, únicamente después de que los estudiantes también han dado solución.

Fecha: **U4 2.1**

Ⓟ A partir de $y = x^2$.

x	−2	−1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 + 2$	6	3	2	3	6

a) Completa la tabla y grafica $y = x^2 + 2$.

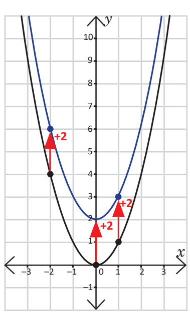
b) Escribe las similitudes y diferencias entre ambas gráficas.

c) ¿Cómo obtener la gráfica de $y = x^2 + 2$ a partir de la gráfica de $y = x^2$?

Ⓢ

b) Similitudes: el eje y es el eje de simetría.
Diferencias: ningún punto coincide entre ambas gráficas.

c) Si se desplaza $y = x^2$ dos unidades hacia arriba se obtiene $y = x^2 + 2$.



Ⓡ a) Vértice: (0, 3)
b) Vértice: (0, 3)
c) Vértice: (0, 2)

Tarea: página 92 del Cuaderno de Ejercicios.

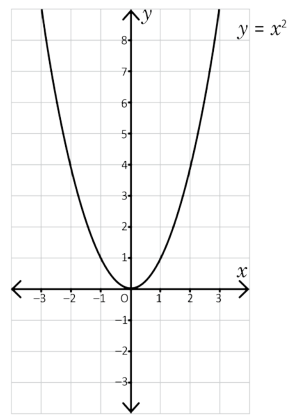
2.2 Función $y = ax^2 + c$; $c < 0$

P

A partir de la gráfica de $y = x^2$:

a) Completa la tabla y grafica la función $y = x^2 - 2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 - 2$	2				



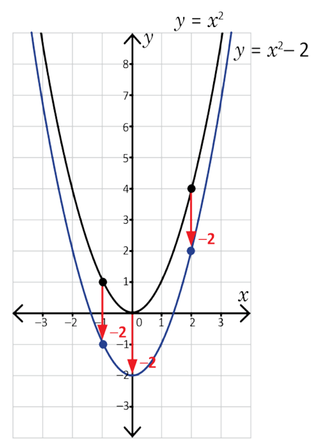
b) ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^2 - 2$?

c) Describe con tus palabras qué le ocurre a la gráfica de $y = x^2$ para obtener $y = x^2 - 2$.

S

a) Los valores de $y = x^2 - 2$ son el resultado de restar 2 a los valores de $y = x^2$. La tabla queda de la siguiente manera:

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 - 2$	2	-1	-2	-1	2



b) Similitudes en ambas gráficas: son parábolas y el eje y sigue siendo eje de simetría.
Diferencias en ambas gráficas: no hay puntos coincidentes. Incluso, el vértice en $y = x^2$ es $(0, 0)$; mientras que en $y = x^2 - 2$ es $(0, -2)$, se encuentra dos unidades abajo.

c) La gráfica de $y = x^2$ se desplazó dos unidades hacia abajo para obtener la gráfica de $y = x^2 - 2$.

C

Si a es cualquier número real excepto 0 (positivo o negativo) y c es un número negativo ($c < 0$) entonces, la gráfica de $y = ax^2 + c$ es un **desplazamiento vertical de c unidades** (hacia abajo) de la gráfica de $y = ax^2$. El eje de simetría de $y = ax^2 + c$ es el eje y, y su vértice es $(0, c)$.

Grafica las siguientes funciones. En cada caso escribe cuál es el vértice:

a) $y = x^2 - 3$
Vértice: $(0, -3)$

b) $y = -x^2 - 3$
Vértice: $(0, -3)$

c) $y = 2x^2 - 2$
Vértice: $(0, -2)$

Indicador de logro

2.2 Grafica la función $y = ax^2 + c$, con $c < 0$ y realizando desplazamientos verticales en c unidades, a partir de la gráfica $y = ax^2$.

Secuencia

Anteriormente se estudió la gráfica de la función $y = ax^2 + c$, con $c > 0$ la cual se puede obtener aplicando un desplazamiento vertical de c unidades hacia arriba a la función $y = ax^2$. Para esta clase se estudian siempre los desplazamientos verticales, cuando $c < 0$.

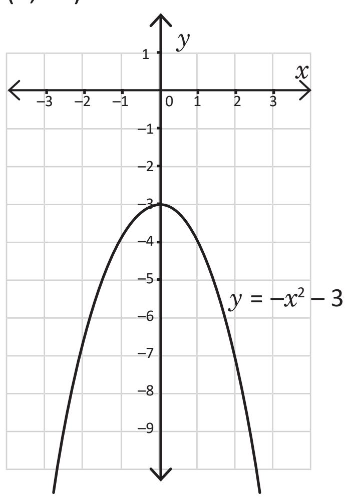
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Comparar las funciones $y = x^2 - 2$ y $y = x^2$, concluyendo que una función se puede obtener desplazando la otra verticalmente dos unidades.

Solución de algunos ítems:

$y = -x^2 - 3$

Si $x = 0$ entonces $y = -3$. Por tanto, el vértice es $(0, -3)$.



Observación:
Para graficar estas funciones, se pueden fotocopiar las páginas del material complementario del libro de noveno, página 183 y entregar a los estudiantes para que puedan graficar fácilmente y no perder mucho tiempo en realizar la gráfica del plano cartesiano.

Fecha:

U4 2.2

Ⓟ A partir de $y = x^2$.

x	−2	−1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 - 2$	2	−1	−2	−1	2

a) Completa la tabla y grafica $y = x^2 - 2$.

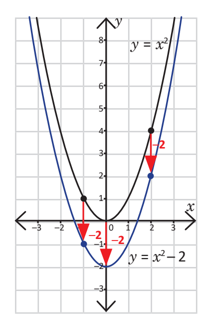
b) Escribe las similitudes y diferencias entre ambas gráficas.

c) ¿Cómo obtener la gráfica de $y = x^2 - 2$ a partir de la gráfica de $y = x^2$?

Ⓢ

b) Similitudes: el eje y es el eje de simetría.
Diferencias: ningún punto coincide entre ambas gráficas.

c) Si se desplaza $y = x^2$ dos unidades hacia abajo se obtiene $y = x^2 - 2$.



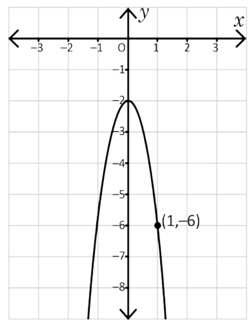
Ⓡ a) Vértice: (0, –3)
b) Vértice: (0, –3)
c) Vértice: (0, –2)

Tarea: página 93 del Cuaderno de Ejercicios.

2.3 Condiciones iniciales para encontrar la ecuación de una función

P

En una función $y = ax^2 + c$, ¿cuáles deben ser los valores de a y c para que la gráfica de la función sea la mostrada en la figura?

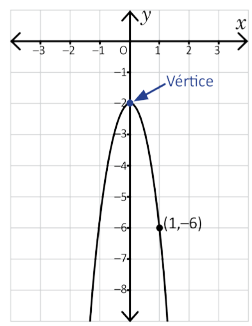


El problema NO indica si a y c son positivos, por lo que podrían ser negativos también. Usa la gráfica para encontrar el vértice.

S

El problema indica que la función es de forma $y = ax^2 + c$. Al observar la gráfica se concluye lo siguiente:

1. El número a es negativo, ya que la parábola se abre hacia abajo.
2. El vértice se encuentra en $(0, c)$, esto lo indica el enunciado.
3. El número c es negativo, ya que el vértice está "debajo" de $(0, 0)$.



Al observar la gráfica se verifica que el vértice está en $(0, -2)$, y por lo tanto $c = -2$. El punto $(1, -6)$ se encuentra sobre la parábola, es decir, si $x = 1$, entonces $y = -6$. Se sustituyen estos valores y c en $y = ax^2 + c$ y se despeja a:

$$\begin{aligned} -6 &= a(1)^2 + (-2) \\ a - 2 &= -6 \\ a &= -6 + 2 \\ a &= -4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores de a y c son -4 y -2 respectivamente, y $y = -4x^2 - 2$.

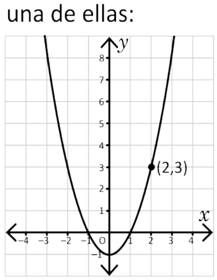
C

Dada la gráfica de una función $y = ax^2 + c$ y un punto (m, n) sobre esta, entonces para encontrar los valores de a y c (que pueden ser positivos o negativos) se hace lo siguiente:

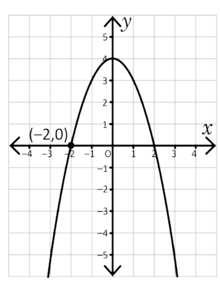
1. En la gráfica, ubicar el vértice de la parábola $(0, c)$: si está arriba de $(0, 0)$ entonces c es positivo, y si está debajo de $(0, 0)$ entonces c es negativo.
2. Encontrar el valor de a sustituyendo n, m y c, quedando así: $n = am^2 + c$.

1. Las siguientes gráficas corresponden a funciones de la forma $y = ax^2 + c$. Encuentra los valores de a y c en cada una de ellas:

a)



b)



2. Encuentra los valores a y c de una función $y = ax^2 + c$ cuya gráfica pasa por los puntos $(1, 4)$ y $(2, 10)$.

Unidad 4

Indicador de logro

2.3 Calcula los valores de a y c en $y = ax^2 + c$, dadas las condiciones iniciales de la gráfica de la función.

Secuencia

En esta lección se trabajó con la gráfica de la función $y = ax^2 + c$, estudiando los desplazamientos verticales dados según el valor de c, los desplazamientos horizontales; un estudio más profundo de la función cuadrática se realizará hasta en bachillerato.
Ahora se deberán encontrar funciones de la forma $y = ax^2 + c$ a partir de las condiciones iniciales expresadas en la gráfica de la función.

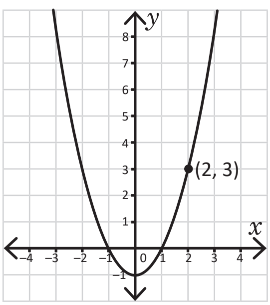
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Obtener la ecuación de una función cuadrática a partir de las condiciones iniciales dado el vértice y un punto sobre la gráfica.

Ⓟ Describir los pasos que se deben seguir para encontrar la ecuación de la función y la forma de utilizar correctamente las condiciones iniciales.

Solución de algunos ítems:

1.



Dada la gráfica, se conoce el vértice: (0, –1) y un punto sobre ella (2, 3).
Sustituyendo.

$$3 = a(2)^2 - 1$$
$$4a - 1 = 3$$
$$4a = 4,\ a = 1$$

Por tanto, $y = x^2 - 1$.

2. Haciendo la sustitución de los puntos (1, 4) y (2, 10) en $y = ax^2 + c$. Se forma el sistema:

$$4 = a + c$$
$$10 = 4a + c$$

Reduciendo:

$$\begin{array}{r} 4 = a + c \\ -10 = -4a - c \\ \hline -6 = -3a \\ a = 2 \end{array}$$

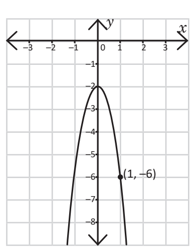
Sustituyendo en, $a + c = 4$, $c = 2$.

Por tanto, $y = 2x^2 + 2$.

Fecha: **U4 2.3**

Ⓟ

Para la función: $y = ax^2 + c$.
Encuentra los valores de a y c para que la gráfica de la función sea la mostrada.



Ⓢ

1. La parábola se abre hacia abajo, por tanto a es negativo.
2. El vértice es (0, –2), por tanto $c = -2$.

Sustituyendo los valores:

$$-6 = a(1)^2 + (-2)$$
$$a - 2 = -6$$
$$a = -6 + 2$$
$$a = -4$$

Por tanto, $y = -4x^2 - 2$.

Ⓡ 1.
a) $a = 1$, $y = x^2 - 1$
b) $a = -1$, $y = -x^2 + 4$

2. $a = 2$, $c = 2$, $y = 2x^2 + 2$

Tarea: página 94 del Cuaderno de Ejercicios.

2.4 Practica lo aprendido

1. Grafica las siguientes funciones y escribe el vértice de cada una:

   a) $y = -3x^2 + 1$
   Vértice: (0, 1)

   b) $y = 3x^2 - 1$
   Vértice: (0, –1)

   c) $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$
   Vértice: (0, 2)

   d) $y = -\frac{1}{4}x^2 - 2$
   Vértice: (0, –2)

2. Escribe el vértice de las siguientes funciones:

   a) $y = 2x^2 - \frac{1}{2}$
   Vértice: $(0, -\frac{1}{2})$

   b) $y = 2x^2 + \frac{1}{2}$
   Vértice: $(0, \frac{1}{2})$

   c) $y = -2x^2 - \frac{1}{2}$
   Vértice: $(0, -\frac{1}{2})$

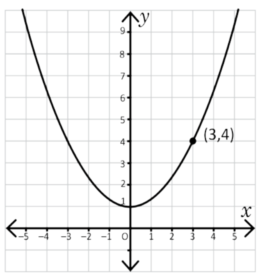
   d) $y = -2x^2 + \frac{1}{2}$
   Vértice: $(0, \frac{1}{2})$

   e) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$
   Vértice: (0, 2)

   f) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$
   Vértice: (0, –2)

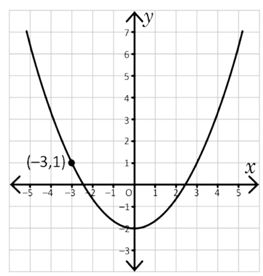
3. Las siguientes gráficas corresponden a funciones de la forma $y = ax^2 + c$. Encuentra los valores de a y c en cada una de ellas.

   a)



$a = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}x^2 + 1$

   b)



$a = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}x^2 - 2$

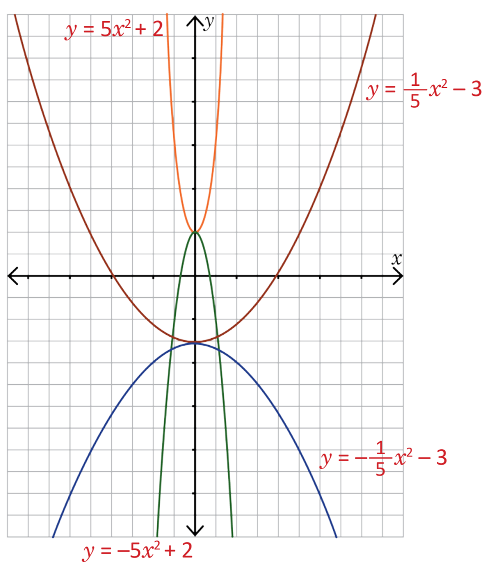
4. A cada función, asígnale su respectiva gráfica:

   a) $y = -5x^2 + 2$

   b) $y = 5x^2 + 2$

   c) $y = \frac{1}{5}x^2 - 3$

   d) $y = -\frac{1}{5}x^2 - 3$

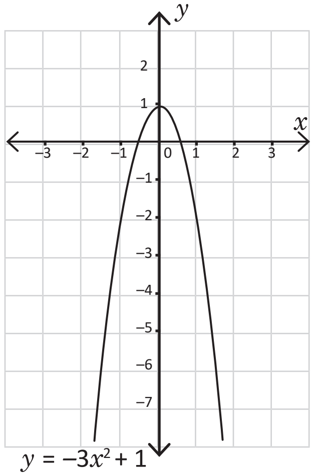


Indicador de logro

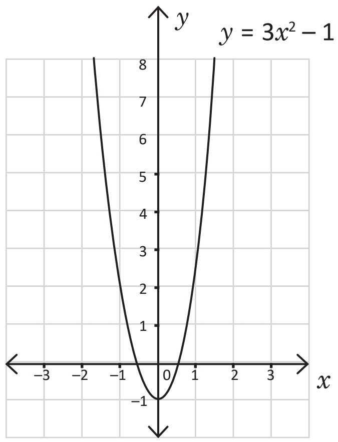
2.4 Resuelve problemas que involucren la función $y = ax^2 + c$.

1.

a) $y = -3x^2 + 1$



b) $y = 3x^2 - 1$



3. b) Dada la gráfica, se conoce el vértice $(0, -2)$ y un punto sobre ella $(-3, 1)$.

Sustituyendo $y = ax^2 + c$.

$$1 = a(-3)^2 + (-2)$$
$$9a = 2 + 1$$
$$9a = 3$$
$$a = \frac{1}{3}$$

Por tanto, $y = \frac{1}{3}x^2 - 2$.

Tarea: página 95 del Cuaderno de Ejercicios.

Anexos

Jornalización

Se presentan hojas para realizar la planificación anual en la asignatura de matemática, en ella se deben colocar las clases a impartir durante cada día lectivo.

Pruebas

Se proporcionan las pruebas de cada unidad, así como la prueba de trimestre, para que los docentes las fotocopien y apliquen a los estudiantes cuando corresponda.

Análisis de resultados

Cuando finalice el trimestre se pueden utilizar los cuadros para el análisis de los respectivos resultados.

Análisis de resultados del primer trimestre					
	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba de trimestre
Promedio obtenido					
n.° de estudiantes con promedio menor que 6					
n.° de estudiantes con promedio entre 6 y 8					
n.° de estudiantes con promedio mayor que 8					

Análisis de resultados del segundo trimestre					
	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba de trimestre
Promedio obtenido					
n.° de estudiantes con promedio menor que 6					
n.° de estudiantes con promedio entre 6 y 8					
n.° de estudiantes con promedio mayor que 8					

Análisis de resultados del tercer trimestre					
	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba de trimestre
Promedio obtenido					
n.° de estudiantes con promedio menor que 6					
n.° de estudiantes con promedio entre 6 y 8					
n.° de estudiantes con promedio mayor que 8					

Jornalización año: 2020											
	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Sept.	Oct.	Nov.
1		X	X					X			X
2		X			X			X			
3					X					X	
4	X			X			X			X	
5	X			X			X		X		
6						X			X		
7			X			X					X
8		X	X					X			X
9		X			X			X			
10					X					X	
11	X			X			X			X	
12	X			X			X		X		
13						X			X		
14			X			X					X
15		X	X					X			X
16		X			X			X			
17					X					X	
18	X			X			X			X	
19	X			X			X		X		
20	U1 1.1					X			X		
21	1.2		X			X					X
22		X	X					X			X
23		X			X			X			
24					X					X	
25	X			X			X			X	
26	X			X			X		X		
27						X			X		
28			X			X					X
29		X	X					X			X
30					X			X			
31					X					X	

Análisis de resultados del primer trimestre					
	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba de trimestre
Promedio obtenido					
n.° de estudiantes con promedio menor que 6					
n.° de estudiantes con promedio entre 6 y 8					
n.° de estudiantes con promedio mayor que 8					
Análisis de resultados del segundo trimestre					
	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba de trimestre
Promedio obtenido					
n.° de estudiantes con promedio menor que 6					
n.° de estudiantes con promedio entre 6 y 8					
n.° de estudiantes con promedio mayor que 8					
Análisis de resultados del tercer trimestre					
	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba de trimestre
Promedio obtenido					
n.° de estudiantes con promedio menor que 6					
n.° de estudiantes con promedio entre 6 y 8					
n.° de estudiantes con promedio mayor que 8					

Jornalización año:											
	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Sept.	Oct.	Nov.
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											
22											
23											
24											
25											
26											
27											
28											
29											
30											
31											

Análisis de resultados del primer trimestre					
	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba de trimestre
Promedio obtenido					
n.° de estudiantes con promedio menor que 6					
n.° de estudiantes con promedio entre 6 y 8					
n.° de estudiantes con promedio mayor que 8					
Análisis de resultados del segundo trimestre					
	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba de trimestre
Promedio obtenido					
n.° de estudiantes con promedio menor que 6					
n.° de estudiantes con promedio entre 6 y 8					
n.° de estudiantes con promedio mayor que 8					
Análisis de resultados del tercer trimestre					
	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba de trimestre
Promedio obtenido					
n.° de estudiantes con promedio menor que 6					
n.° de estudiantes con promedio entre 6 y 8					
n.° de estudiantes con promedio mayor que 8					

Jornalización año:											
	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Sept.	Oct.	Nov.
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											
22											
23											
24											
25											
26											
27											
28											
29											
30											
31											

GOBIERNO DE
EL SALVADOR

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

Guía metodológica Tomo 1 Matemática 9