GOBIERNO DE
EL SALVADOR

Matemática

Guía metodológica

Tomo 2

Guía metodológica Tomo 2 Matemática 9

GOBIERNO DE
EL SALVADOR

Matemática

Guía metodológica

ESMate

Equipo técnico autoral y de diagramación del Ministerio de Educación

Ana Ester Argueta Aranda
Erick Amílcar Muñoz Deras
Reina Maritza Pleitez Vásquez
Diana Marcela Herrera Polanco
Francisco Antonio Mejía Ramos
Norma Elizabeth Lemus Martínez
Salvador Enrique Rodríguez Hernández
César Omar Gómez Juárez

Diseño y revisión de diagramación
Francisco René Burgos Álvarez
Judith Samanta Romero de Ciudad Real

Corrección de estilo
Ana Esmeralda Quijada Cárdenas

Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Imagen de portada con fines educativos, en ella se ilustra el teorema de Pitágoras con polígonos de diferente cantidad de lados y se pueden apreciar figuras semejantes

372.7
M425 Matemática 9 [recurso electrónico]: guía metodológica: tomo 2 / Ana Ester Argueta,
Aranda ... [et al] ;
Diagramación Francisco René Burgos Álvarez, Judith Samanta Romero de Ciudad Real,. -- 2ª. ed.. -
San Salvador, El salv. : Ministerio de Educación (MINED), 2020.
s/v 1 recurso electrónico (216 p. ; ilus. ; 28 cm. – (Esmate)

Datos electrónicos (1 archivo : pdf, 10.5 mb). -- http://www.mined.gob.sv.

ISBN 978-99961-355-7-6 (E-Book))

1. Matemáticas-Libros de texto. 2. Matemáticas-Enseñanza -- Guías I.
Argueta Aranda, Ana Ester, coaut.
II. Título.
BINA/jmh

Estimadas y estimados docentes:

Reciban un cordial saludo, en el que expresamos nuestro agradecimiento y estima por la importante labor que desempeñan en beneficio de la sociedad salvadoreña.

Como Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (MINEDUCYT) a través del Proyecto de Mejoramiento de los Aprendizajes de Matemática en Educación Básica y Educación Media (ESMATE 2) se ha diseñado la guía metodológica, que será una herramienta importante para la labor docente que realizan día a día.

El objetivo principal de este recurso es brindarles orientaciones concretas y precisas para el desarrollo de las clases de esta asignatura y lograr el desarrollo del pensamiento lógico matemático en el estudiantado salvadoreño.

Es importante señalar que la Guía metodológica está en correspondencia con las actividades y secuencia para el desarrollo de las clases propuestas en el Libro de texto y Cuaderno de ejercicios diseñados para el estudiantado, concretizando de esta manera lo emanado y anhelado en el Programa de estudios de Matemática.

Aprovechamos esta oportunidad para expresar nuestra confianza en ustedes. Sabemos que leerán y analizarán esta Guía metodológica con una actitud dispuesta a aprender y mejorar, tomando en cuenta su experiencia y su formación docente. Creemos en su compromiso con la niñez y la juventud salvadoreña para que puedan desarrollarse integralmente.

Atentamente,

José Mauricio Pineda Rodríguez
Ministro de Educación, Ciencia
y Tecnología, Interino

Ricardo Cardona A.
Viceministro de Educación y de
Ciencia y Tecnología, *Ad honorem*

Índice

Unidad 5. Figuras semejantes

Competencia de la Unidad

– Identificar y construir figuras semejantes a partir de las características de sus lados y sus ángulos.
– Utilizar semejanza de triángulos, para deducir y aplicar propiedades de figuras y sólidos semejantes en la resolución de situaciones problemáticas.

Relación y desarrollo

Sexto grado

Unidad 4: Razones y porcentajes
- Razones
- Porcentajes

Unidad 5: Proporcionalidad
- Proporciones
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa

Séptimo grado

Unidad 6: Proporcionalidad directa e inversa
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa
- Aplicación de la proporcionalidad

Octavo grado

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos
- Congruencia de triángulos

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación de ángulos central e inscrito

Primer año de bachillerato

Unidad 5: Resolución de triángulos oblicuángulos
- Razones trigonométricas de ángulos agudos
- Razones trigonométricas de ángulos no agudos
- Resolución de triángulos oblicuángulos

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Semejanza	1	1. Razón entre segmentos
	1	2. Segmentos proporcionales
	1	3. Figuras semejantes
	1	4. Características de figuras semejantes, parte 1
	1	5. Características de figuras semejantes, parte 2
	1	6. Construcción de figuras semejantes
	1	7. Practica lo aprendido
2. Semejanza de triángulos	1	1. Primer criterio de semejanza de triángulos
	1	2. Segundo criterio de semejanza de triángulos
	1	3. Tercer criterio de semejanza de triángulos
	1	4. Practica lo aprendido
	1	5. Practica lo aprendido
3. Semejanza y paralelismo	1	1. Teorema de la base media, parte 1
	1	2. Teorema de la base media, parte 2
	1	3. Paralelogramo inscrito en un cuadrilátero
	1	4. Semejanza utilizando segmentos paralelos, parte 1
	1	5. Semejanza utilizando segmentos paralelos, parte 2
	1	6. Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 1
	1	7. Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 2
	1	8. Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 3

Lección	Horas	Clases
	1	9. Practica lo aprendido
4. Aplicaciones de semejanza y triángulos semejantes	1	1. Distancia entre puntos sobre un mapa
	1	2. Áreas de polígonos semejantes
	1	3. Volumen de sólidos semejantes
	1	4. Problemas que se resuelven utilizando semejanza de triángulos
	1	5. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 5
	1	Prueba del segundo trimestre

26 horas clase + prueba de la Unidad 5 + prueba del segundo trimestre

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Semejanza
Se estudian los conceptos de razón entre segmentos y segmentos proporcionales, estos conceptos se utilizan posteriormente para abordar las características de dos figuras semejantes que posteriormente se construyen utilizando regla y compás.

Lección 2: Semejanza de triángulos
Utilizando las características de dos figuras semejantes se establecen los tres criterios de semejanza y se utilizan para resolver distintos problemas.

Lección 3: Semejanza y paralelismo
En esta lección se utiliza la semejanza de triángulos para estudiar algunos resultados importantes de la geometría, como lo son el teorema de la base media, el teorema sobre segmentos paralelos y el teorema sobre segmentos proporcionales en un triángulo.

Lección 4: Aplicación de semejanza y triángulos semejantes
Utilizando todo lo correspondiente a semejanza de triángulos y figuras; además de los conceptos vistos sobre proporción entre segmentos, se estudian algunas de las aplicaciones de la semejanza ya sea en situaciones del contexto o en la misma matemática.

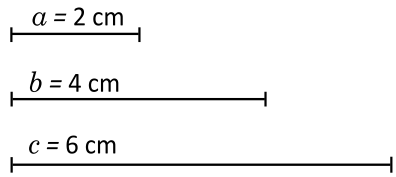
Lección 1 Semejanza

1.1 Razón entre segmentos

P

a) ¿Cuántas veces es la longitud del segmento a con respecto a la del segmento b?

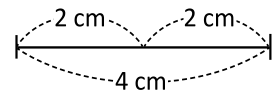
b) ¿Cuántas veces es la longitud del segmento a con respecto a la del segmento c? ¿Y la de b con respecto a c?



S

a) Al comparar las longitudes del segmento a con respecto a la del segmento b se tiene que a es $\frac{1}{2}$ de b.

b) Se calcula el cociente $\frac{a}{c}$ y se tiene que la longitud de a es $\frac{1}{3}$ de la longitud de c. De igual forma, la longitud de b es $\frac{2}{3}$ de la longitud de c.

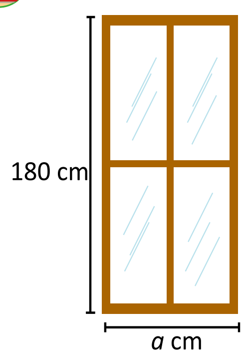


C

Al cociente de los números que expresan las longitudes de dos segmentos se le llama **razón entre segmentos**. Esta razón no queda expresada en ningún sistema de unidades, es decir, no lleva centímetros, metros u otra unidad de longitud.

En el Problema inicial, la razón entre los segmentos a y b es $\frac{1}{2}$, ya que $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$; esto también se expresa como 1:2 y se lee "1 es a 2". Hay que prestar atención al orden de a y b. Por lo general, una razón entre segmentos siempre se escribe en su forma simplificada.

E



¿Cuál es la medida del ancho de una ventana de alto 180 cm cuyas dimensiones ancho y alto están a una razón de $\frac{4}{9}$? (ver figura)

Iguala el ancho y alto de la ventana con la razón entre ambas. Debes cuidar el orden, es decir, colocar la longitud menor entre la mayor o viceversa, según sea el caso.

Se denota por a la medida del ancho de la ventana en centímetros. Si las dimensiones ancho y alto están a una razón de $\frac{4}{9}$, entonces:

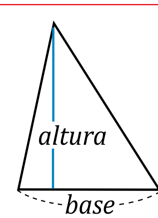
$$\frac{\text{Ancho}}{\text{Alto}} = \frac{4}{9}$$

Se sustituyen los valores en la ecuación anterior y se despeja a:

$$\frac{a}{180} = \frac{4}{9}$$
$$a = 180\left(\frac{4}{9}\right)$$
$$a = 80$$

Por lo tanto, la medida del ancho de la ventana es 80 cm.

1. Calcula la razón entre el segmento a = 4 cm y el segmento b = 20 cm.
   Razón $\frac{1}{5}$
2. La base y la altura de un triángulo están a razón $\frac{5}{7}$. Si la base mide 10 cm, ¿cuánto mide la altura del triángulo? (ver figura)
   Altura = 14 cm



Indicador de logro

1.1 Encuentra la longitud de un segmento dada su razón.

Secuencia

El concepto de razón no es un conocimiento nuevo para el estudiante, en los primeros grados se inició este estudio con el concepto de **cantidad de veces**, estableciendo una razón como la comparación entre dos cantidades. Por ejemplo, una razón se representa de la forma 5 : 3 y al número $\frac{5}{3}$ se le conoce como valor de razón. En sexto grado se realiza un estudio más detallado de este contenido y en séptimo grado se centra en el análisis de la proporción directa e inversa, incluyendo las gráficas de cada una de ellas. Para esta unidad el concepto de razón y el concepto de proporción son de vital importancia, pues se trata de la comparación entre segmentos.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ El objetivo es comparar las longitudes de los segmentos a y b con c y encontrar la razón entre ambos segmentos. Para esta actividad se pueden utilizar cordeles con las medidas establecidas.

Ⓒ Hacer referencia al concepto de razón entre dos longitudes y su forma de expresarse.

Ⓔ Es importante prestar atención al orden de la razón. En el ejemplo, ancho es el numerador y alto es el denominador, de esta forma para cualquier razón si se menciona a y b, se puede establecer como la fracción $\frac{a}{b}$; pero si se menciona b y a se debe establecer como la fracción $\frac{b}{a}$.

Solución de algunos ítems:

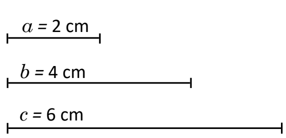
2.
$$\frac{\text{Base}}{\text{Altura}} = \frac{5}{7}$$
$$\frac{\text{Altura}}{10} = \frac{7}{5}$$
$$\text{Altura} \times 5 = 7 \times 10$$
$$\text{Altura} = \frac{7 \times 10}{5} = 14$$

Por tanto, la altura es 14 cm.

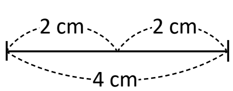
Posibles dificultades:
Si los estudiantes no dominan el concepto de razón y de proporción, se puede reforzar este contenido utilizando un tiempo no mayor a una hora clase.

Fecha: **U5 1.1**

Ⓟ a) ¿Cuántas veces es la longitud de a con respecto a la longitud de b?
b) Cuántas veces es la longitud de:
a con respecto a c.
b con respecto a c.

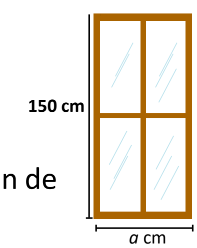


Ⓢ



a) a es $\frac{1}{2}$ de b.
b) a es $\frac{1}{3}$ de c, b es $\frac{2}{3}$ de c.

Ⓔ El ancho y alto están a razón de $\frac{4}{9}$.
Calcula el valor de a.



Como el ancho y alto están a razón de $\frac{4}{9}$, entonces:
$$\frac{\text{Ancho}}{\text{Alto}} = \frac{4}{9}$$
$$\frac{a}{180} = \frac{4}{9}$$
$$a = 180\left(\frac{4}{9}\right)$$
$$a = 80$$

Ⓡ 1. $\frac{1}{5}$

2. Altura = 14 cm.

Tarea: página 100 del Cuaderno de Ejercicios.

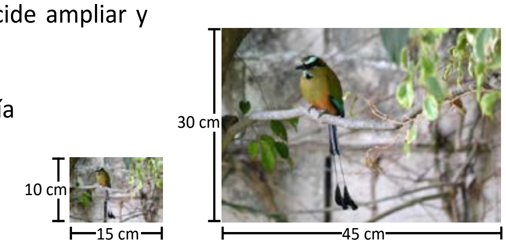
Lección 1

1.2 Segmentos proporcionales

P

Carlos tomó una fotografía a un torogoz, la cual decide ampliar y colocar en un cuadro.

a) ¿Cuál es la razón entre las alturas de la fotografía pequeña y la ampliada? ¿Y entre las bases?
b) ¿Qué relación hay entre ambas razones?



S

a) La altura de la fotografía pequeña es 10 cm y la de la fotografía ampliada es 30 cm. Entonces, la razón de ambas alturas (de la pequeña entre la ampliada) es $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$, que también puede escribirse como 1:3. De igual forma se procede para las bases, la razón entre ambas es $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ o 1:3

b) Al simplificar ambas razones, el resultado es $\frac{1}{3}$, es decir, son equivalentes. Cuando esto ocurre, se dice que las alturas y las bases de la fotografía son "proporcionales".

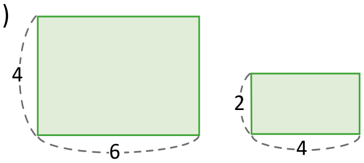
También se puede haber calculado la razón entre la altura de la grande y la de la pequeña como $\frac{30}{10} = \frac{3}{1}$, que se escribe 3:1. De igual manera para las bases, solo se debe asegurar de tomar el mismo orden.

C

La equivalencia entre dos razones, es decir, cuando dos razones son iguales, se llama **proporción**. Por ejemplo, $\frac{10}{30} = \frac{15}{45}$, y al simplificar ambas pueden expresarse como $\frac{1}{3}$ o 1:3.

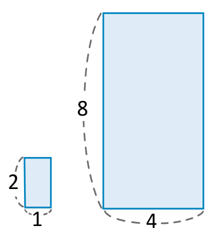
1. Dadas las siguientes parejas de rectángulos, ¿son proporcionales las bases y las alturas de cada pareja? Justifica tu respuesta.

a)



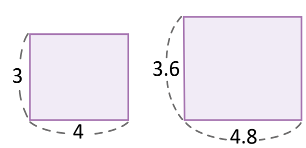
No son proporcionales.

b)



Son proporcionales. Se cumple $\frac{1}{4}$.

c)



Son proporcionales. Se cumple $\frac{5}{6}$.

2. En la siguiente figura, ¿qué longitud debe tener el segmento d para que a y b sean proporcionales a c y d?

a = 4 cm

b = 8 cm

c = 9 cm

d = 18 cm

Unidad 5

Indicador de logro

1.2 Utiliza la razón entre segmentos para determinar si una pareja de segmentos es proporcional a otros dos.

Secuencia

En primero y segundo ciclo se establece una proporción como la igualdad entre dos razones y se analizan cantidades que cumplan relaciones de proporción, así como la gráfica de una proporción directa o inversa. En esta unidad este concepto es muy importante dado que se establece que dos figuras son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y si sus lados guardan una relación de proporción.

Propósito

Ⓟ, En a) se resuelve un ítem similar a los presentados en la clase anterior. En b), el objetivo es comparar ambas razones y concluir que el valor de la razón es el mismo, de esta forma se introduce el concepto de **proporción entre dos segmentos**.

Establecer formalmente el concepto de proporción. La diferencia con la clase anterior, donde también se realizaba una comparación entre dos cantidades, es que en este caso, la comparación se realiza entre dos figuras diferentes.

Solución de algunos ítems:

1. c) Razón entre alturas:

$$\frac{3}{3.6} = \frac{3}{3.6} \times \frac{10}{10} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

Razón entre bases:

$$\frac{4}{4.8} = \frac{4}{4.8} \times \frac{10}{10} = \frac{40}{48} = \frac{5}{6}$$

Luego, ambas razones son la misma, por tanto las bases y alturas son proporcionales.

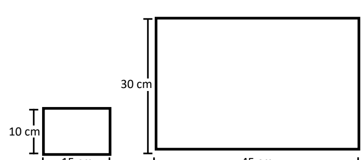
2. Como se menciona a y b, debe escribirse $\frac{a}{b}$; como se aclaró en la página anterior.
Del enunciado:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$
$$\frac{4}{8} = \frac{9}{d}$$
$$d(4) = 8(9)$$
$$d = \frac{72}{4} = 18$$

Por tanto, d = 18 cm.

Fecha: **U5 1.2**

Ⓟ



Fotografía   Fotografía ampliada

Ⓢ a) Calcula: Razón entre alturas
Razón entre bases
b) ¿Cómo son ambas razones?

a) Razón entre las alturas $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ o 1 : 3
Razón entre las bases $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ o 1 : 3

b) En ambas razones el resultado es $\frac{1}{3}$.

Ⓡ 1. a) Razón entre alturas: $\frac{4}{2} = 2$
Razón entre bases: $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
No son proporcionales.
b) Son proporcionales. Razón $\frac{1}{4}$
c) Son proporcionales. Razón $\frac{5}{6}$

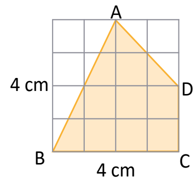
2. d = 18 cm.

Tarea: página 101 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Figuras semejantes

P

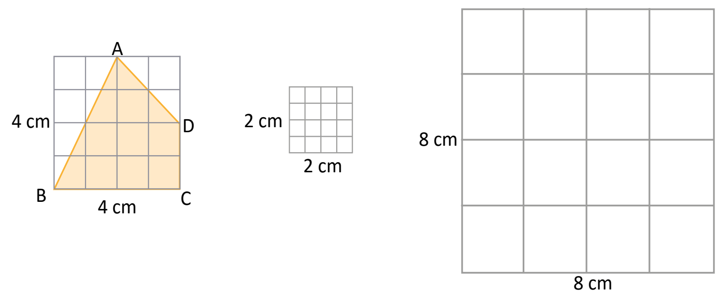
Reduce a la mitad y amplía al doble el cuadrilátero ABCD sin cambiar su forma.



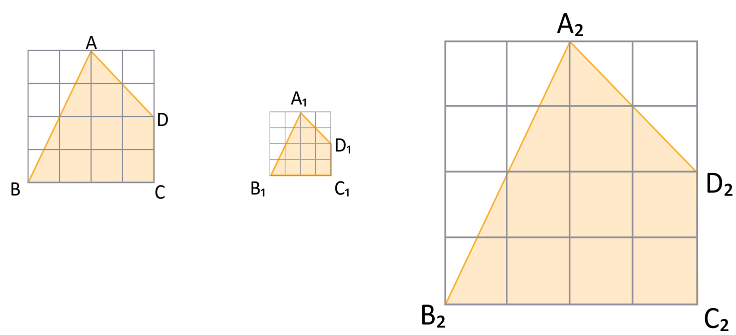
Reduce a la mitad y amplía al doble las longitudes de los lados de la cuadrícula.

S

Se dibujan dos cuadrados, uno de lado 2 cm y otro de lado 8 cm. La cuadrícula original tiene 16 cuadrados; de la misma forma se cuadriculan los cuadrados de 2 y 8 cm de tal manera que cada uno tenga en su interior 16 cuadrados:



Luego, se traza el cuadrilátero en ambas cuadrículas, respetando la forma del mismo.



Los cuadrados de la cuadrícula pequeña tienen 5 mm de lado, y los de la cuadrícula grande 2 cm de lado.

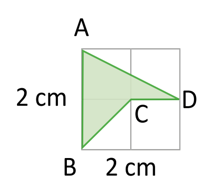
C

Dos o más figuras son **semejantes** si tienen la misma forma, pero no necesariamente, el mismo tamaño (como las del ejemplo anterior). Al reducir o ampliar una figura, el resultado es otra figura semejante a la primera.

Para indicar semejanza se utiliza el símbolo ~: el cuadrilátero ABCD ~ el cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ se lee "el cuadrilátero ABCD es semejante al cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$" (las figuras se nombran en orden de vértices correspondientes) y el cuadrilátero ABCD ~ el cuadrilátero $A_2B_2C_2D_2$.

1. Amplía al doble el cuadrilátero ABCD de la derecha, dibujando la figura resultante.

2. ¿Cuáles serán las dimensiones de la cuadrícula si el cuadrilátero ABCD se amplía al triple? Dibuja la figura resultante.



Indicador de logro

1.3 Reduce y amplía cuadriláteros para dibujar figuras semejantes utilizando cuadrícula.

Secuencia

En primero y segundo ciclo se establece una proporción como la igualdad entre dos razones y se analizan cantidades que cumplan relaciones de proporción, así como la gráfica de una proporción directa o inversa. En esta unidad este concepto es muy importante dado que se establece que dos figuras son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y si sus lados guardan una relación de proporción.

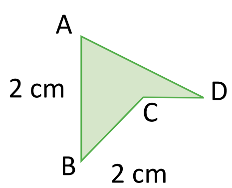
Propósito

Ⓟ, En a) se resuelve un ítem similar a los presentados en la clase anterior. En b), el objetivo es comparar ambas razones y concluir que el valor de la razón es el mismo, de esta forma se introduce el concepto de **proporción entre dos segmentos**.

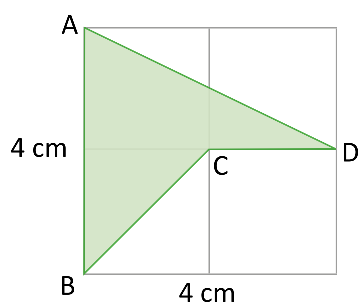
Establecer formalmente el concepto de proporción. La diferencia con la clase anterior, donde también se realizaba una comparación entre dos cantidades, es que en este caso, la comparación se realiza entre dos figuras diferentes.

Solución de algunos ítems:

1.



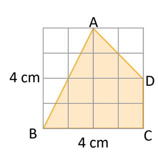
Ampliada al doble:



2. Si se amplía al triple el cuadrilátero ABCD, la cuadrícula deberá tener seis centímetros en cada lado y posteriormente dibujar la figura como en el numeral anterior.

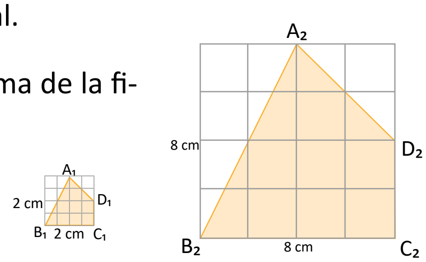
Fecha: **U5 1.3**

Ⓟ Para el cuadrilátero ABCD.
Utilizando regla y lápiz:
Reduce a la mitad.
Amplía al doble.

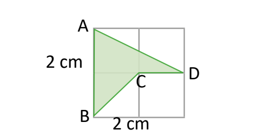


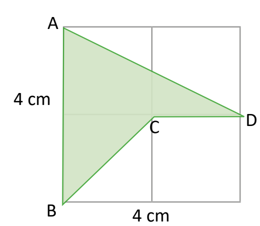
Ⓢ Dibujar 2 cuadrados uno de lado 2 cm y uno de lado 8 cm. Cuadricular ambos cuadrados según la figura original.

Respetar la forma de la figura original.



Ⓡ 1.





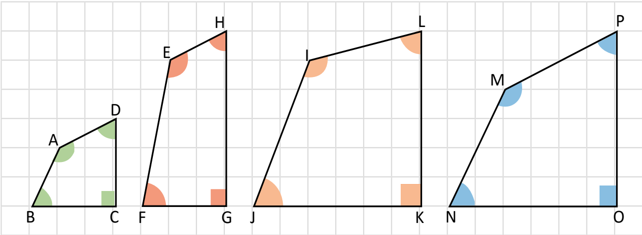
2. Las dimensiones de la cuadrícula deben ser 6 cm.

Tarea: página 102 del Cuaderno de Ejercicios.

1.4 Características de figuras semejantes, parte 1

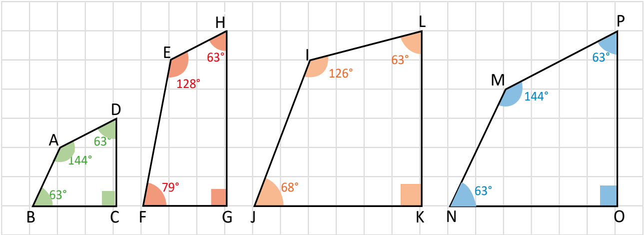
P

¿Cuál cuadrilátero es semejante al cuadrilátero ABCD?

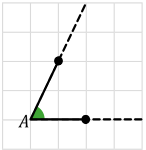


S

Al ampliar el cuadrilátero ABCD, el resultado es otro semejante al primero y solamente cambiarán las longitudes de sus lados pero no la medida de sus ángulos. Con un transportador, se miden los ángulos de los cuadriláteros y se comparan:



Cuando se alargan los lados de un ángulo, la medida del ángulo se mantiene.



Para denotar la medida del ángulo cuyo vértice es A se escribe ∢A.

En los cuadriláteros ABCD y EFGH: ∢B no es congruente a ∢F y por lo tanto EFGH no es semejante a ABCD, por no tener la misma forma.

Algo similar ocurre si se comparan los ángulos de ABCD con los de IJKL: ∢J no es congruente al ∢B.

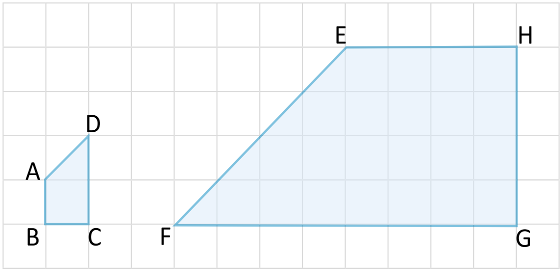
Finalmente, en los cuadriláteros ABCD y MNOP: los ángulos del primero son congruentes a los ángulos del segundo y se amplía ABCD al doble, el resultado es igual a MNOP. Por lo tanto, MNOP es semejante a ABCD.

C

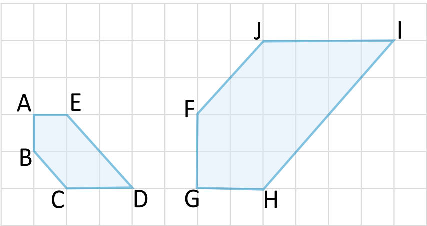
En dos o más polígonos semejantes, sus ángulos correspondientes son congruentes, es decir, las medidas de sus ángulos son iguales. Son **ángulos correspondientes** los que se encuentran en la misma posición respecto al polígono.

En cada pareja de polígonos semejantes identifica los ángulos correspondientes.

a)



b)



Indicador de logro

1.4 Identifica ángulos correspondientes entre polígonos y, con base a ello, determina polígonos semejantes.

Secuencia

En la clase anterior se definió que dos figuras son semejantes si conservan la misma forma, aunque sus tamaños sean distintos. Para el contenido abordado en esta clase, se trata de identificar que al conservar su forma, existen ángulos correspondientes, que conservan la misma medida.

Hay que tener cuidado en el hecho de que la congruencia de los ángulos correspondientes no necesariamente indica la semejanza. Ejemplo: un rectángulo.

Propósito

Ⓟ, Observar que en dos cuadriláteros que son semejantes, todos los ángulos que están en la misma posición deben tener la misma medida.
La idea es medir los ángulos de la primer figura y comparar con las tres figuras restantes, para este fin se recomienda utilizar las fotocopias de las páginas anexas para obtener más exactitud en los cálculos. También es posible recortar ABCD y sobreponer a las otras figuras, de esta forma será más visible la semejanza con MNOP.

Solución de algunos ítems:

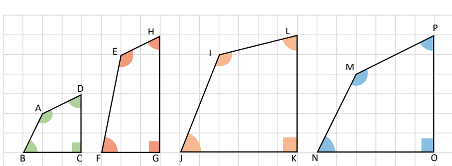
La intención de este ítem es analizar que la semejanza se mantiene aunque la figura haya sido rotada.

∢A es correspondiente con ∢E
∢B es correspondiente con ∢H
∢C es correspondiente con ∢G
∢D es correspondiente con ∢F

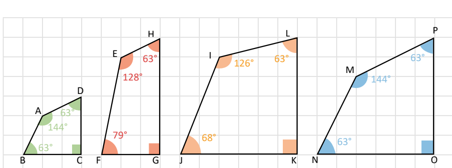
Posibles dificultades:
Si se dificulta medir los ángulos, indicar que se deben prolongar algunos lados de los cuadriláteros para que resulte más sencillo.

Fecha: **U5 1.4**

Ⓟ ¿Cuál es semejante al cuadrilátero ABCD?



Ⓢ Utilizando un transportador se miden los ángulos de los cuadriláteros y se comparan.



Ⓡ En los cuadriláteros ABCD y MNOP las medidas de sus ángulos son congruentes, además los lados de MNOP son el doble que en ABCD.

1.
a) Son semejantes :
∢A = ∢E = 135°, ∢D = ∢F = 45° y
∢B = ∢H = ∢C = ∢G = 90°
Las figuras están rotadas.

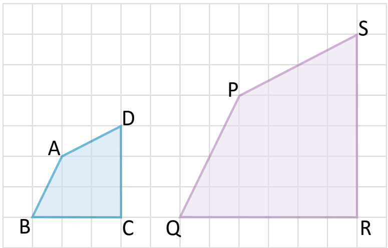
b) Son semejantes:
∢C = ∢J = 135°, ∢D = ∢I = 45° y
∢B = ∢F = 135°, ∢A = ∢G = 90° y
∢E = ∢H = 135°
Las figuras están rotadas.

Tarea: página 103 del Cuaderno de Ejercicios.

1.5 Características de figuras semejantes, parte 2

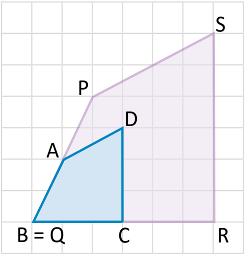
P

Los cuadriláteros ABCD y PQRS son semejantes. ¿Cuál es la relación entre las razones de los lados correspondientes a ambos cuadriláteros?



Lados correspondientes son los que se encuentran en la misma posición. Puedes sobreponer ambos cuadriláteros y comparar sus lados o utilizar regla para medir las longitudes y calcular las razones.

S



Se sobreponen los cuadriláteros, haciendo coincidir los vértices B y Q. De la figura se deduce lo siguiente:

$PQ = 2AB \Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{1}{2}$ $\quad QR = 2BC \Rightarrow \frac{BC}{QR} = \frac{1}{2}$

$RS = 2CD \Rightarrow \frac{CD}{RS} = \frac{1}{2}$ $\quad SP = 2DA \Rightarrow \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$

Las razones son iguales, por lo tanto, los lados correspondientes son proporcionales.

C

En dos polígonos semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales. En el Problema inicial:

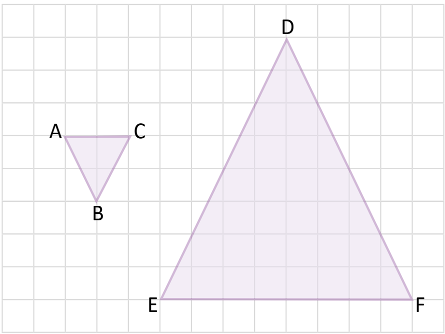
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$$

A los lados correspondientes también se les llama **lados homólogos** y la razón entre ellos se denomina **razón de semejanza**.

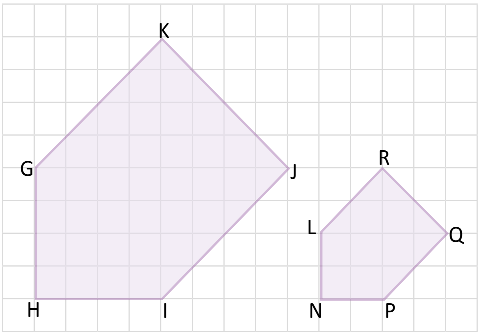
En general, **dos polígonos son semejantes** si sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son congruentes.

En las figuras, el triángulo ABC es semejante al triángulo FDE, y el pentágono GHIJK es semejante a LNPQR. Identifica los lados correspondientes y calcula la razón de semejanza en cada pareja.

a)



b)



Indicador de logro

1.5 Identifica los lados correspondientes de figuras y calcula la razón de semejanza.

Secuencia

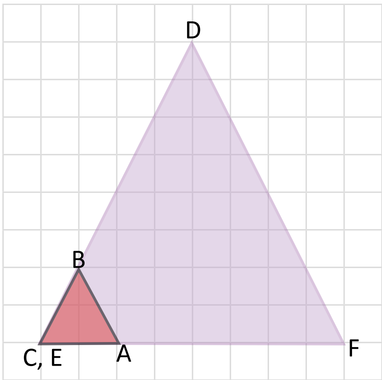
Hasta el momento se ha establecido que dos figuras son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes, y para esta clase se analizará qué relación debe cumplirse para sus lados. Para ello, se hará uso de la proporción entre segmentos estudiada en la clase 1.2.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Deducir que en dos figuras semejantes sus lados correspondientes son proporcionales y tienen el mismo valor de razón. Pueden utilizarse fotocopias de la imagen que aparece en el Problema inicial, estas se encuentran en el material complementario en la página 184. Sobreponer la imagen pequeña a la segunda y haciendo la coincidir en alguno de sus lados.
Para mayor comprensión de las últimas dos igualdades, es mejor sobreponer el vértice D en S.

Solución de algunos ítems:

a) Si se rota ΔABC 180°, la figura queda en la misma orientación que ΔDEF.



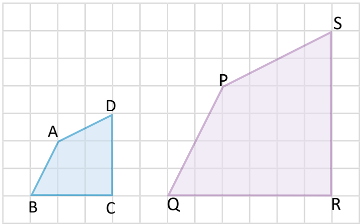
Los lados homólogos son:
AC con FE
BA con DF
BC con DE

De la imagen. $FE = 4AC \Rightarrow \frac{AC}{FE} = \frac{1}{4}$
$DF = 4BA \Rightarrow \frac{BA}{DF} = \frac{1}{4}$
$DE = 4BC \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{1}{4}$
La razón de semejanza es $\frac{1}{4}$.

Observaciones: La correspondencia de los vértices puede ser B con D, A con E y C con F. Aplica la misma observación al literal b.

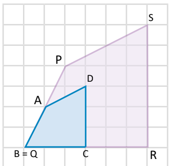
Fecha: **U5 1.5**

Ⓟ Para los siguientes cuadriláteros.



Encuentra las razones de los lados correspondientes.
¿Cuál es la relación entre las razones?

Ⓢ Sobreponer los cuadriláteros y hacer coincidir un vértice.



De la figura se obtiene:
$PQ=2AB \Longrightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{1}{2}$ $QR=2BC \Longrightarrow \frac{BC}{QR} = \frac{1}{2}$
$RS=2CD \Longrightarrow \frac{CD}{RS} = \frac{1}{2}$ $SP=2DA \Longrightarrow \frac{DA}{SP} = \frac{1}{2}$

Las razones son iguales.
Sus lados correspondientes son proporcionales.

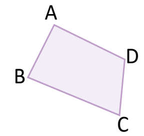
Ⓡ a) Los lados homólogos son:
AC con FE, BA con DF, BC con DE
La razón de semejanza es $\frac{1}{4}$.
b) Los lados homólogos son:
GH con LN, HI con NP, IJ con PQ, JK con QR, GK con RL.
La razón de semejanza es $\frac{1}{2}$.

Tarea: página 104 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 Construcción de figuras semejantes

P

Dibuja sobre una página de papel bond el siguiente cuadrilátero:

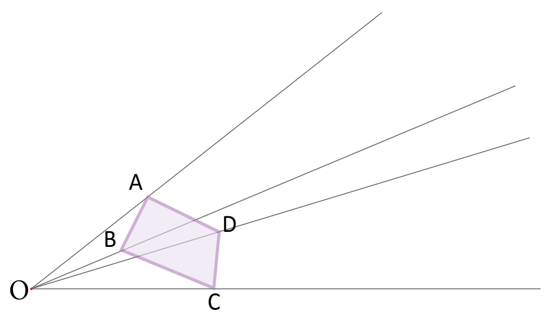


¿Cómo puedes dibujar otro cuadrilátero semejante a ABCD de tal forma que se encuentren a razón 1:3?

S

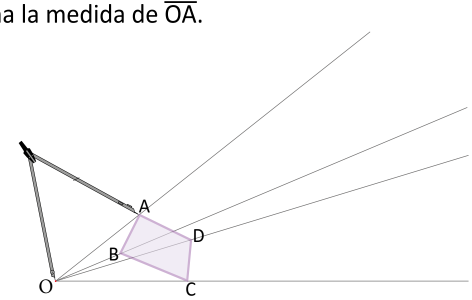
Para poder dibujar un cuadrilátero semejante a ABCD de tal forma que se encuentren a razón 1:3 se hace lo siguiente:

1. Coloca un punto que se denotará por O. Traza semirrectas que pasen por el punto O y cada uno de los vértices del cuadrilátero.

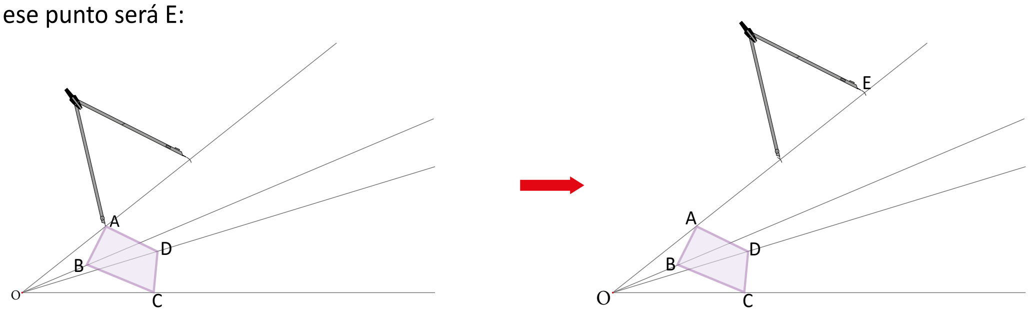


Una **semirrecta** está formada por todos los puntos sobre una línea recta que se encuentran a uno de los lados de un determinado punto fijo. También se le conoce como **rayo**.

2. Con un compás, toma la medida de $\overline{OA}$.

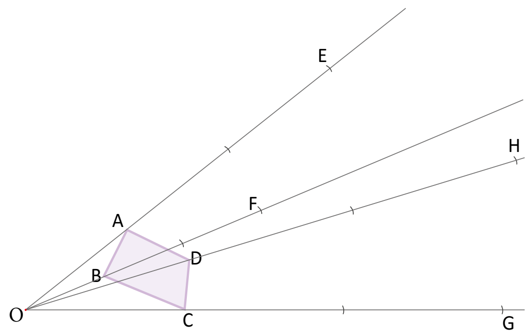


3. A partir del vértice A y sobre la semirrecta, marca un punto E que satisfaga OE = 3 OA. Esto se hace colocando la punta del compás en A y trazando un arco que corte a la semirrecta; luego se coloca la punta del compás en ese punto de intersección y se traza un segundo arco que corte a la semirrecta, ese punto será E:

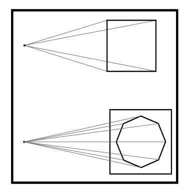


Unidad 5

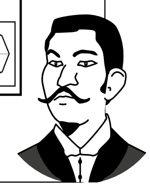
4. Haz lo mismo con los otros tres vértices del cuadrilátero, tomando las medidas OB, OC, OD, encontrando los puntos F, G, y H que satisfagan OF = 3OB, OG = 3OC y OH = 3OD:



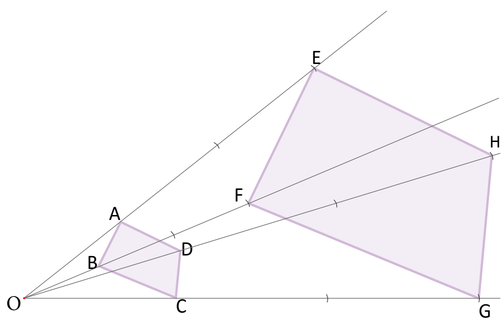
El italiano **Leon Battista Alberti** fue además de arquitecto, el primer teórico del arte del Renacimiento, desarrolló esta técnica en su obra *Della pintura*, en la que describe las leyes de la perspectiva. Un objeto disminuye su tamaño cuando se mira desde una larga distancia hasta que casi queda reducido a un punto.



Batista, A. (1782). *Della Architettura*.



5. Une los puntos para formar el cuadrilátero EFGH:



C

El método anterior para generar figuras semejantes se conoce como **homotecia**. Al punto O se le llama **centro de homotecia**, los cuadriláteros ABCD y EFGH se dice que son **homotéticos** y la razón:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{1}{3}$$

se llama **razón de semejanza**.

1. Verifica que los cuadriláteros dibujados anteriormente son semejantes a razón 1:3.

2. Dibuja dos triángulos homotéticos cuya razón de semejanza sea 1:2.

Indicador de logro

1.6 Construye figuras semejantes, mediante la homotecia.

Secuencia

En las clases 1.3 y 1.4 se ha estudiado que dos figuras son semejantes si entre ellas se cumple que sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son iguales, en particular, esto se cumple para cualquier polígono. En esta clase se construyen figuras semejantes, utilizando regla y compás, mediante homotecias.

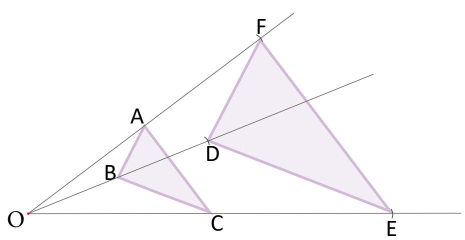
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar regla y compás para construir figuras semejantes. Para este caso en especial, el estudiante debe seguir la solución paso a paso, lo importante es que entienda que se debe colocar tres veces la distancia desde O hasta el vértice ya que los lados deben estar a razón 1 : 3, además se debe indicar claramente que el compás debe mantener la misma abertura al dividir la recta en tres partes.

Lo importante es comprender que dos figuras que son homotéticas entre sí, también son semejantes. Utilizando compás se puede comprobar que los lados de las figuras están a razón 1 : 3.

Solución de algunos ítems:

Utilizando compás.

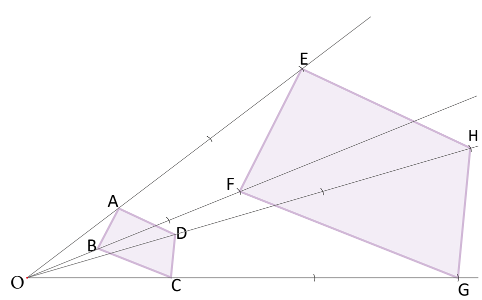


Los triángulos están a razón 1 : 2.

Fecha: **U4 1.6**

Ⓟ Dibujar otro cuadrilátero semejante a ABCD que este a razón 1 : 3.

Ⓢ Seguir el paso a paso.



1. Coloca un punto O y trazar rectas que pasen por los vértices.
2. Con un compás, toma la medida de $\overline{OA}$.
3. Con la misma abertura, marca un punto E que cumpla OE = 3OA.
4. Repite el procedimiento anterior para los demás vértices.
5. Forma el cuadrilátero uniendo las marcas.

Ⓡ 1. Medir con un compás los lados correspondientes y verificar que:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{1}{3}$$

Tarea: página 105 del Cuaderno de Ejercicios.

1.7 Practica lo aprendido

1. Las dimensiones ancho y largo del piso de un salón que tiene forma rectangular están a razón 3:4.

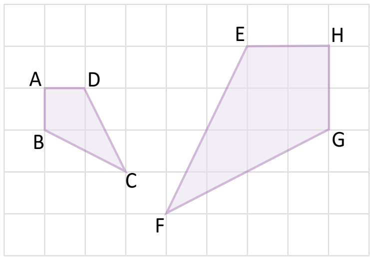
   a) Si el salón mide 8 m de largo, ¿cuánto mide el ancho? Ancho = 6 m

   b) Se colocará piso de cerámica en el salón. Si cada baldosa de cerámica tiene un área de 0.25 m^2 y un costo de $2.00, ¿cuánto costará colocar cerámica en todo el piso? $384

2. La Asamblea Legislativa de El Salvador decretó en la Ley de Símbolos Patrios, que las dimensiones de la bandera magna nacional son 3.35 m de largo por 1.89 m de ancho. Julia elabora versiones reducidas de la bandera, con un ancho de 20 cm. ¿Cuál es la medida del largo de la bandera elaborada por Julia, si tanto su versión como la original son semejantes? Encuentra la respuesta en cm hasta las décimas. largo = 35.4 cm

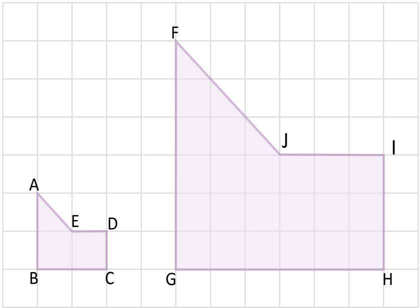
Las dimensiones de las banderas deben estar ambas en cm o en m.

3. Verifica que los cuadriláteros ABCD y HGFE son semejantes, ¿cuál es la razón de semejanza?



Razón: 1 : 2

4. Verifica que los polígonos ABCDE y FGHIJ son semejantes, ¿cuál es la razón de semejanza?



Razón: 1 : 3

5. Dibuja dos triángulos homotéticos cuya razón de semejanza sea 2:3.

Indicador de logro

1.7 Resuelve problemas que involucren la semejanza de figuras.

Solución de algunos ítems:

1. Dado que ancho y largo están a razón 3 : 4, se cumple:

$$\frac{\text{Ancho}}{\text{Largo}} = \frac{3}{4}$$

a) Si el largo = 8 m, entonces:

$$\frac{\text{Ancho}}{8\text{ m}} = \frac{3}{4}$$
$$\text{Ancho} = \frac{3}{4}(8\text{ m})$$
$$\text{Ancho} = 6\text{ m}$$

b) Ancho = 6 m y Largo = 8 m, por tanto el área del terreno es
$6 \times 8 = 48$ m^2.
El área de cada baldosa es de 0.25 m^2, luego
48 m^2 ÷ 0.25 m^2 = 192.
Significa que se necesitan 192 baldosas para cubrir el piso.

Además, 2 × 192 = 384. Por tanto, para cubrir el piso de cerámica se necesitan $384.

Utilizar calculadora únicamente para resolver el ítem b.

2. Como ambas versiones son semejantes, sus lados son proporcionales y debe cumplirse que:

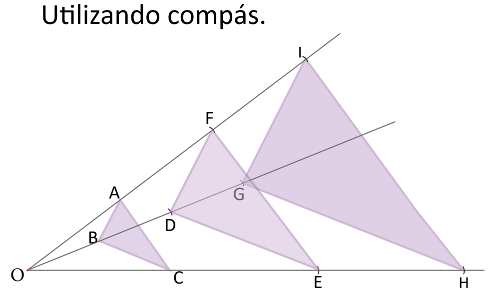
$$\frac{3.35\text{ m}}{1.89\text{ m}} = \frac{\text{largo}}{20\text{ cm}}$$

Pasando todo a centímetros.

$$\frac{335\text{ cm}}{189\text{ cm}} = \frac{\text{largo}}{20\text{ cm}}$$
$$\text{largo} = \frac{335}{189} \times 20$$
$$= \frac{6\,700}{189}$$
$$= 35.4\text{ cm}$$

5. Ejemplo de solución.

Utilizando compás.



En la figura, los triángulos DEF y GHI son homotéticos y están a razón 2 : 3.

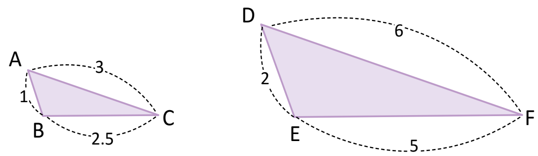
Tarea: página 106 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2 Semejanza de triángulos

2.1 Primer criterio de semejanza de triángulos

P

Los triángulos ABC y DEF de la figura tienen sus lados proporcionales, a razón 1:2. ¿Son semejantes?



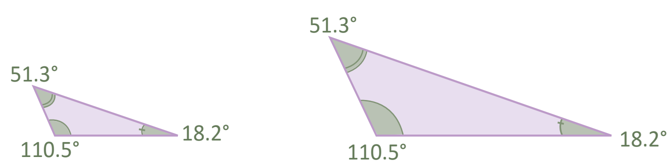
Para medir los ángulos del triángulo utiliza la figura que se encuentra en las páginas adicionales del libro.

S

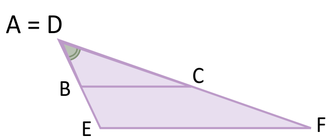
Los lados de ambos triángulos son proporcionales. Debe verificarse si sus ángulos correspondientes son congruentes; esto puede hacerse de las siguientes maneras:

1. Con un transportador, mide los ángulos de cada triángulo:

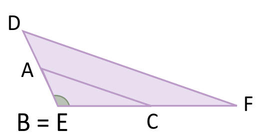
∢A = ∢D
∢B = ∢E
∢C = ∢F



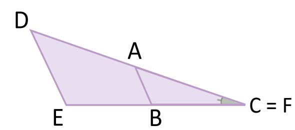
2. Sobrepone los triángulos y compara cada vértice:



∢A = ∢D



∢B = ∢E



∢C = ∢F

En los dos casos se verifica que los ángulos correspondientes de ambos triángulos son congruentes. Por lo tanto, ΔABC ~ ΔDEF.

C

Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son congruentes.

Criterio LLL:
Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes proporcionales, entonces también son semejantes.
Por ejemplo, los triángulos ABC y DEF del Problema inicial tienen sus lados correspondientes proporcionales, es decir:

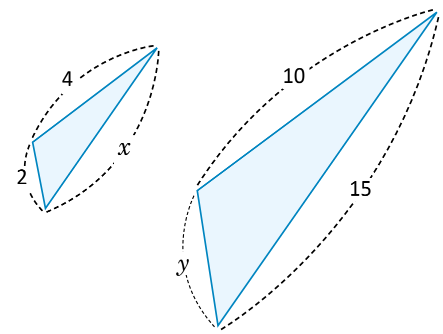
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, ΔABC y ΔDEF son semejantes.

Lección 2

E

¿Cuáles deben ser los valores de x y y para que los triángulos sean semejantes?



Según el resultado descrito en la conclusión, para que los triángulos sean semejantes bastaría con que sus lados sean proporcionales, es decir: $\frac{2}{y} = \frac{x}{15} = \frac{4}{10}$.

Se calcula el valor de x:

$$\frac{x}{15} = \frac{4}{10}$$
$$x = 15\left(\frac{4}{10}\right)$$
$$x = 6$$

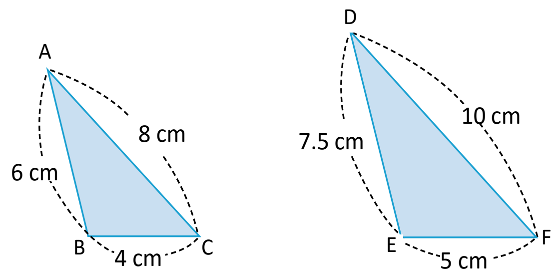
Se calcula el valor de y:

$$\frac{2}{y} = \frac{4}{10}$$
$$\frac{2(10)}{4} = y$$
$$y = 5$$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

Por lo tanto, los valores de x y y deben ser 6 y 5 respectivamente.

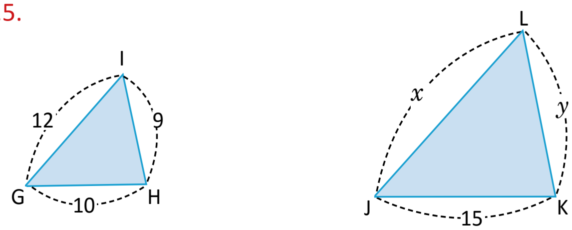
1. Usando el resultado descrito en la conclusión determina si los triángulos ABC y DEF son semejantes. En caso de que lo sean calcula la razón de semejanza.



Los triángulos son semejantes y la razón de semejanza es $\frac{4}{5}$.

2. ¿Cuáles deben ser los valores de x y y para que los triángulos GHI y JKL sean semejantes?

$x = 18$ y $y = 13.5$.



Indicador de logro

2.1 Identifica triángulos semejantes a partir del criterio, “lados correspondientes proporcionales”.

Secuencia

En la lección anterior se definieron los conceptos de razón y proporción entre segmentos, utilizándose luego para definir formalmente que dos figuras son semejantes si sus segmentos correspondientes son proporcionales y si sus ángulos correspondientes son iguales, se construyen además figuras semejantes, haciendo uso de regla y compás.

En esta lección se reduce el estudio únicamente a los triángulos, analizando los tres criterios que una pareja de triángulos debe cumplir para que ambos sean semejantes, para esta clase se estudia el criterio **lados correspondientes proporcionales**, comúnmente conocido como **LLL**.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Verificar que dos triángulos que tienen sus lados proporcionales son semejantes. Se debe recordar de las clases anteriores que cualquier figura semejante cumple tener sus lados proporcionales y sus ángulos correspondientes congruentes, de esta forma en el problema solo bastará verificar que los ángulos son congruentes.

Lo importante es recordar de la conclusión, que basta con que los tres lados correspondientes sean proporcionales y utilizar este hecho para encontrar los valores de ambas variables ya que existe la razón $\frac{4}{10}$ que permite realizar esto.

Solución de algunos ítems:

1.
Encontrando el valor de razón entre los lados proporcionales.

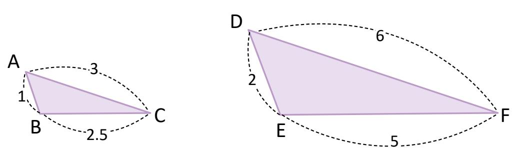
$$\frac{BC}{EF} = \frac{4}{5}$$
$$\frac{AC}{DF} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$
$$\frac{AB}{DE} = \frac{6}{7.5} = \frac{60}{75} = \frac{4}{5}$$

De esta forma, $\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$. Como los lados son proporcionales, los triángulos son semejantes y la razón de semejanza es $\frac{4}{5}$.

2.
Si los triángulos son semejantes, debe cumplirse que:
$$\frac{GH}{JK} = \frac{HI}{KL} = \frac{IG}{LJ}$$
Luego,
$$\frac{10}{15} = \frac{9}{y} = \frac{12}{x}$$
Tomando cada igualdad.
$$\frac{10}{15} = \frac{9}{y}$$
$$10y = 15 \times 9$$
$$y = \frac{135}{10} = 13.5$$

Además, $\frac{10}{15} = \frac{12}{x}$
$$10x = 15 \times 12$$
$$x = \frac{180}{10} = 18$$
Por tanto, $x = 18$ y $y = 13.5$.

Fecha: **U5 2.1**

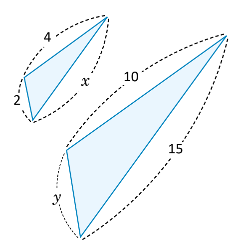
Ⓟ


Se cumple: Lados proporcionales.
A razón 1 : 2.
Verificar si son semejantes.

Ⓢ Al medir con un transportador resulta que
∢A = ∢D, ∢B = ∢E, ∢C = ∢F.

En los triángulos:
Los lados son proporcionales.
Los ángulos correspondientes son iguales.
Por tanto, son semejantes.

Ⓔ Si son semejantes, debe cumplirse que: $\frac{2}{y} = \frac{x}{15} = \frac{4}{10}$



Calculando x:
$$\frac{x}{15} = \frac{4}{10}$$
$$x = \left(\frac{4}{10}\right)15$$
$$x = 6$$

Calculando y:
$$\frac{2}{y} = \frac{4}{10}$$
$$4y = 2 \times 10$$
$$y = \frac{20}{4}$$
$$y = 5$$

Ⓡ 1. Los triángulos son semejantes y la razón de semejanza es $\frac{4}{5}$.

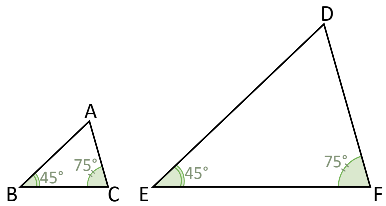
Tarea: página 107 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.2 Segundo criterio de semejanza de triángulos

P

En los triángulos ABC y DEF: ∢B = ∢E y ∢C = ∢F. ¿Cuál es la medida de ∢A y ∢D? ¿Son ambos triángulos semejantes?

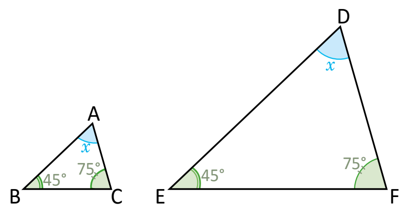


Los ángulos internos de todo triángulo suman 180°, y para que dos triángulos sean semejantes deben tener sus lados correspondientes proporcionales, y sus ángulos correspondientes congruentes.

S

Se denota por x la medida del tercer ángulo, que es igual en ambos triángulos. Utilizando la propiedad de la suma de los ángulos internos del triángulo:

$$45° + 75° + x = 180°$$
$$x = 180° - 120°$$
$$x = 60°$$



Por lo tanto, la medida del tercer ángulo en ambos triángulos es 60°.

Ahora mide con una regla las longitudes de los lados de cada triángulo que dibujaste en tu cuaderno y comprueba que los lados correspondientes son proporcionales.

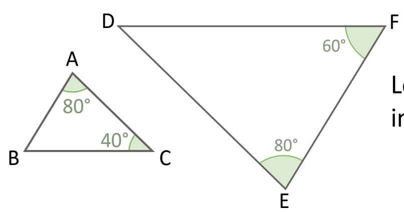
C

Criterio AA:
Si dos triángulos tienen dos pares de ángulos correspondientes congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

E

¿Son semejantes los triángulos mostrados en la figura? Justifica tu respuesta.

Calcula el valor del tercer ángulo en alguno de ellos.



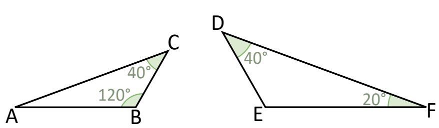
Los ángulos ∢A y ∢E son congruentes. Por propiedad de los ángulos internos de un triángulo:

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$$
$$\measuredangle B = 180° - 120°$$
$$\measuredangle B = 60°$$

Entonces, ∢B y ∢F son congruentes. Por el segundo criterio de semejanza de triángulos, ΔABC ~ ΔEFD.

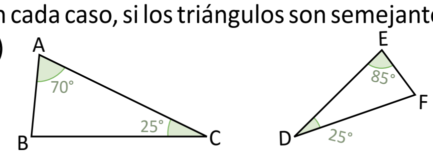
1. Usando el resultado descrito en la conclusión determina, en cada caso, si los triángulos son semejantes.

a)



ΔABC ~ ΔDEF

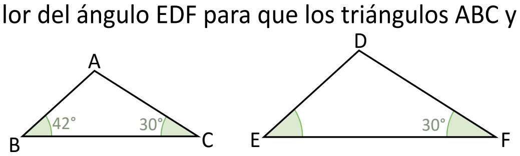
b)



ΔABC ~ ΔFED

2. ¿Cuál debe ser el valor del ángulo EDF para que los triángulos ABC y DEF sean semejantes?

∢EDF = 108°



Indicador de logro

2.2 Identifica triángulos semejantes a partir del criterio “dos ángulos correspondientes congruentes”.

Secuencia

Utilizando la definición obtenida en la lección anterior para figuras semejantes, se analizarán los criterios para semejanza de triángulos. Así, en la clase 2.1 se analiza cuando los tres lados de los triángulos son proporcionales y para esta clase se estudia el criterio, cuando dos de los ángulos correspondientes son iguales.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Como los dos ángulos correspondientes son iguales, la medida del ángulo faltante será la misma para ambos triángulos pues la suma de los ángulos internos siempre es 180°, el alumno debe medir los lados correspondientes y comparar las razones para evidenciar que el último criterio para la semejanza de las figuras se cumple.

Ⓔ Al encontrar el ángulo ∢B faltante de ΔABC se observa que existen dos ángulos correspondientes que son congruentes y aplicando el criterio descrito en la Conclusión se tiene que los triángulos son semejantes.

Solución de algunos ítems:

1. a)
Los ángulos ∢C = ∢D son congruentes. Encontrando otro ángulo correspondiente congruente para que se cumpla el criterio de semejanza:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$$
$$\sphericalangle A = 180° - 160°$$
$$\sphericalangle A = 20°$$

Por el segundo criterio de semejanza:
ΔABC~ ΔDEF.

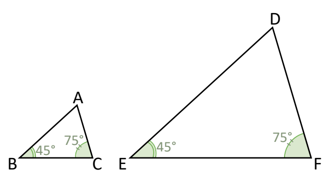
2.
En el ΔABC:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$$
$$\sphericalangle A = 180° - 72°$$
$$\sphericalangle A = 108°$$

Como el ∢A es correspondiente con el ∢D. Para que ΔABC ∼ ΔDEF necesariamente debe ser ∢D = 108°.

Fecha: **U5 2.2**

Ⓟ



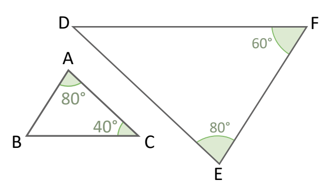
Ⓢ Encuentra ∢A y ∢D:
Verifica si los triángulos son semejantes.

Denotando por x la medida del tercer ángulo.

$$45° + 75° + x = 180°$$
$$x = 180° - 120°$$
$$x = 60°$$

Mide con una regla y comprueba que los lados correspondientes son proporcionales. Por tanto, ΔABC ∼ ΔDEF.

Ⓔ



Verificando que son semejantes:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$$
$$\sphericalangle A = 180° - 120°$$
$$\sphericalangle A = 60°$$

Como ∢A = ∢E y ∢B = ∢F. Por el segundo criterio de semejanza ΔABC ∼ ΔEFD.

Ⓡ 1. a) Son semejantes.
b) Son semejantes.
2. ∢D = 108°

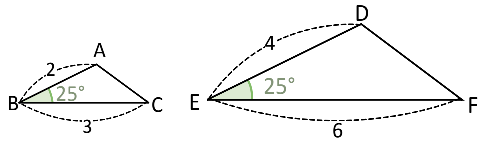
Tarea: página 108 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.3 Tercer criterio de semejanza de triángulos

P

Los triángulos ABC y DEF tienen un ángulo correspondiente congruente y los lados adyacentes a este ángulo son proporcionales a razón 1:2. ¿Son semejantes?



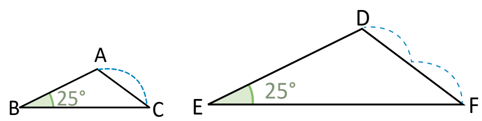
Utiliza regla (o compás) para calcular la razón entre $\overline{CA}$ y $\overline{FD}$.

S

Con un compás se toma la medida del lado CA y se verifica (comparando con FD) que $\overline{CA}$ es la mitad de $\overline{FD}$.

Luego:

$$\frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$



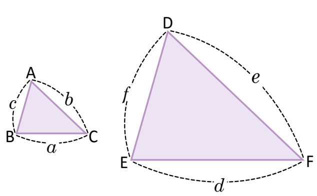
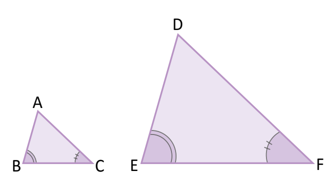
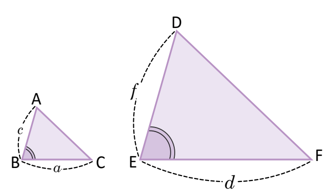
Es decir, los triángulos tienen sus lados homólogos proporcionales. Por el primer criterio de semejanza, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

C

Criterio LAL:
Si dos triángulos tienen un ángulo correspondiente congruente y los lados adyacentes a este son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

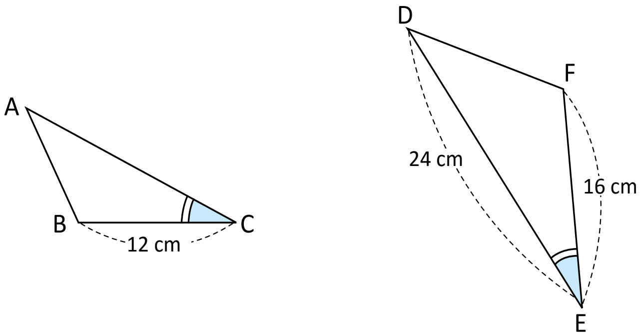
A continuación, se resumen los tres criterios de semejanza de triángulos:

Criterios de semejanza de triángulos. Dos triángulos son semejantes si cumplen al menos una de las siguientes condiciones:

1. Sus lados correspondientes son proporcionales (criterio LLL).	2. Dos pares de ángulos correspondientes son congruentes (criterio AA).	3. Un par de ángulos correspondientes es congruente y los lados adyacentes son proporcionales (criterio LAL).
 $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$	 $\sphericalangle B = \sphericalangle E$ $\sphericalangle C = \sphericalangle F$	 $\sphericalangle B = \sphericalangle E$ $\frac{a}{d} = \frac{c}{f}$

E

En los siguientes triángulos, los ángulos C y E son congruentes, ¿cuál debe ser la longitud del lado CA para que el ΔABC sea semejante al ΔDFE?



Como ya tienen un par de ángulos correspondientes congruentes (∢C y ∢E) entonces, para que sean semejantes, los lados adyacentes a estos ángulos deben ser proporcionales, es decir:

Se sustituyen los valores para encontrar CA:

$$\frac{BC}{FE} = \frac{CA}{ED}$$

$$\frac{12}{16} = \frac{CA}{24}$$

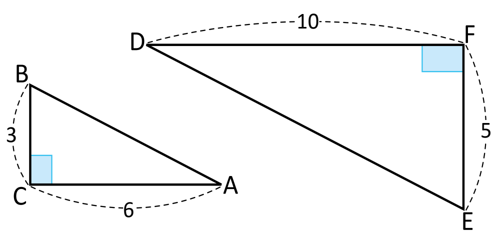
$$24\left(\frac{3}{4}\right) = CA$$

$$CA = 18$$

Por lo tanto, la longitud del lado CA debe ser 18 cm para que los triángulos ABC y DFE sean semejantes.

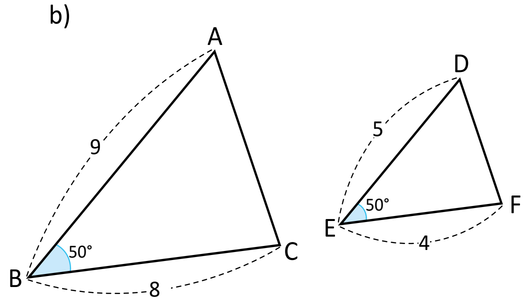
1. Usando el criterio LAL, determina si los siguientes triángulos son semejantes:

a)



Son semejantes

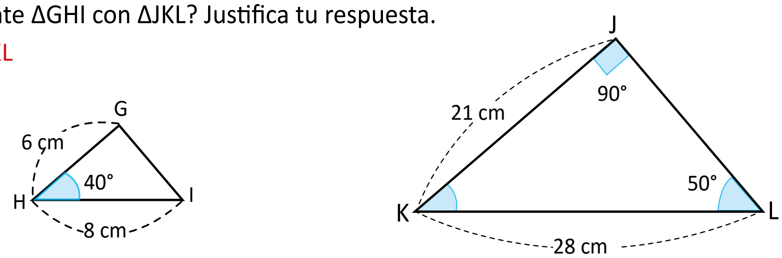
b)



No son semejantes

2. ¿Es semejante ΔGHI con ΔJKL? Justifica tu respuesta.

ΔGHI ~ ΔJKL



110

Indicador de logro

2.3 Identifica triángulos semejantes a partir del criterio “un ángulo correspondiente congruente y lados adyacentes proporcionales”.

Secuencia

En la clase 2.1 y 2.2 se han estudiado dos criterios de semejanza de triángulos, utilizando la definición de figuras semejantes vista en la lección anterior. En la solución del Problema inicial se utiliza el primer criterio de semejanza, esto permite establecer el tercer criterio “cuando dos lados son proporcionales y el ángulo correspondiente es congruente”.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Lo importante es que el estudiante note que al existir dos lados correspondientes proporcionales, basta con averiguar si el tercer lado también es proporcional a estos, para establecer que son semejantes a través del primer criterio de semejanza. Para verificar, se propone utilizar un compás, con la abertura del mismo se mide AC y se verifica que esta abertura cabe exactamente dos veces en el lado DF. También puede utilizarse una regla para medir las distancias y luego comparar el valor de razón.

Ⓔ Al igual que en clases anteriores, puede utilizarse **LAL**, “Lado - Ángulo - Lado” para memorizar fácilmente este criterio.

Solución de algunos ítems:

1. a)

En los triángulos $\measuredangle C = \measuredangle F$.

$$\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5}$$
$$\frac{AC}{DF} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Luego,

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

Por tanto, por el tercer criterio de semejanza $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Solución:

Para el triángulo JKL.

$$\measuredangle J + \measuredangle K + \measuredangle L = 180°$$
$$\measuredangle K = 180° - 140°$$
$$\measuredangle K = 40°$$

Entonces, $\measuredangle K = \measuredangle H$, y para los lados adyacentes se tiene:

$$\frac{GH}{JK} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$
$$\frac{HI}{KL} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

Luego,

$$\frac{GH}{JK} = \frac{HI}{KL}$$

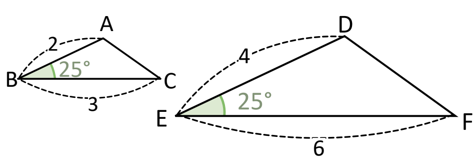
Por tanto, por el tercer criterio de semejanza $\Delta GHI \sim \Delta JKL$.

Posibles dificultades:

En el ejemplo, los triángulos han sido rotados por lo que puede ser difícil encontrar los lados correspondientes. En este caso se puede imaginar que los triángulos se sobreponen uno sobre otro, de forma que un lado quede sobre otro.

Fecha: **U5 2.3**

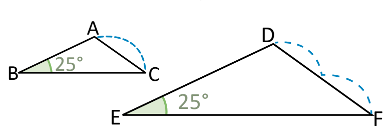
Ⓟ En la figura $\measuredangle B = \measuredangle E$ y los lados adyacentes son proporcionales.



Ⓢ Tomando la medida de CA se tiene que:

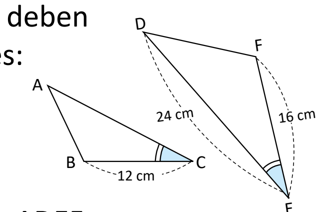
$$\frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}.$$

Luego, los lados son proporcionales y por el primer criterio de semejanza $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.



Ⓔ Como $\measuredangle C = \measuredangle E$, y los lados adyacentes deben ser proporcionales:

$$\frac{BC}{FE} = \frac{CA}{ED}$$
$$\frac{12}{16} = \frac{CA}{24}$$
$$CA = 18$$



Por tanto, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

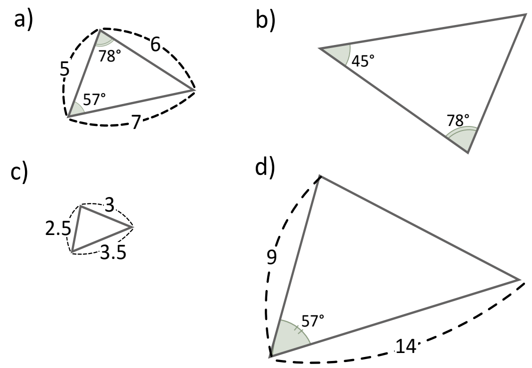
Ⓡ 1. a) Son semejantes.
b) No son semejantes.

Tarea: página 109 del Cuaderno de Ejercicios.

2.4 Practica lo aprendido

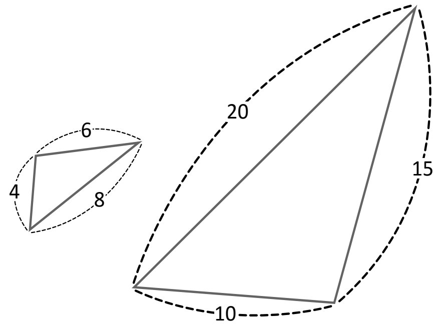
1. Determina cuáles de los siguientes triángulos son semejantes. Escribe el criterio de semejanza que utilizaste.

   Las figuras a), b) y c) son semejantes.



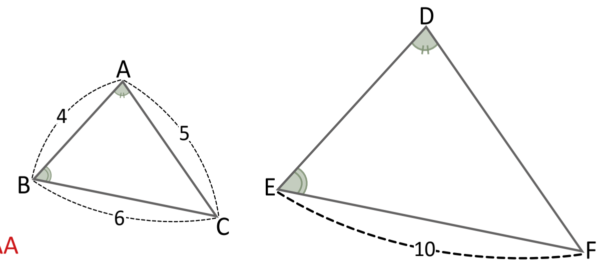
2. Verifica que los triángulos de la figura son semejantes. Escribe el criterio de semejanza que utilizaste y la razón de semejanza.

   Los triángulos son semejantes y la razón entre ellos es 2 : 5



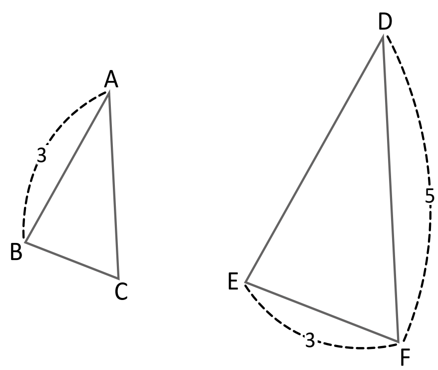
3. En la figura ∢A = ∢D y ∢B = ∢E
   a) ¿Cuál criterio puedes utilizar para justificar que los triángulos son semejantes?
   b) ¿Cuál es la longitud de $\overline{DE}$?

   a) Por el segundo criterio de semejanza AA
   b) DE = $\frac{20}{3}$



4. Los triángulos ABC y DEF son semejantes, a razón 2:3 ¿Cuáles son las medidas de $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{DE}$?

   BC = 2, AC = $\frac{10}{3}$, ED = $\frac{9}{2}$



Unidad 5

Indicador de logro

2.4 Resuelve problemas utilizando los criterios de semejanza de triángulos.

Solución de algunos ítems:

1.
En a), conociendo el último ángulo. Si le llamamos x, se cumple:

$$57° + 78° + x = 180°$$
$$x = 180° - 135°$$
$$x = 45°$$

Luego, por el criterio AA los triángulos en a) y b) son semejantes.

Para a) y c), los lados correspondientes son proporcionales con razón 1 : 2. Por tanto, por el primer criterio LLL, estos triángulos también son semejantes.

Como la figura en a) es semejante con c), sus ángulos correspondientes son congruentes. Por tanto, por el segundo criterio AA**,** las figuras b) y c) son semejantes.

3.
a) Como $\sphericalangle A = \sphericalangle D$ y $\sphericalangle B = \sphericalangle E$, por el segundo criterio de semejanza AA, los triángulos son semejantes.

b) La razón entre BC y EF es 3 : 5. Por tanto debe cumplirse:

$$\frac{4}{DE} = \frac{3}{5}$$
$$DE = (5)\frac{4}{3}$$
$$DE = \frac{20}{3}$$

4.
Como son semejantes y están a razón 2 : 3, debe cumplirse:

$$\frac{BC}{3} = \frac{2}{3}$$
$$BC = 2$$

también $\frac{AC}{5} = \frac{2}{3}$

$$AC = \frac{10}{3}$$

también $\frac{3}{ED} = \frac{2}{3}$

$$ED = \frac{9}{2}$$

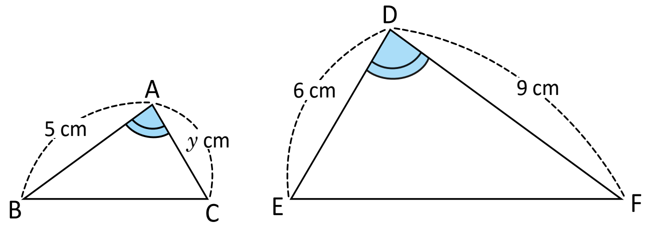
Por tanto,

$BC = 2$, $AC = \frac{10}{3}$, $ED = \frac{9}{2}$.

Tarea: página 110 del Cuaderno de Ejercicios.

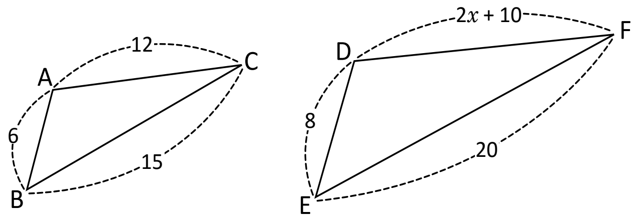
2.5 Practica lo aprendido

1. Los triángulos ABC y DFE cumplen ∢A = ∢D. Determina el valor de y de modo que los dos triángulos sean semejantes.



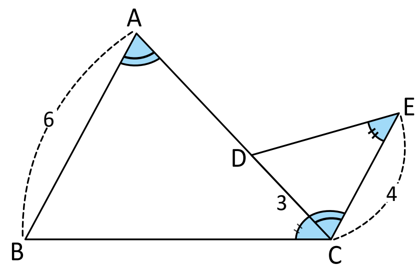
2. ¿Cuál debe ser el valor de x para que se cumpla ΔABC ~ ΔDEF?

$x = -\frac{1}{2}$

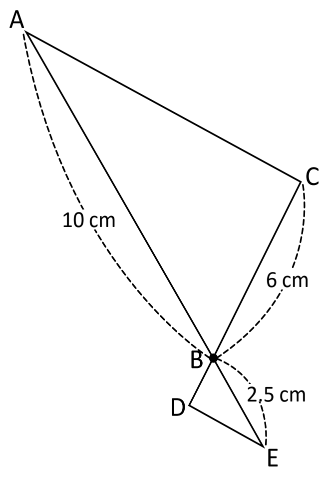


3. Calcula la longitud de $\overline{AD}$ si ∢BAC = ∢ECD y ∢ACB = ∢DEC.

$\overline{AD} = 5$

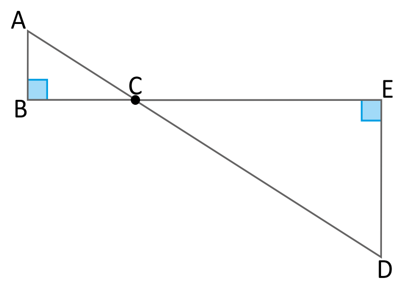


4. En la figura, los segmentos AC y DE son paralelos.
   a) Utiliza criterios de semejanza para comprobar que los triángulos ABC y EBD son semejantes.
   b) ¿Cuál es la longitud de $\overline{BD}$? $BD = \frac{3}{2}$



5. ¿Son semejantes los triángulos ABC y DEC? Justifica tu respuesta.

ΔABC ~ ΔDEC



Indicador de logro

2.5 Resuelve problemas utilizando los tres criterios de semejanza de triángulos.

Solución de algunos ítems:

1.
Los lados correspondientes son:
AB con DF, AC con DE y BC con FE.

También $\frac{AB}{DF} = \frac{5}{9}$.

Luego, $\frac{y}{6} = \frac{5}{9}$

$y = \frac{5}{9}(6)$

$y = \frac{10}{3}$

2.
Se tiene que: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{3}{4}$.

Se cumple, $\frac{2x + 10}{12} = \frac{3}{4}$

$2x + 10 = 9$

$x = -\frac{1}{2}$

3.
Como ∢BAC = ∢ECD y ∢ACB = ∢DEC los triángulos son semejantes, por el segundo criterio de congruencia AA.

$\frac{CD}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{4}{AC} = \frac{1}{2}$

AC = 8

Además, AD = AC – DC = 8 – 3 = 5

Por tanto, AD = 5

4.
a) ∢ABC = ∢EBD por ser opuestos por el vértice.
∢BDE = ∢BCA por ser alternos internos entre paralelas. Luego por el segundo criterio AA, los triángulos ABC y EBD son semejantes.

b) Dado que son semejantes, se cumple:

$\frac{BD}{6} = \frac{2.5}{10}$

$BD = \frac{3}{2}$

5.
Ambos triángulos cuentan con un ángulo de 90°.
Además, ∢BCA = ∢ECD. Por ser opuestos por el vértice.
Luego, por el segundo criterio de semejanza AA, ΔABC ~ ΔDEC.

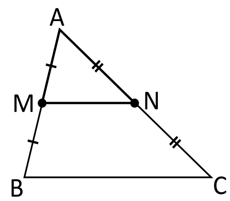
Tarea: página 111 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 3 Semejanza y paralelismo

3.1 Teorema de la base media, parte 1

P

En el triángulo ABC, M y N son los puntos medios de los segmentos AB y CA respectivamente. Utiliza semejanza de triángulos para justificar que $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y $MN = \frac{1}{2}BC$.



Si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$, entonces $AM = \frac{1}{2}AB$ y $NA = \frac{1}{2}CA$.

S

En los triángulos AMN y ABC:

$\frac{AM}{AB} = \frac{NA}{CA} = \frac{1}{2}$ (M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$ respectivamente).

$\sphericalangle MAN = \sphericalangle BAC$ (es compartido por ambos triángulos).

$\Delta AMN \sim \Delta ABC$ (criterio LAL).

$\sphericalangle NMA = \sphericalangle CBA$ (por la semejanza de los triángulos AMN y ABC).

$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ (los ángulos NMA y CBA son ángulos correspondientes entre paralelas).

$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ (razón de semejanza de los triángulos AMN y ABC).

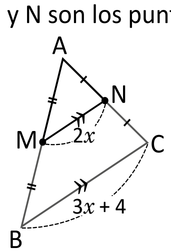
Por lo tanto, $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{BC}$ y $MN = \frac{1}{2}BC$.

C

Teorema de la base media: El segmento que une los puntos medios de dos lados en un triángulo cualquiera es paralelo al tercer lado y su longitud es igual a la mitad del lado al cual es paralelo.

E

¿Cuál es el valor de la incógnita x, si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$ respectivamente?



Cuando dos segmentos son paralelos se coloca el símbolo » sobre los segmentos.

Si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$, entonces $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$. Se sustituyen los valores de los segmentos y se despeja la incógnita x:

$$\frac{2x}{3x+4} = \frac{1}{2}$$
$$4x = 3x + 4$$
$$4x - 3x = 4$$
$$x = 4$$

Por lo tanto, el valor de x es 4.

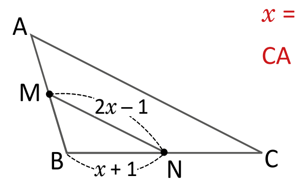
En el triángulo ABC, M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

a) Calcula el valor de x si BC = 8 cm.

b) ¿Cuál es la longitud del lado CA?

$x = 3$

CA = 10



Indicador de logro

3.1 Aplica el teorema de la base media para calcular las longitudes de segmentos.

Secuencia

En la lección 1 se analizaron las condiciones que deben cumplir dos figuras para que sean semejantes, a partir de ellas, en la lección 2 se estudiaron los criterios para que dos triángulos sean semejantes. Para esta lección se utilizan los criterios de semejanza para demostrar algunos teoremas y resultados importantes de la geometría.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar el tercer criterio de semejanza de triángulos LAL para demostrar el teorema de la base media.

En la solución, se escriben paso a paso los elementos de la demostración y a un lado, encerrado entre paréntesis se escribe la justificación de este paso.

Ⓒ Lo esencial es identificar que se cumple la hipótesis del teorema de la base media, ya que el segmento MN une los puntos medios de los lados, entonces al aplicarse este teorema, lo que resulta es una ecuación lineal que da el valor de x.

Solución de algunos ítems:

a) Si BC = 8 entonces BN = 4 (Dado que N es punto medio de BC).
Como BN = 4 entonces x = 3.

b) CA = 2NM
= 2(2x – 1)
= 4x – 2
= 4(3) – 2
= 10.

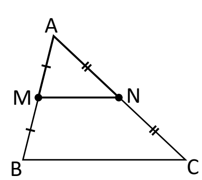
Por tanto, CA = 10.

Posibles dificultades:
Puede que el estudiante no recuerde los pasos de una demostración formal o se le dificulte identificar la hipótesis y conclusión en un enunciado. En este caso, puede utilizar una clase para reforzar este contenido; preferiblemente utilizar las clases 2.5 y 2.6 de la Unidad 4 de octavo grado.

Fecha: **U5 3.1**

Ⓟ M y N son los puntos medios de AB y CA. Justifica que $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ y que MN = $\frac{1}{2}$BC.

Utiliza semejanza de triángulos.



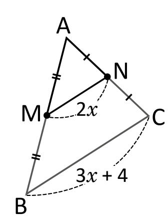
Ⓢ $\frac{AM}{AB} = \frac{NA}{CA} = \frac{1}{2}$ (My N son puntos medios)
∢MAN = ∢BAC
ΔAMN~ΔABC (LAL)
∢NMA = ∢CBA (por la semejanza)
$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ (por ángulos correspondientes)
$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ (razón de semejanza)

Por tanto, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ y MN = $\frac{1}{2}$ BC.

Ⓔ Si M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$, calcula el valor de x.

Se tiene que: $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$

$\frac{2x}{3x+4} = \frac{1}{2}$
$4x = 3x + 4$
$x = 4$



Ⓡ a) x = 3
b) CA = 10

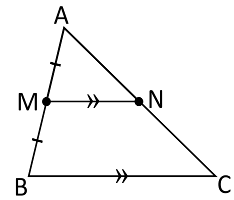
Tarea: página 112 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 3

3.2 Teorema de la base media, parte 2

P

En el triángulo ABC, M es el punto medio del lado $\overline{AB}$. A partir de M se traza un segmento paralelo a $\overline{BC}$ que corta al lado $\overline{CA}$ en el punto N. Utiliza semejanza de triángulos para justificar que N es el punto medio de $\overline{CA}$ y MN = $\frac{1}{2}$ BC.



S

En los triángulos AMN y ABC:

$\measuredangle$MAN = $\measuredangle$BAC (es compartido por ambos triángulos).

$\measuredangle$NMA = $\measuredangle$CBA (ángulos correspondientes entre paralelas).

ΔAMN ~ΔABC (Criterio AA)

$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$ (M es el punto medio de $\overline{AB}$)

$\frac{NA}{CA} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ (razón de semejanza de los triángulos AMN y ABC).

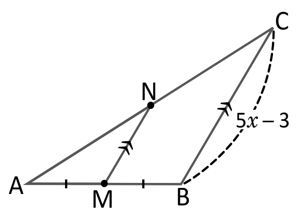
Por lo tanto, N es el punto medio de $\overline{CA}$ y MN = $\frac{1}{2}$ BC.

C

Si por el punto medio de uno de los lados de un triángulo cualquiera, se traza una paralela a un segundo lado, entonces esta paralela corta al tercer lado en su punto medio y su longitud es igual a la mitad del lado al cual es paralela.

E

Calcula el valor de x, si M es punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ y MN = 3.5.



Si M es punto medio $\overline{AB}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ entonces $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$. Sustituyendo los valores correspondientes en lo anterior y despejando x:

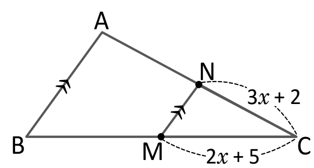
$$\frac{3.5}{5x-3} = \frac{1}{2}$$
$$2(3.5) = 5x - 3$$
$$7 + 3 = 5x$$
$$\frac{10}{5} = x$$
$$x = 2$$

Por lo tanto, el valor de x es 2.

En el triángulo ABC, M es punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{NM} \parallel \overline{AB}$.

a) Calcula el valor de x si CA = 10 cm. $x = 1$

b) ¿Cuál es la longitud del lado BC? BC = 16



Indicador de logro

3.2 Aplica una variante del teorema de la base media para encontrar la longitud de segmentos.

Secuencia

La diferencia de esta clase con la anterior está en las hipótesis del teorema, en la clase 3.1 las hipótesis eran los puntos medios M y N, para esta clase, las hipótesis son: un punto medio M y el segmento paralelo. Lo importante es saber identificar las hipótesis y aplicar los resultados del teorema.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar el segundo criterio de semejanza de triángulos para demostrar el teorema de la base media.

En este caso, lo esencial es identificar que existen dos ángulos congruentes, uno de ellos gracias al paralelismo entre rectas.

Ⓒ Hay que comprender que es posible aplicar el teorema de la base media ya que se cumplen las dos condiciones descritas en la Conclusión.

Solución de algunos ítems:

a) Como M es el punto medio de BC se cumple que:

$$\frac{CN}{CA} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{3x + 2}{10} = \frac{1}{2}$$
$$3x + 2 = 5$$
$$3x = 3$$
$$x = 1$$

b) Como $x = 1$, MC = 7.

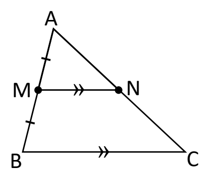
También se cumple que:

$$\frac{MC}{BC} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{7}{BC} = \frac{1}{2}$$
$$BC = 14$$

Fecha:

U5 3.2

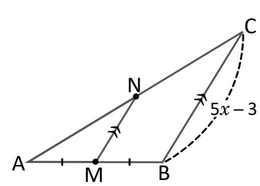
Ⓟ M es punto medio de AB y $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$.
Demuestra que N es punto medio de CA y MN = $\frac{1}{2}$ BC.



Ⓢ ∢MAN = ∢BAC (es compartido).
∢NMA = ∢CBA (son correspondientes).
ΔAMN~ ΔABC (criterio AA).
$\frac{AM}{AB} = \frac{NA}{CA} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$
Por tanto, N es punto medio y MN = $\frac{1}{2}$BC.

Ⓔ Si M es el punto medio de $\overline{AB}$,
$\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ y MN = 3.5, calcula el valor de x.
Por el Teorema de la base media se tiene que

$$\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{3.5}{5x - 3} = \frac{1}{2}$$
$$2(3.5) = 5x - 3$$
$$10 = 5x$$
$$x = 2$$



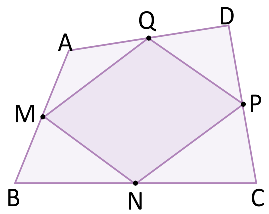
Ⓡ a) $x = 1$
b) BC = 14

Tarea: página 113 del Cuaderno de Ejercicios.

3.3 Paralelogramo inscrito en un cuadrilátero

P

ABCD es un cuadrilátero y M, N, P y Q son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente. Utilizando el teorema de la base media justifica que MNPQ es paralelogramo.



Traza las diagonales del cuadrilátero.

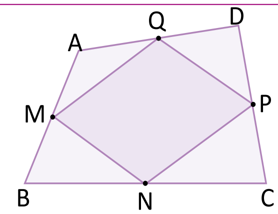
S

Se traza la diagonal $\overline{BD}$ del cuadrilátero:

$\overline{MQ} \parallel \overline{BD}$ (por el teorema de la base media).

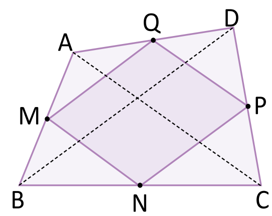
$\overline{BD} \parallel \overline{NP}$ (por el teorema de la base media).

Entonces, $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$.



De forma similar se llega a $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$, al trazar la diagonal $\overline{AC}$ del trapecio.

Por lo tanto, como $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$, MNPQ es paralelogramo.

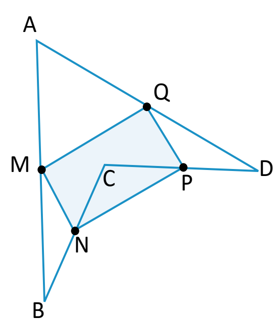


C

Al unir los puntos medios de cada lado de cualquier cuadrilátero, el resultado es un paralelogramo.

Este resultado se conoce como **Teorema de Varignon**.

En el cuadrilátero ABCD, M, N, P y Q son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente. Demuestra que MNPQ es un paralelogramo.



El cuadrilátero ABCD del ejercicio se llama **cuadrilátero cóncavo**, ya que posee un ángulo mayor a 180° ($\sphericalangle$DCB).

Indicador de logro

3.3 Demuestra que los puntos medios de un cuadrilátero cóncavo forman un paralelogramo.

Secuencia

En las dos clases anteriores se estudió cómo aplicar el teorema de la base media, luego de identificar el cumplimiento de ciertas hipótesis. Para esta clase se utiliza dicho teorema para demostrar otro teorema importante que involucra un cuadrilátero y sus puntos medios.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Lo indispensable es identificar que se cumplen las hipótesis del teorema de la base media, los dos puntos medios, por tanto la recta que pasa por ellos es paralela al tercer lado. Se debe tomar en cuenta la pista para que la solución sea más sencilla.

Ⓒ El resultado recibe el nombre de **Teorema de Varignon** y es aplicable para cualquier tipo de cuadriláteros, ya sean cóncavos o convexos.

Solución de algunos ítems:

Se traza la diagonal $\overline{BD}$.
$\overline{NP} \parallel \overline{BD}$ (por el teorema de la base media)
$\overline{BD} \parallel \overline{MQ}$ (por el teorema de la base media)
Entonces, $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$.

Se traza la diagonal $\overline{AC}$.
$\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ (por el teorema de la base media)
$\overline{AC} \parallel \overline{PQ}$ (por el teorema de la base media)
Entonces, $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$.

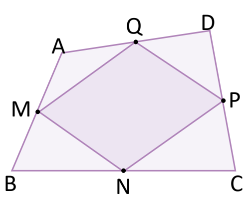
Por tanto, como $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$, el cuadrilátero MNPQ es un paralelogramo.

Posibles dificultades:
Si es necesario, se debe recordar la definición de paralelogramo en un momento breve al principio de la clase.

Fecha: **U5 3.3**

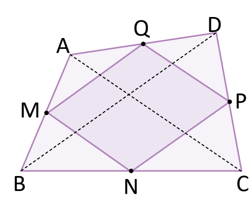
Ⓟ En el cuadrilátero ABCD, M, N, P y Q son los puntos medios. Justifica que MNPQ es un paralelogramo.

Traza las diagonales de ABCD.



Ⓢ Se traza la diagonal $\overline{BD}$.
$\overline{MQ} \parallel \overline{BD}$ (por el teorema de la base media)
$\overline{BD} \parallel \overline{NP}$ (por el teorema de la base media)
Entonces, $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$.

Se traza la diagonal $\overline{AC}$.
$\overline{MN} \parallel \overline{AC}$
$\overline{AC} \parallel \overline{QP}$



Entonces:
$\overline{MN} \parallel \overline{QP}$

Por lo tanto; como $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{QP}$, MNQP es paralelogramo.

Ⓡ Trazar la diagonal $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ y utilizar el teorema de la base media.

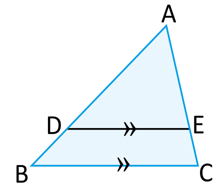
Tarea: página 114 del Cuaderno de Ejercicios.

3.4 Semejanza utilizando segmentos paralalelos, parte 1

P

En el triángulo ABC se traza el segmento DE paralelo al lado BC ($\overline{DE} \parallel \overline{BC}$).
¿Son semejantes los triángulos ADE y ABC? Justifica tu respuesta.

¿Cuál criterio de semejanza de triángulos puedes utilizar?



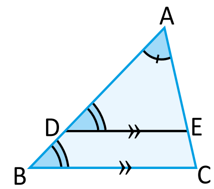
S

En los triángulos ADE y ABC:

∢DAE = ∢BAC (es compartido por ambos triángulos).

∢EDA = ∢CBA (ángulos correspondientes entre paralelas).

Por lo tanto, ΔADE∼ ΔABC (criterio AA).

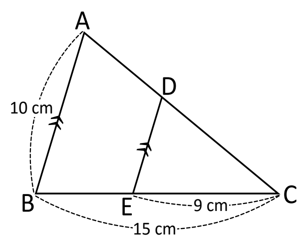


C

En un triángulo cualquiera, todo segmento paralelo a uno de sus lados forma, con los otros dos lados, un triángulo semejante al original y se tiene que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

E

En el triángulo ABC, el segmento DE es paralelo al lado AB, ¿cuál es la longitud de $\overline{DE}$?



Si el segmento DE es paralelo al lado AB, entonces, por el resultado anterior los triángulos DEC y ABC son semejantes. Luego:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC}$$

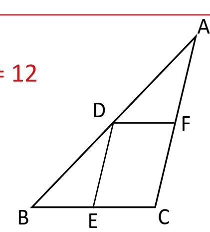
Se sustituyen los valores de AB, EC y BC en lo anterior: $\frac{DE}{10} = \frac{9}{15}$

$$DE = 10\left(\frac{3}{5}\right)$$

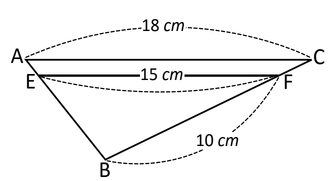
Por lo tanto, la longitud de $\overline{DE}$ es 6 cm.

$$DE = 6$$

1. En el triángulo ABC: $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$.
   a) ¿Qué triángulos de los que se forman son semejantes entre sí? BC = 12
   b) ¿Cuáles segmentos son proporcionales?
   $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{DE} = \frac{DF}{BE}$



2. En el triángulo ABC, FE es paralelo al lado CA, ¿cuál es la longitud del lado BC? $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{DF}{BC}$
   $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$



Indicador de logro

3.4 Calcula las longitudes de segmentos usando el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo.

Secuencia

Desde la clase 3.4 hasta la clase 3.7 se estudian dos teoremas importantes sobre la proporción y paralelismo de segmentos en triángulos, estos teoremas son necesarios para poder enunciar el teorema sobre la proporcionalidad y paralelismo, usualmente conocido con el nombre de **Teorema de Thales**, este es el resultado más importante de esta lección y se utilizará en Bachillerato.
Hay que notar que el teorema de la base media es un caso especial de estos teoremas.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Lo indispensable es identificar que se cumplen las hipótesis del teorema de la base media, los dos puntos medios, por tanto la recta que pasa por ellos es paralela al tercer lado. Se debe tomar en cuenta la pista para que la solución sea más sencilla.

Ⓒ Como los triángulos son semejantes se cumple la proporción entre sus lados. De esta forma, puede agregarse una igualdad más, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, sin embargo, en futuros resultados solo se utilizarán las dos primeras igualdades.

Solución de algunos ítems:

1. a)
Como $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$: $\Delta ABC \sim \Delta ADF$.
Como $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$: $\Delta ABC \sim \Delta DBE$.
Como $\overline{DF} \parallel \overline{BE}$ y $\overline{DE} \parallel \overline{AF}$: $\Delta ADF \sim \Delta DBE$.

b) $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{DF}{BC}$

$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$

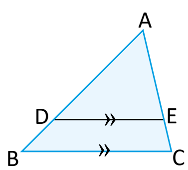
$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{DE} = \frac{DF}{BE}$

2.
Como $\overline{FE} \parallel \overline{CA}$: $\Delta ABC \sim \Delta EBF$.
Luego,

$$\frac{BF}{BC} = \frac{EF}{AC}$$
$$\frac{10}{BC} = \frac{15}{18}$$
$$BC = \frac{180}{15}$$
$$BC = 12 \text{ cm}$$

Fecha: **U5 3.4**

Ⓟ En ΔABC $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. ¿Son semejantes ΔABC y ΔADE?

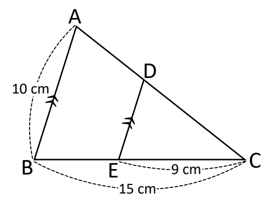


Ⓢ En ΔABC y ΔADE se cumple:
$\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAC$ (es compartido)
$\sphericalangle EDA = \sphericalangle CBA$ (ángulos correspondientes)

Por tanto, $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

Ⓔ En ΔABC, $DE \parallel AB$. ¿Cuánto mide $\overline{DE}$?
Por el resultado anterior $\Delta ABC \sim \Delta DEC$.

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC}$$
$$\frac{DE}{10} = \frac{9}{15}$$
$$DE = 10\left(\frac{3}{5}\right)$$
$$DE = 6 \text{ cm}$$



Ⓡ 1.
a) $\Delta ABC \sim \Delta ADF$
$\Delta ABC \sim \Delta DBE$
$\Delta ABC \sim \Delta DBE$

b) $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{DF}{EC}$

$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$

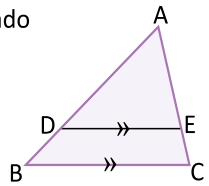
2. BC = 12 cm

Tarea: página 115 del Cuaderno de Ejercicios.

3.5 Semejanza utilizando segmentos paralelos, parte 2

P

En el triángulo ABC, el segmento DE es paralelo al lado BC. Comprueba que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.



Sustituye AB por AD + DB y AC por AE + EC.

S

Por el resultado de la clase anterior se tiene que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$ Sustituir AB por AD + DB y AC por AE + EC,

$1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$

$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$ restando 1 de ambos lados,

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ tomando el recíproco de ambos lados.

Las siguientes proposiciones son equivalentes (una implica las otras):

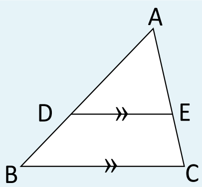
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},\ \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},\ \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}.$$

C

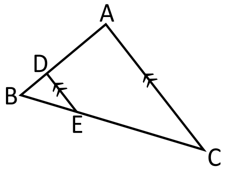
Teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo.

En el ΔABC, si DE∥BC entonces se tiene que

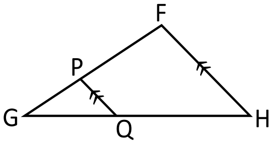
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}\ ,\ \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



1. Calcula la longitud de $\overline{EC}$ en el triángulo ABC, si BD = 4 cm, DA = 10 cm y BE = 6 cm.
   EC = 15



2. En el triángulo FGH $\overline{PQ} \parallel \overline{FH}$. Calcula la longitud del lado FG, si PG = 6 cm, GQ = 8 cm y QH = 12 cm.
   FG = 15



Unidad 5

Indicador de logro

3.5 Aplica el teorema de la base media para calcular las longitudes de segmentos.

Secuencia

En la clase 3.4 se estudió que en cualquier triángulo, un segmento paralelo a uno de los lados forma con los otros dos un triángulo semejante y se puede establecer una relación de proporcionalidad entre los lados del triángulo. Para esta clase, se establece el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo, para ello se utiliza el resultado visto en la clase anterior, este teorema se utilizará nuevamente en la clase 3.8 para establecer otro teorema importante.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Se trata de que el alumno observe que se cumplen las hipótesis del resultado de la clase anterior, para que así pueda utilizarlo.

Observación: Es necesario recordar que el recíproco de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.

Ⓒ Además de lo establecido anteriormente, el teorema también establece, la proporción de los segmentos que quedan delimitados por los segmentos paralelos.

Solución de algunos ítems:

1.
Por el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo:

$$\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$$
$$\frac{4}{10} = \frac{6}{EC}$$
$$4EC = 10 \times 6$$
$$EC = 15 \text{ cm}$$

En los ítems anteriores, el estudiante debería justificar el uso del teorema, a partir de que se cuenta con dos segmentos paralelos, es decir, el cumplimiento de la hipótesis.

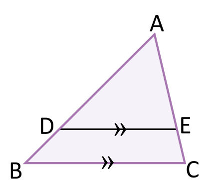
2.
Por el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo:

$$\frac{FG}{PG} = \frac{HG}{QG}$$
$$\frac{FG}{6} = \frac{20}{8}$$
$$FG = \frac{120}{8}$$
$$FG = 15 \text{ cm}$$

También se puede utilizar $\frac{GP}{PF} = \frac{GQ}{QH}$.

Fecha: **U5 3.5**

Ⓟ En la figura $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.
Comprueba que $\frac{AD}{DB} = \frac{EC}{BE}$.



Ⓢ Por el resultado de la clase anterior:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{EC}{BE}$$

$$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$$ Sustituir AD y AC

$$1 + \frac{AD}{DB} = 1 + \frac{EC}{BE}$$

$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$ Restando 1

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$ Por el recíproco

Ⓡ 1. Por el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo:

$$\frac{BD}{DA} = \frac{DE}{EC}$$
$$\frac{4}{10} = \frac{6}{EC}$$
$$4EC = 10 \times 6$$
$$EC = 15 \text{ cm}$$

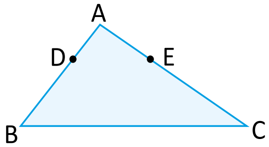
2. FG = 15 cm

Tarea: página 116 del Cuaderno de Ejercicios.

3.6 Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 1

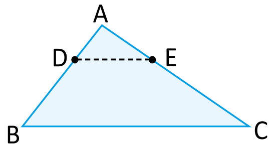
P

En el triángulo ABC, los puntos D y E están sobre $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, de tal forma que satisfacen $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Utiliza semejanza de triángulos para justificar que $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$.



S

Se traza $\overline{DE}$ para formar el triángulo ADE.



En los triángulos ADE y ABC:

$\sphericalangle$DAE = $\sphericalangle$BAC (es compartido por ambos triángulos).

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (lo indica el enunciado del problema).

ΔADE ~ ΔABC (criterio LAL).

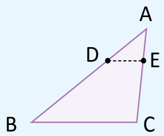
$\sphericalangle$EDA = $\sphericalangle$CBA (por la semejanza de los triángulos ADE y ABC).

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (los ángulos EDA y CBA son ángulos correspondientes).

Por lo tanto, $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$.

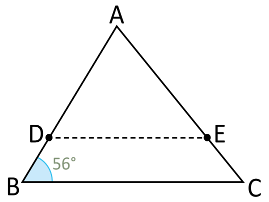
C

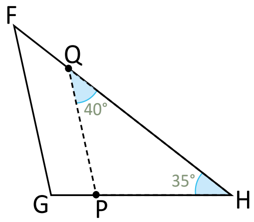
Dado un triángulo ABC, si D y E son puntos sobre los lados AB y AC, respectivamente, tales que satisfacen $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



1. En el triángulo ABC, los puntos D y E están sobre los lados AB y AC respectivamente, y satisfacen $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. ¿Cuál es la medida del $\sphericalangle$EDA? Justifica tu respuesta.

   $\sphericalangle$EDA = 56°



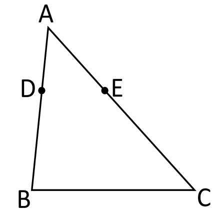


2. En el triángulo FGH, los puntos P y Q están sobre los lados HG y HF respectivamente, y satisfacen $\frac{HP}{HG} = \frac{HQ}{HF}$, ¿cuál es la medida del $\sphericalangle$HGF? Justifica tu respuesta.

   $\sphericalangle$HGF = 105°

3. En el triángulo ABC, los puntos D y E están sobre AB y AC respectivamente, y satisfacen $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Comprueba que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

   Sustituye DB por AB – AD y EC por AC – AE



Indicador de logro

3.6 Calcula la medida de ángulos identificando segmentos paralelos a los lados de un triángulo.

Secuencia

En las dos clases anteriores se estableció el teorema sobre segmentos paralelos, cuya hipótesis es el paralelismo de los segmentos y su conclusión la proporcionalidad entre los segmentos que quedan delimitados. En las clases 3.6 y 3.7 se estudia el teorema sobre segmentos proporcionales, el cual tiene como hipótesis los lados proporcionales y como conclusión el paralelismo entre lados. Matemáticamente este teorema es una doble implicación, pero por razones didácticas ambas implicaciones se estudian por separado.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Es fundamental identificar, en un primer momento la hipótesis del enunciado para luego poder identificar el criterio de semejanza que se puede utilizar para probar la semejanza de los triángulos.

Ⓒ Lo primordial es observar que solo se necesita conocer dos lados proporcionales de ambos triángulos para establecer el paralelismo.

Solución de algunos ítems:

1.
Dado que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ puede aplicarse el resultado visto anteriormente, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. De ahí que, $\measuredangle EDA = \measuredangle CBA$, por ser ángulos correspondientes entre paralelas.
Por lo tanto, $\measuredangle EDA = 56°$.

2.
Aplicando el resultado anterior:
$\overline{FG} \parallel \overline{PQ}$, entonces $\measuredangle HQP = \measuredangle HFG = 40°$.
Completando los ángulos internos de ΔFGH.

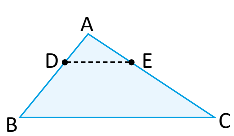
$$\begin{aligned} \measuredangle HFG + 40° + 35° &= 180° \\ \measuredangle HFG &= 180° - 75° \\ \measuredangle HFG &= 105° \end{aligned}$$

3.
Solución:
Sustituyendo según se indica.

$$\begin{aligned} \frac{AD}{AB - AD} &= \frac{AE}{AC - AE} \\ \frac{AB - AD}{AD} &= \frac{AC + AE}{AE} && \text{(por el recíproco)} \\ \frac{AB}{AD} - 1 &= \frac{AC}{AE} - 1 \\ \frac{AB}{AD} &= \frac{AC}{AE} && \text{(sumando 1)} \\ \frac{AD}{AB} &= \frac{AE}{EC} && \text{(por el recíproco)} \end{aligned}$$

Fecha: **U5 3.6**

Ⓟ En el ΔABC se satisface que $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}$.
Justifica que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



Ⓢ Trazando DE, se forma ΔADE.

$\measuredangle DAE = \measuredangle BAC$ (es compartido)

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (por enunciado)

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (criterio LAL)

$\measuredangle EDA = \measuredangle CBA$ (por la semejanza anterior)

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (ángulos correspondientes iguales)

Por lo tanto, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Ⓡ 1. Aplicando el resultado anterior:

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (ya que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$)

$\measuredangle EDA = \measuredangle CBA$ (son correspondientes)

Por lo tanto, $\measuredangle EDA = 56°$.

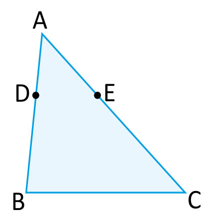
2. $\measuredangle HFG = 105°$.

Tarea: página 117 del Cuaderno de Ejercicios.

3.7 Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 2

P

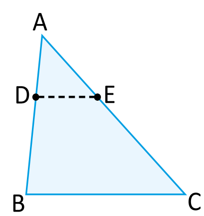
En el triángulo ABC, los puntos D y E están sobre AB y AC respectivamente, de tal forma que satisfacen $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Utiliza semejanza de triángulos para justificar que $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$.



S

Si $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ entonces también se cumple $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

De lo visto en la clase anterior, DE||BC

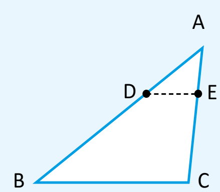


C

Teorema sobre segmentos proporcionales en un triángulo
En un triángulo ABC, D y E son puntos sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente.

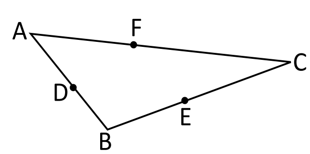
a) Si $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

b) Si $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

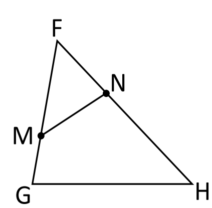


1. En el triángulo ABC se cumple lo siguiente: $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$ y $\frac{CF}{FA} = \frac{CE}{EB}$.

   a) ¿Cuál de los segmentos que se forman con los puntos D, E y F es paralelo al lado AC? Justifica tu respuesta. $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$
   b) ¿Cuál de los segmentos que se forman con los puntos D, E y F es paralelo al lado AB? Justifica tu respuesta. $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$
   c) ¿Es $\overline{DF}$ paralelo a $\overline{BC}$?
   No se puede asegurar el paralelismo



2. En el triángulo FGH se cumple lo siguiente: $\frac{FM}{FH} = \frac{FN}{FG}$. ¿Es el triángulo FNM semejante al triángulo FGH? Justifica tu respuesta.
   $\Delta FNM \sim \Delta FGH$



Indicador de logro

3.7 Determina segmentos paralelos en un triángulo, dada su proporcionalidad de segmentos.

Secuencia

Para esta clase se extiende el resultado visto en la clase anterior, estableciendo el teorema sobre segmentos proporcionales en un triángulo, el cual dice que si existen dos puntos sobre los lados del triángulo, de forma que existe proporción por todos los segmentos correspondientes delimitados por los puntos es paralelo al tercer lado.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Lo importante es identificar que al ser los segmentos proporcionales, únicamente se necesita el ángulo entre ellos para poder utilizar el primer criterio de semejanza y posteriormente establecer los lados paralelos, utilizando los resultados de semejanza.

Solución de algunos ítems:

1.

a) DF y EF no son paralelos a AC ya que lo cortan en un punto.
Luego, $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ ya que $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$ y se cumple el teorema sobre segmentos proporcionales.

b) FD no es paralelo a AB ya que lo corta en un punto.
Luego, $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$ ya que, $\frac{CF}{FA} = \frac{CE}{EB}$ y se cumple el teorema sobre segmentos proporcionales.

c) No se puede asegurar el paralelismo de DF con BC ya que no se tiene información sobre la proporcionalidad de los segmentos delimitados.

2.

De la figura se observa que:

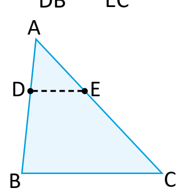
$\sphericalangle MFN = \sphericalangle HFG$ (es compartido)

Además, $\frac{FM}{FH} = \frac{FN}{FG}$ (del enunciado)

Por tanto, utilizando el primer criterio de semejanza LAL, $\Delta FNM \sim \Delta FGH$.

Fecha: **U5 3.7**

P En ΔABC se satisface que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.
Justifica que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.



S Si $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ también $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.
Prueba:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$
$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$
$$\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$$
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{EC}$$

Por tanto, del resultado de la clase anterior $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

R 1.
a) $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$
b) $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$
c) No se puede asegurar el paralelismo

2.
$\Delta FNM \sim \Delta FGH$ (criterio LAL).

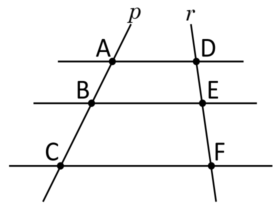
Tarea: página 118 del Cuaderno de Ejercicios.

3.8 Paralelismo dados segmentos proporcionales, parte 3

P

Las rectas p y r son cortadas por tres rectas paralelas como se muestra en la figura.

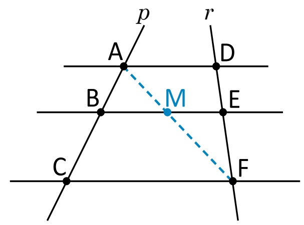
Demuestra que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.



Traza el segmento AF y utiliza el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo.

S

Se traza el segmento AF y se denota por M al punto de intersección entre $\overline{AF}$ y $\overline{BE}$.



En el triángulo ACF por el teorema sobre segmentos paralelos, se tiene que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MF}$$

En el triángulo AFD por el teorema sobre segmentos paralelos se tiene que

$$\frac{FM}{MA} = \frac{FE}{ED}$$

Tomando el recíproco de ambos lados, $\frac{MA}{FM} = \frac{ED}{FE}$.

Por lo tanto, $\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MF} = \frac{MA}{FM} = \frac{ED}{FE} = \frac{DE}{EF}$.

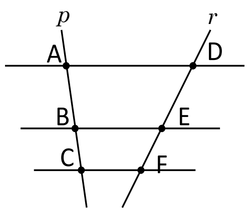
C

Teorema sobre la proporcionalidad y el paralelismo

Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, entonces los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.

Este resultado es conocido como el Teorema de Thales.

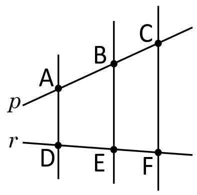
1. Las rectas p y r son cortadas por tres rectas paralelas como se muestra en la figura.
   a) ¿Cuáles segmentos son proporcionales?
   b) Demuestra que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$.



$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$ y también $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$.

2. Las rectas p y r son cortadas por tres paralelas como se muestra en la figura. Si AB = 3, DE = 2 y EF = 1, ¿cuál es el valor de BC?

$BC = \frac{3}{2}$



Indicador de logro

3.8 Demuestra el teorema sobre proporcionalidad y paralelismo.

Secuencia

Para esta clase se utiliza el teorema sobre segmentos paralelos visto en la clase 3.5 para demostrar el teorema sobre proporcionalidad y paralelismo, que es útil para futuros contenidos, en bachillerato.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Al utilizar la pista que se da en el libro, lo esencial es observar que se forman dos triángulos donde se puede aplicar el teorema sobre segmentos paralelos.

Comúnmente, este teorema también es conocido como **Teorema de Thales.** Es posible que al consultar otros textos, se le nombre de esta forma.

Solución de algunos ítems:

1.
a) En la figura se cumple que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$
y también $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$ y $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$.

b) Del literal anterior se tiene
$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.
Luego, AB(EF) = BC(DE).
Entonces $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, que es lo que se quería demostrar.

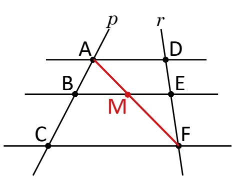
2.
Como p y r son cortadas por rectas paralelas, podemos aplicar el teorema sobre proporcionalidad y paralelismo.
De esta forma:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$
$$\frac{3}{BC} = \frac{2}{1}$$
$$\frac{BC}{3} = \frac{1}{2} \text{ (por el recíproco)}$$
$$BC = \frac{3}{2}$$

Fecha: **U5 3.8**

Ⓟ p y r son cortadas por tres rectas paralelas.
Demuestra que: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

Traza AF y utiliza el teorema de la clase 3.5



Ⓢ Denotando por M la intersección entre $\overline{AF}$ y $\overline{BE}$.
Por el teorema sobre segmentos paralelos.
En ΔACF: $\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MF}$
En ΔACF: $\frac{MF}{AM} = \frac{EF}{DE}$

$\frac{AM}{MF} = \frac{AE}{EF}$ (utilizando el recíproco)

Por tanto:
$\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MF} = \frac{DE}{EF}$ y también $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

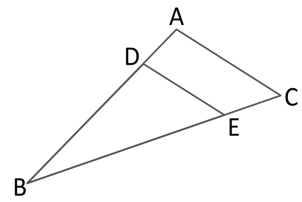
Ⓡ 1.
a) $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ y también $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$
b) Sugerencia: transformar
$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ en AB(EF) = BC(DE)
2. BC = $\frac{3}{2}$

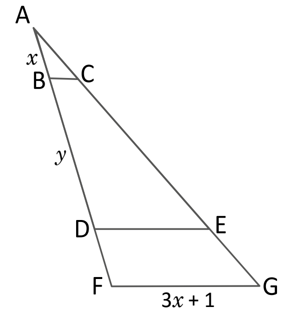
Tarea: página 119 del Cuaderno de Ejercicios.

3.9 Practica lo aprendido

1. Calcula la longitud de $\overline{DE}$ si $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$, AC = 2, BD = 3 y DA = 1.

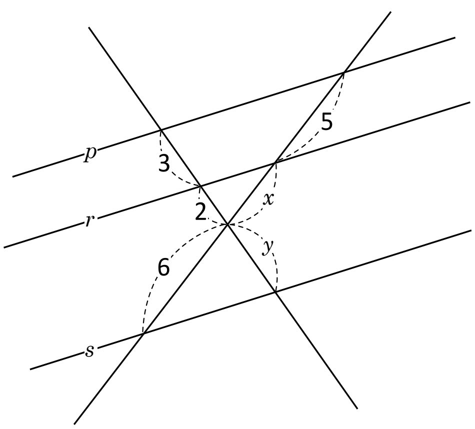
   DE = $\frac{3}{2}$





2. En el ΔAFG se cumple: $\overline{BC} \parallel \overline{DE} \parallel \overline{FG}$. Calcula los valores de x y y si BC = 0.8 cm, DE = 3 cm y AF = 5 cm.

   $x = 1$ y $y = \frac{11}{4}$

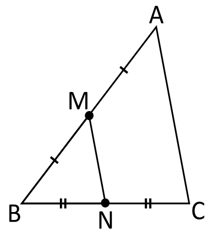


3. Las rectas p, r y s son paralelas. Calcula los valores de x y y.

   $x = \frac{10}{3}$ y $y = \frac{18}{5}$

4. En el triángulo ABC de la figura, M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si el perímetro del triángulo MBN es 8, ¿cuál es el perímetro de ΔABC?

   El perímetro de ΔABC es 16.



Unidad 5

Indicador de logro

3.9 Calcula la medida de segmentos utilizando los teoremas sobre segmentos paralelos.

Solución de algunos ítems:

1\.
Como se cumple que $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$, se puede aplicar el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo.

$$\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}$$

Pero, BA = BD + DA = 3 + 1 = 4

$\frac{3}{4} = \frac{DE}{2}$ (sustituyendo los valores)

$$DE = \frac{3}{2}$$

2\.
Como $\overline{BC} \parallel \overline{FG}$. Se puede aplicar el teorema sobre segmentos paralelos en los triángulos AFG y ABC, entonces:

$$\frac{AB}{AF} = \frac{BC}{FG}$$

$$\frac{x}{5} = \frac{0.8}{3x + 1}$$

$$3x^2 + x = 4$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 3 \times (-4)}}{6}$$

$$x = \frac{-1 \pm 7}{6}, x = 1, -\frac{4}{3}$$

La solución negativa se elimina porque se está trabajando con la longitud de segmentos, por tanto $x = 1$.

Como $\overline{DE} \parallel \overline{FG}$, se cumple que:

$$\frac{AD}{AF} = \frac{DE}{FG}$$

$$\frac{x + y}{5} = \frac{3}{3x + 1}$$

$$\frac{y + 1}{5} = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{15}{4} - 1$$

$$y = \frac{11}{4}$$

Por tanto, $x = 1$ y $y = \frac{11}{4}$.

Observación: Por su dificultad, indicar que este ítem se resuelva por último.

3\.
Aplicando el teorema sobre segmentos paralelos en un triángulo, a p y r.

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{5}$$

$$x = \frac{10}{3}$$

Aplicando el teorema sobre proporcionalidad y paralelismo.

$$\frac{y + 2}{3} = \frac{6 + x}{5}$$

$$y + 2 = \frac{18 + 3x}{5}$$

$y + 2 = \frac{18 + 10}{5}$, sustituyendo x

$$y = \frac{28}{5} - 2$$

$$y = \frac{18}{5}$$

4\.

Como M y N son puntos medios se cumple que $MN = \frac{1}{2}AC$.

Y como el perímetro es la suma de los lados, se tiene que:

$$BM + BN + MN = 8$$

$$\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AC = 8$$

$$\frac{1}{2}(AB + BC + AC) = 8$$

$AB + BC + AC = 16$. Que es el perímetro de ΔABC.

Tarea: página 120 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 4 Aplicaciones de semejanza y triángulos semejantes

4.1 Distancia entre puntos sobre un mapa

P

Ana señala dos puntos sobre un mapa de San Salvador y mide con una regla la distancia entre ellos. Obteniendo como resultado 6 cm. Si el mapa se encuentra a una escala numérica de 1:50 000, ¿cuál es la distancia real entre los dos lugares señalados?

La escala numérica indica que un centímetro en el mapa equivale a 50 000 centímetros en la realidad.

S

Se denota x la distancia real entre los dos lugares. Entonces:

$$\frac{6}{x} = \frac{1}{50\,000}$$

Se despeja x de la ecuación anterior: $6(50\,000) = x$

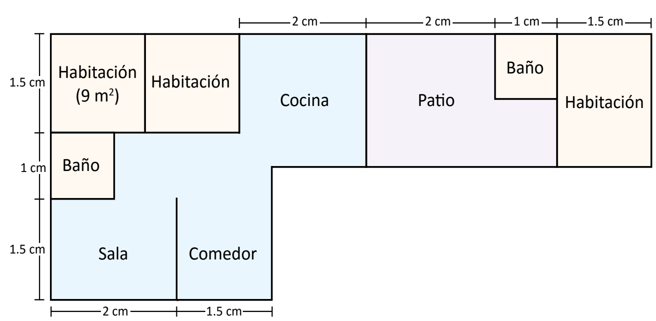
$$x = 300\,000$$

La distancia entre el Monumento al Divino Salvador del Mundo y la Universidad de El Salvador es 300 000 cm o 3 km.

1. ¿A qué escala se encuentra elaborado el siguiente mapa de El Salvador, si la distancia real entre Santa Ana y San Salvador es 48 km y el segmento trazado sobre el mapa mide 1.5 cm?

Ambas medidas deben estar en el mismo sistema de unidades.

2. En el siguiente plano:
   a) ¿Cuál es la escala?
   b) ¿Cuál es el área (en m²) del patio?
   c) ¿Cuál es el área total?



Para conocer la escala mide con una regla las longitudes del dibujo.

Indicador de logro

4.1 Encuentra la distancia entre dos puntos sobre un mapa, utilizando la proporcionalidad entre segmentos, para conocer la escala real.

Secuencia

En las lecciones anteriores se estudiaron todos los conceptos relativos a la semejanza de figuras, más específicamente a la semejanza de triángulos, los criterios para establecer semejanza entre dos triángulos y algunos teoremas importantes que se pueden obtener utilizando semejanza. En esta lección se trabajan problemas de aplicación que involucren la semejanza, ya sean problemas del contexto o aplicados en la misma matemática.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Al escribir 1 : 50 000 se refiere a la forma lineal de escribir una razón y se debe leer, "por cada centímetro del mapa hay 50 000 centímetros en la realidad". Lo importante es identificar el dato desconocido, la distancia real entre ambos puntos, posteriormente resolver la proporción para encontrarlo. Puede hacerse una conversión a km dividiendo por 100 000.

Solución de algunos ítems:

2.

a) Al medir con una regla, los lados de la habitación son de 1.5 cm cada lado.
La medida real de la habitación es de 3 m en cada lado.
Entonces la escala sería:

$$\frac{1.5}{300} = \frac{15}{3\,000} = \frac{1}{200}$$

b) El área del patio se puede encontrar restando el área del baño al área del rectángulo morado.

Todos los lados del baño miden 1 cm.
Sea x la medida real del lado del baño: $\frac{1}{x} = \frac{1}{200}$, entonces $x = 200$ cm = 2 m.
Por lo tanto, el área es:

$$2 \text{ m} \times 2 \text{ m} = 4 \text{ m}^2.$$

Los lados del rectángulo de color morado miden, 2 cm de alto y 3 cm de largo.
Sea x y y la medida real de los lados.
$\frac{2}{x} = \frac{1}{200}$, entonces $x = 400$ cm = 4 m.
$\frac{3}{y} = \frac{1}{200}$, entonces $x = 600$ cm = 6 m.

El área es $4 \times 6 = 24$ m^2 y el área del patio es $24 - 4 = 20$ m^2.

Fecha: **U5 4.1**

Ⓟ La distancia entre dos puntos marcados en un mapa es 6 cm. Si el mapa se encuentra a una escala 1 : 50 000.

¿Cuál es la distancia real entre los puntos?

Ⓢ La distancia entre los dos puntos es:

$$\frac{6}{x} = \frac{1}{50\,000}$$

$x = 6(50\,000)$ Despejando x

$x = 300\,000$ cm

La distancia entre los puntos es 3 km o 300 000 cm.

Ⓡ 1.
48 km equivale a 4 800 000 cm.
La escala sería:

$$\frac{1.5}{4\,800\,000} = \frac{15}{4\,800\,000} = \frac{1}{3\,200\,000}$$

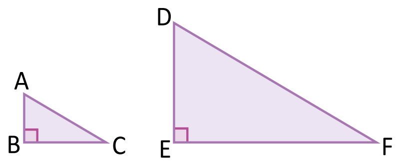
La escala del mapa es 1 : 3 200 000.

Tarea: página 121 del Cuaderno de Ejercicios.

4.2 Áreas de polígonos semejantes

P

Los triángulos ABC y DEF son semejantes a razón 1:3. ¿Cuál es la razón entre las áreas del ΔABC y ΔDEF?



El área de un triángulo es:

$$\frac{(base)(altura)}{2}$$

S

El área del triángulo ABC es $\frac{(BC)(AB)}{2}$, y la del triángulo DEF es $\frac{(EF)(DE)}{2}$. Entonces, la razón entre las áreas se calcula:

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{\frac{(BC)(AB)}{2}}{\frac{(EF)(DE)}{2}}$$

$$= \frac{(BC)(AB)}{(EF)(DE)}$$

$$= \left(\frac{BC}{EF}\right)\left(\frac{AB}{DE}\right)$$

(ABC) Indica el área del triángulo ABC. Entonces, $\frac{(ABC)}{(DEF)}$ es la razón entre las áreas de los triángulos ABC y DEF.

Por hipótesis, $\frac{BC}{EF} = \frac{1}{3}$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{1}{3}$. Se sustituyen en la razón entre áreas:

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Por lo tanto, la razón entre las áreas de ΔABC y ΔDEF es igual a $\frac{1}{9}$ (el cuadrado de la razón de semejanza).

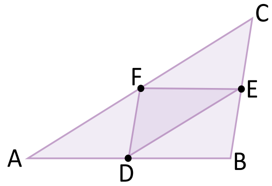
C

La razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

1. La razón entre dos triángulos semejantes es 2:3, ¿cuál es la razón entre sus áreas? $\frac{4}{9}$

2. En el triángulo ABC, D, E y F son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, ¿cuál es la razón entre las áreas del triángulo ABC y el triángulo DEF?

   $\frac{(ABC)}{(DEF)} = 4$



Indicador de logro

4.2 Utiliza la razón entre dos triángulos semejantes para encontrar la razón entre sus áreas.

Secuencia

En la clase anterior se estudió una aplicación de la semejanza de triángulos al uso de mapas y planos. Para esta clase se estudia una aplicación matemática al área de figuras semejantes.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ, Es importante entender que cuando se escribe que los triángulos son semejantes a razón 1 : 3, significa que sus lados correspondientes están a razón 1 : 3. Es importante recordar que la notación (ABC), se utiliza para expresar el área del triángulo ABC.

Se debe observar del problema anterior que la razón entre las áreas resulta en el cuadrado de la razón entre los lados. Es importante mencionar que este enunciado es cierto para todo triángulo o cualquier figura plana.

Solución de algunos ítems:

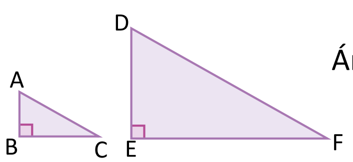
1.
Por el enunciado descrito en la Conclusión.

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

2.
Por el teorema de la base media, se tiene que DE = $\frac{1}{2}$CA, FD = $\frac{1}{2}$BC y que EF = $\frac{1}{2}$AB. Luego, ΔABC ~ ΔEDF (por el criterio LLL) y la razón de semejanza es 2 : 1. Por lo tanto, $\frac{(ABC)}{(DEF)} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$.

Fecha: **U5 4.2**

Ⓟ Los triángulos ABC y DEF están a razón 1 : 3. ¿Cuál es la razón entre las áreas?



Área del triángulo: $\frac{(\text{base})(\text{altura})}{2}$

Ⓢ Área de ABC: $\frac{(BC)(AB)}{2}$

Área de DEF: $\frac{(EF)(DE)}{2}$

$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \frac{(AB)(BC)}{2} \div \frac{(EF)(DE)}{2}$$
$$= \frac{(BC)(AB)}{(EF)(DE)}$$
$$= \left(\frac{BC}{EF}\right)\left(\frac{AB}{DE}\right)$$

Por hipótesis $\frac{BC}{EF} = \frac{1}{3}$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{1}{3}$.

Sustituyendo:
$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
Por tanto la razón entre las áreas es $\frac{1}{9}$.

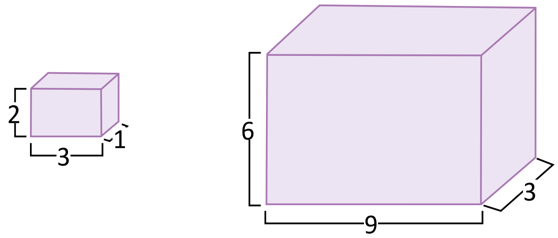
Ⓡ 1.
Por el enunciado descrito en la conclusión:
$$\frac{(ABC)}{(DEF)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$
2. 4

Tarea: página 123 del Cuaderno de Ejercicios.

4.3 Volumen de sólidos semejantes

P

Los prismas rectangulares de la figura son semejantes. Encuentra la razón entre los volúmenes.



El volumen de un prisma rectangular se calcula: (altura)(largo)(ancho).

S

Se denota por V_1 el volumen del prisma pequeño y por V_2 el volumen del prisma grande. Entonces:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(2)(3)(1)}{(6)(9)(3)}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

Al simplificar lo anterior se obtiene:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

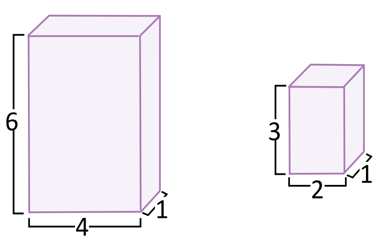
Por lo tanto, la razón entre los volúmenes del prisma pequeño y del grande es $\frac{1}{27}$.

C

La razón entre los volúmenes de dos sólidos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza.

1. ¿Son semejantes los siguientes prismas rectangulares? Justifica tu respuesta.

La razones entre sus lados correspondientes son diferentes, por lo tanto no son semejantes



2. Dos cilindros circulares rectos son semejantes a razón 1:4, ¿cuál es la razón entre sus volúmenes?

La razón entre volúmenes es $\frac{1}{64}$

Indicador de logro

4.3 Utiliza la semejanza de sólidos para encontrar la razón de semejanza entre sus volúmenes.

Secuencia

Utilizando la fórmula para encontrar el volumen de un prisma, debe establecerse la razón entre ambos y luego simplificar y realizar los productos. Es importante observar que la razón entre los volúmenes es el cubo de la razón entre los lados.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ, Utilizando la fórmula para encontrar el volumen de un prisma, debe establecerse la razón entre ambos y luego simplificar y realizar los productos. Es importante observar que la razón entre los volúmenes es el cubo de la razón entre los lados.

Ⓒ Lo importante es indicar que este resultado se cumple para todos los prismas o sólidos semejantes.

Solución de algunos ítems:

Aplicando el enunciado de la conclusión, se tiene que la razón de volúmenes es $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$.

Para comprobar la conclusión en el caso de los cilindros, se calcula como sigue:

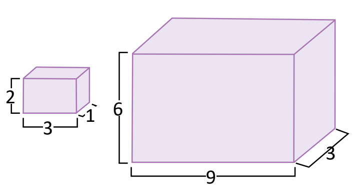
El volumen de un cilindro circular recto es:
π × (radio)^2 × (altura).

La razón entre los radios es 1 : 4 y la altura también están a razón 1 : 4.
Sean los volúmenes:

$$V_1 = \pi r_1 h_1$$
$$V_2 = \pi r_2 h_2$$
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r_1^2 h_1}{\pi r_2^2 h_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^3$$
$$= \frac{1}{64}$$

Fecha: **U5 4.3**

Ⓟ Los siguientes prismas son semejantes. Encuentra la razón entre los volúmenes.



Ⓢ V_1: Volumen del prisma pequeño.
V_2: Volumen del prisma grande.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(2)(3)(1)}{(6)(9)(3)}$$
$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Por lo tanto, la razón entre los volúmenes es $\frac{1}{27}$.

Ⓡ 1.
La razón entre sus lados son diferentes, por lo tanto no son semejantes.

2. $\frac{1}{64}$

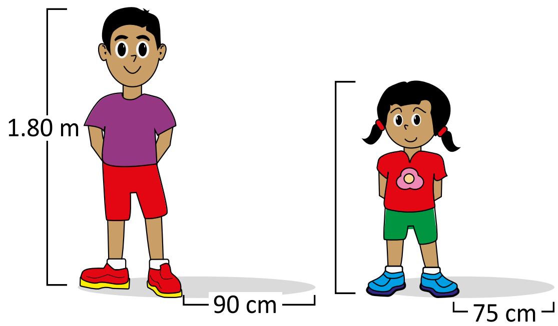
Tarea: página 124 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 4

4.4 Problemas que se resuelven utilizando semejanza de triángulos

P

A cierta hora del día, José y Marta se colocan de pie en el patio de su escuela. José proyecta una sombra de 90 cm de longitud, mientras que la sombra de Marta mide 75 cm de longitud. Si la estatura de José es 1.80 m, ¿cuál es la estatura de Marta?

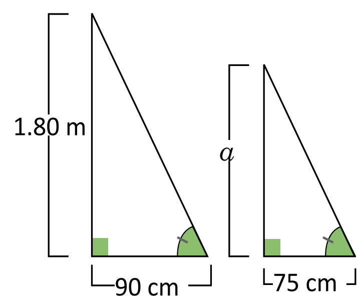


En una misma hora, las alturas de dos objetos son proporcionales a sus sombras.

S

Con las estaturas de ambos y las longitudes de las sombras pueden formarse dos triángulos rectángulos semejantes (por el criterio AA). Primero, se convierte a centímetros la estatura de José:

$$1.80 \text{ m} = 180 \text{ cm}$$



Se denota por a la estatura en cm de Marta. Por ser triángulos semejantes:

$$\frac{a}{180} = \frac{75}{90}$$

Se despeja a de la ecuación anterior:

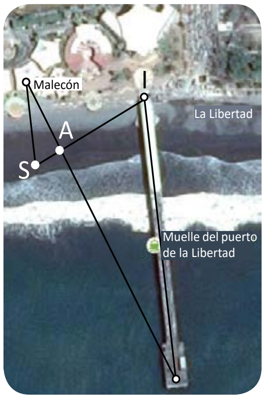
$$a = 180\left(\frac{75}{90}\right)$$

$$a = 150$$

Por lo tanto, la estatura de Marta es 150 cm o 1.50 m.

1. ¿Cuál es la altura de la torre del Ministerio de Gobernación, si a determinada hora del día proyecta una sombra de 40 m mientras que un hombre de 1.82 m de estatura proyecta una sombra de 1.40 m a esa misma hora? 52 m

2. Antonio (A) se encuentra en la playa a 24 m de un salvavidas (S). Si la distancia entre el Malecón y el salvavidas es 60 m y la longitud del muelle es 200 m, ¿cuál es la distancia entre Antonio y el inicio del muelle (I)? 80 m



En la figura, el segmento que une el Malecón con el punto S es paralelo al muelle.

Unidad 5

Indicador de logro

4.4 Resuelve problemas aplicados utilizando los conocimientos sobre figuras semejantes.

Secuencia

Utilizando la fórmula para encontrar el volumen de un prisma, debe establecerse la razón entre ambos y luego simplificar y realizar los productos. Es importante observar que la razón entre los volúmenes es el cubo de la razón entre los lados.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ, Utilizando la fórmula para encontrar el volumen de un prisma, debe establecerse la razón entre ambos y luego simplificar y realizar los productos. Es importante observar que la razón entre los volúmenes es el cubo de la razón entre los lados.

Ⓒ Lo importante es indicar que este resultado se cumple para todos los prismas o sólidos semejantes.

Solución de algunos ítems:

1.
Como las alturas son proporcionales a las sombras y nombrando por a la altura de la torre.

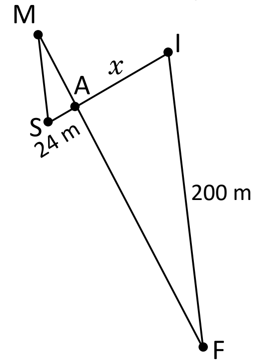
$$\frac{a}{1.82} = \frac{40}{1.40}$$
$$a = \frac{40}{1.40}(1.82)$$
$$a = 52 \text{ m}$$

2.
Según la información adicional los lados son paralelos. Sea M el punto donde se encuentra el malecón, I el punto de inicio del muelle y F el punto final del muelle.
∢SMA = ∢AFI (por ser alternos internos). ∢MAS = ∢FAI (son opuestos por el vértice).

Por el criterio AA, los triángulos son semejantes y se tiene que:

$$\frac{x}{24} = \frac{200}{60}$$
$$x = \frac{200}{60}(24)$$
$$x = 80 \text{ m}$$

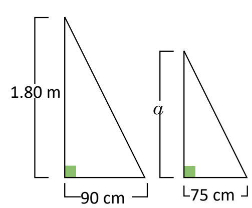
Por tanto, la distancia entre Antonio y el inicio del muelle es 80 metros



Fecha: **U5 4.4**

Ⓟ ¿Cuál es la altura "a" de Marta?

Las alturas son proporcionales a las sombras.



Ⓢ Dado que las alturas son proporcionales a las sombras.

$$\frac{a}{180} = \frac{75}{90}; \qquad 1.80 \text{ m} = 180 \text{ cm}$$
$$a = 180\left(\frac{75}{90}\right)$$
$$a = 150$$

Por tanto, Marta mide 1.50 m.

Ⓡ 1.
Asumiendo que las alturas son proporcionales a las sombras y nombrando por a la altura de la torre.

$$\frac{a}{1.82} = \frac{40}{1.40}$$
$$a = \frac{40}{1.40}(1.82)$$
$$a = 52 \text{ m}$$

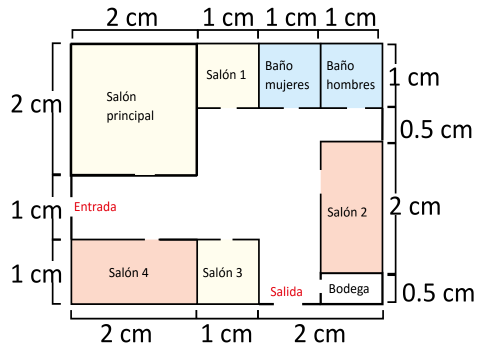
2.
80 m

Tarea: página 125 del Cuaderno de Ejercicios.

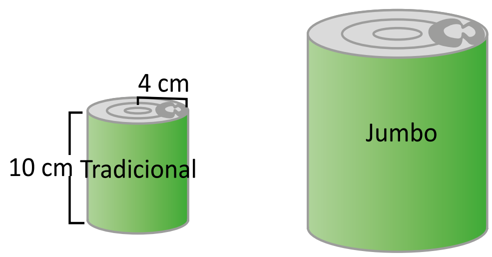
4.5 Practica lo aprendido

1. El siguiente plano de un museo se encuentra a una escala numérica de 1:200; los baños y los salones 1 y 3 tienen las mismas dimensiones, mientras que las dimensiones del salón 2 son iguales a las del salón 4.

   a) ¿Cuál es el área real del salón principal? 16 m^2
   b) ¿Cuál es el área del salón 1? 4 m^2
   c) Si se planea enladrillar todo el suelo del museo con baldosas de 25 cm × 25 cm, ¿cuántas de estas se necesitarán? 1 280 baldosas



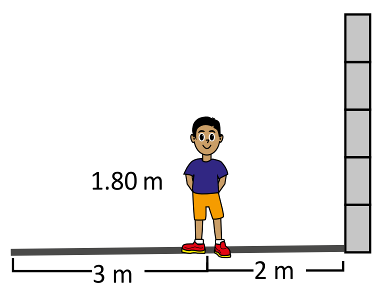
2. Doña Carmen vende frutas y jugos enlatados. Para ello utiliza dos tipos de latas: la tradicional con 4 cm de radio por 10 cm de alto y la jumbo cuyo volumen es de 540π cm^3. Si ambas latas son semejantes, ¿cuáles son las dimensiones del radio y la altura de la lata jumbo?



Radio = 6 cm

Altura = 15 cm

3. José se coloca a dos metros de un muro de tal forma que el extremo de su sombra coincide con el extremo de la sombra del muro. Si la estatura de José es 1.80 m y la longitud de su sombra es 3 m, ¿cuál es la altura del muro?



Asumiendo que José se encuentra ubicado de forma paralela con el muro, se forman dos triángulos semejantes y utilizando la proporción entre los lados $\frac{a}{5} = \frac{1.8}{3}$ (donde a es la altura del muro), entonces $a = 3$ m.

Indicador de logro

4.5 Resuelve problemas aplicados utilizando los conocimientos sobre figuras semejantes.

Solución de algunos ítems:

1.

a) Encontrando primero los lados reales y calculando posteriormente el área.

Sea x el lado del salón principal.

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{200}$$
$$x = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$$

Por tanto, el área del salón principal es
$4 \text{ m} \times 4 \text{ m} = 16\text{m}^2$.

b) Sea y el lado del salón 1.

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{200}$$
$$y = 200$$

Por tanto, el área del salón 1 es:
$2 \text{ m} \times 2 \text{ m} = 4 \text{ m}^2$.

c) Las medidas de los lados del museo en el plano, son de 4 cm y 5 cm.
Encontrando la medida real de sus lados.

Sea x la medida real de la altura.

$$\frac{4}{x} = \frac{1}{200}$$
$$x = 800 \text{ cm}$$

Sea y la medida real de la base.

$$\frac{5}{y} = \frac{1}{200}$$
$$y = 1\,000 \text{ cm}$$

Además,
$800 \div 25 = 32$ y $1\,000 \div 25 = 40$.
Por lo tanto, a lo largo de la altura caben 32 baldosas y a lo largo de la base caben 40 baldosas.
Luego se necesita $40 \times 32 = 1\,280$ baldosas.

2.
Por el resultado de la clase 4.3, la razón entre los volúmenes es igual al cubo de razón de semejanza.

El volumen de la lata pequeña es de $16\pi(10) \text{ cm}^3 = 160\pi \text{ cm}^3$.

La razón entre los volúmenes es:

$$\frac{160\pi}{540\pi} = \frac{8}{27} = \frac{2^3}{3^3}$$

La razón de semejanza es entonces 2:3.
Encontrando las dimensiones del radio.

$$\frac{4}{R} = \frac{2}{3}$$
$$R = 6 \text{ cm}$$

Encontrando la altura h.

$$\frac{10}{h} = \frac{2}{3}$$
$$h = 15 \text{ cm}$$

Tarea: página 126 del Cuaderno de Ejercicios.

Unidad 6. Teorema de Pitágoras

Competencia de la Unidad

Utilizar el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en figuras y cuerpos geométricos y aplicarlo en la resolución de problemas del entorno.

Relación y desarrollo

Octavo grado

Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono
- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
- Rectas paralelas y ángulos

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos
- Congruencia de triángulos

Unidad 6: Características de los triángulos y cuadriláteros
- Triángulos
- Paralelogramos

Unidad 7: Áreas y volúmenes de sólidos geométricos
- Características y elementos de los sólidos
- Cálculo del volumen de sólidos geométricos
- Aplicaciones de volúmenes
- Áreas de sólidos geométricos
- Aplicaciones de áreas

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras.
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación de ángulos central e inscrito

Primer año de bachillerato

Unidad 5: Resolución de triángulos oblicuángulos
- Razones trigonométricas de ángulos agudos
- Razones trigonométricas de ángulos no agudos
- Resolución de triángulos oblicuángulos

Unidad 6: Identidades y ecuaciones trigonométricas
- Identidades trigonométricas
- Ecuaciones trigonométricas

Unidad 7: Vectores y números complejos
- Vectores
- Producto escalar de vectores
- Números complejos
- Práctica en GeoGebra

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Teorema de Pitágoras	1	1. Cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, parte 1
	1	2. Cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, parte 2
	1	3. Teorema de Pitágoras, parte 1
	1	4. Teorema de Pitágoras, parte 2
	1	5. Cálculo de la medida de un cateto
	1	6. Resolución de problemas utilizando el teorema de Pitágoras
	1	7. Triángulos notables
	1	8. Recíproco del teorema de Pitágoras
2. Aplicación del teorema de Pitágoras	1	1. Cálculo de la altura y volumen de un cono
	1	2. Cálculo de la medida de la altura y volumen de la pirámide cuadrangular
	1	3. Cálculo de la medida de la diagonal de un ortoedro
	1	4. Cálculo del área de un hexágono
	1	5. Practica lo aprendido
	1	6. Practica lo aprendido
	1	7. Aplicación del teorema de Pitágoras
	1	8. Practica lo aprendido
	1	9. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 6

17 horas clase + prueba de la Unidad 6

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Teorema de Pitágoras

A través del cálculo de áreas se encuentra la longitud de la hipotenusa, conociendo la medida de los catetos y realizando construcciones que permitan encontrar fácilmente esta medida; posteriormente se establece el teorema de Pitágoras y se realiza el cálculo de la medida de un cateto utilizando las fórmulas que relacionan los catetos y la hipotenusa. Se estudian además, algunos resultados importantes, como el recíproco del teorema y su uso para encontrar la medida de triángulos notables.

Lección 2: Aplicación del teorema de Pitágoras

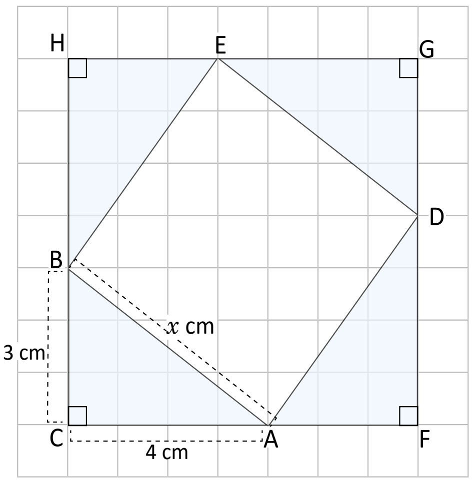
Se utiliza el teorema de Pitágoras para resolver diversos problemas aplicados, ya sea en el entorno, como en la misma matemática. De estos últimos, la importancia del teorema reside en el cálculo de alturas de sólidos y determinación de áreas de ciertos objetos.

1.1 Cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, parte 1

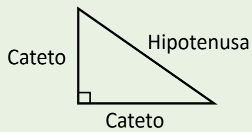
P

En la figura, el ΔABC, ΔDAF, ΔEDG y ΔBEH son triángulos rectángulos y congruentes.

a) Encuentra el área del cuadrado CFGH.
b) Encuentra el área del cuadrilátero ADEB.
c) Demuestra que el cuadrilátero ADEB es un cuadrado verificando ∢BAD = 90°.
d) Encuentra la medida del lado AB.



En un triángulo rectángulo los lados adyacentes al ángulo de 90°, se llaman **catetos**, mientras que el lado que es opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**.



S

a) CF = 4 + 3 = 7(cm), por lo tanto, el área es: $7^2 = 49(\text{cm}^2)$.

b) El área del cuadrilátero ADEB se puede calcular restando al área del cuadrado FGHC, las áreas de los cuatro triángulos que son congruentes.

$$\begin{aligned}(\text{ADEB}) &= (\text{FGHC}) - (\text{ABC}) \times 4\\ &= (4+3)^2 - \frac{3 \times 4}{2} \times 4\\ &= 49 - 24\\ &= 25\ (\text{cm})^2\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\sphericalangle BAD &= 180° - (\sphericalangle CAB + \sphericalangle DAF)\\ &= 180° - (\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC), \text{ dado que } \Delta ABC \cong \Delta DAF\\ &= 180° - 90° = 90°\end{aligned}$$

De la misma manera se tiene que ∢ADE = ∢DEB = ∢EBA = 90°.

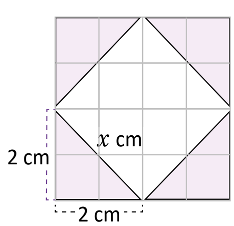
En el cuadrilátero ADEB, los lados son congruentes y los ángulos son congruentes así que es un cuadrado.

d) El área del cuadrado ADEB es AB^2, por otra parte el área es 25 cm^2. Luego $AB^2 = 25$, AB = 5(cm).

C

Formando cuadrados con 4 triángulos rectángulos congruentes y calculando el área se puede calcular la medida del la hipotenusa sabiendo los catetos.

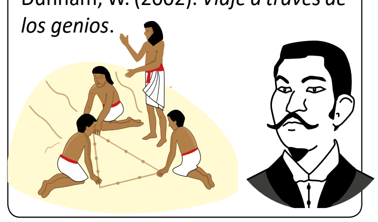
En la siguiente figura, encuentra el valor de x:



$x = 2\sqrt{2}$

Los registros arqueológicos indican que por el año 2000 a. C., los egipcios unían 12 segmentos de soga de la misma longitud. Estiraban cinco de estos segmentos consecutivos luego tirando del lazo formaban un triángulo rígido con un ángulo recto. Este triángulo de lados 3, 4 y 5 es conocido como el triángulo sagrado egipcio.

Dunham, W. (2002). *Viaje a través de los genios*.



Indicador de logro

1.1 Encuentra la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo en particular, utilizando áreas.

Secuencia

De todos los teoremas utilizados en tercer ciclo, el teorema de Pitágoras resulta ser el que más se utiliza en bachillerato de forma que permite demostrar otros resultados importantes.
En octavo grado se estudia la geometría y la forma lógica de demostrar un resultado, en esta unidad se realizan dos demostraciones diferentes del teorema de Pitágoras y en una de ellas son necesarios conocimientos sobre semejanza de triángulos vistos en la unidad anterior.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Mediante una secuencia ordenada de pasos, encontrar la medida de la hipotenusa. En la figura se puede observar que cada cuadrado tiene lado 1, esto facilita responder el primer literal. Al momento de resolver se debe recordar que (FGHC) expresa el área del cuadrilátero FGHC.

Lo importante es encontrar el área de ADEB y demostrar que es un cuadrado ya que de esta forma solo se necesita extraer la raíz cuadrada para encontrar el lado.

Solución de algunos ítems:

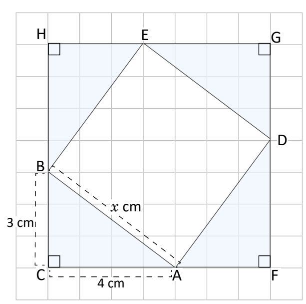
Según los datos de la imagen.
Área del cuadrado grande:
$(4 \text{ cm})^2 = 16 \text{ cm}^2$
Área de un triángulo:
$\frac{2 \times 2}{2} = 2 \text{ cm}^2$
Suma de las áreas de los cuatro triángulos:
$4 \times 2 = 8 \text{ cm}^2$
Área del cuadrado blanco:
$16 \text{ cm}^2 - 8 \text{ cm}^2 = 8 \text{ cm}^2$

Por tanto, el valor de x es:
$x = \sqrt{8}$ cm o lo que es igual $x = 2\sqrt{2}$ cm.
Este tipo de simplificación se estudió en la Unidad 2, raíz cuadrada.

Observación:
Se pueden denotar los vértices con A, B, C y D para resolver de modo similar al Problema inicial. Además, se asume que los triángulos son congruentes y no es necesario demostrar que el espacio en blanco es un cuadrado.

Fecha: **U6 1.1**

Ⓟ En la figura, ΔABC, ΔDAF, ΔEDG y ΔBEH son congruentes.



a) Encuentra el área del cuadrado CFGH
b) Encuentra el área de ADEB
c) Demuestra que ADEB es un cuadrado
d) Encuentra el lado AB

Ⓢ a) CF = 4 + 3 = 7 cm. El área es $7^2 = 49 \text{ cm}^2$.
b) $(ADEB) = (FGHC) - (ABC) \times 4$
$= (4 + 3)^2 - \frac{3 \times 4}{2} \times 4$
$= 49 - 24$
$= 25 \text{ cm}^2$.
c) $\sphericalangle BAD = 180° - (\sphericalangle CAB + \sphericalangle DAF)$
$= 180° - (\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC)$;
dado que $\Delta ABC \cong \Delta DAF$
$= 180° - 90° = 90°$.
d) El área del cuadrado es AB^2
$AB^2 = 25 \text{ cm}^2$ entonces AB = 5 cm.

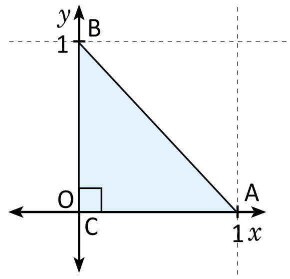
Ⓡ $x = 2\sqrt{2}$

Tarea: página 130 del Cuaderno de Ejercicios.

1.2 Cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, parte 2

P

Encuentra la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos vértices están representados por los puntos A(1, 0), B(0, 1) y C(0, 0).

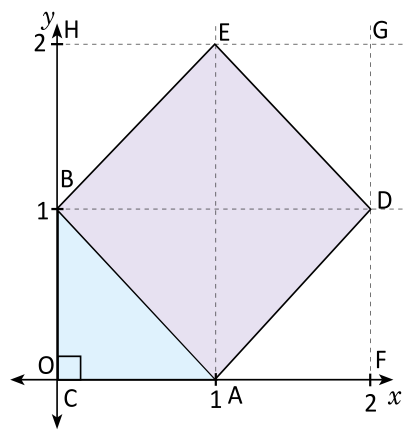


Un punto en el plano cartesiano se representa por (a, b), donde a es el valor en el eje x, y b en el eje y.

S

Se construye un cuadrado que contenga como uno de sus lados la hipotenusa del triángulo ABC, es decir que tenga como lado AB, este cuadrado tendrá como vértices los puntos A(1, 0), D(2, 1), E(1, 2) y B(0, 1).

Construyendo triángulos congruentes al triángulo ABC, se forma el cuadrado FGHC. El área del cuadrado ADEB se obtiene restando al área del cuadrado FGHC, las áreas de los cuatro triángulos.



$$(ADEB) = (FGHC) - (ABC) \times 4$$
$$= (2)^2 - \frac{1 \times 1}{2} \times 4$$
$$= 4 - 2$$
$$= 2$$

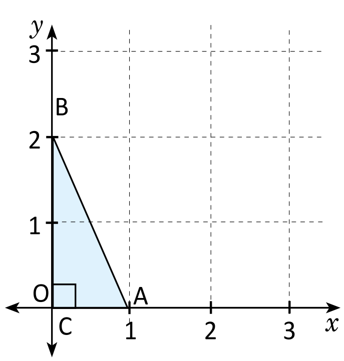
Entonces $AB^2 = 2$ (por el área de ADEB).
Por lo tanto AB = $\sqrt{2}$ (raíz cuadrada positiva).

C

En el triángulo rectángulo cuyos vértices están representados por los puntos A(1, 0),B(0, 1) y C(0, 0), la hipotenusa es $\sqrt{2}$.

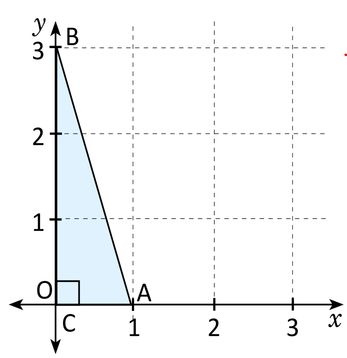
Encuentra la hipotenusa para los triángulos formados por los vértices de cada literal.

a) A(1, 0), B(0, 2) y C(0, 0)



$\sqrt{5}$

b) A(1, 0),B(0, 3) y C(0, 0)



$\sqrt{10}$

Indicador de logro

1.2 Encuentra la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos vértices son puntos del plano cartesiano.

Secuencia

En la clase anterior se estudió un procedimiento para calcular la longitud de la hipotenusa haciendo uso de áreas, para esta clase se utiliza el mismo algoritmo con la diferencia de que ahora se trata de un triángulo rectángulo cuyos vértices son puntos del plano. Los puntos están ubicados sobre los ejes, por lo que es sencillo encontrar la medida de los catetos.

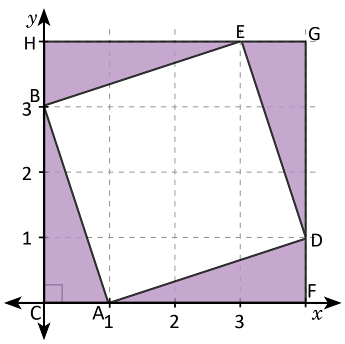
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Lo importante es utilizar la idea de la clase anterior para resolver, por lo que se debe construir un cuadrado sobre la hipotenusa y luego observar que a su alrededor se forman tres triángulos congruentes con el primero, de esta forma puede aplicarse el resultado de la clase 1.1.

Se debe indicar que este es un resultado particular, pero que puede utilizarse el mismo procedimiento en otros triángulos rectángulos.

Solución de algunos ítems:

b)



$$
\begin{aligned}
(ADEB) &= (CFGH) - (ABC) \times 4\\
&= (4)^2 - \frac{3 \times 1}{2} \times 4\\
&= 16 - 6\\
&= 10
\end{aligned}
$$

Entonces $AB^2 = 10$.

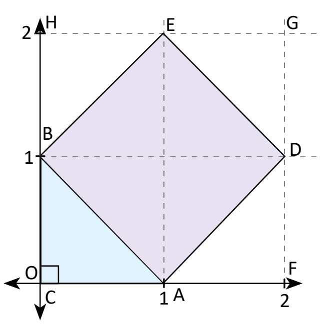
Por lo tanto, $AB = \sqrt{10}$.

Debe utilizarse la cuadrícula del cuaderno para estos ejercicios, particularmente en b), debe prolongarse un poco más para poder realizar la construcción.

Observación:
En el plan de pizarra, el cuadrado y los triángulos congruentes deben construirse en el momento de la solución y no antes de esto.

Fecha: **U6 1.2**

Ⓟ Encuentra la medida de AB, si A(1, 0), B(0, 1) y C(0, 0).



Ⓢ Se construye un cuadrado sobre AB. También se construyen triángulos congruentes al ABC.

$$
\begin{aligned}
(ADEB) &= (FGHC) - (ABC) \times 4\\
&= 2^2 - \frac{1 \times 1}{2} \times 4\\
&= 4 - 2\\
&= 2
\end{aligned}
$$

Entonces $AB^2 = 2$.

Por lo tanto, $AB = \sqrt{2}$.

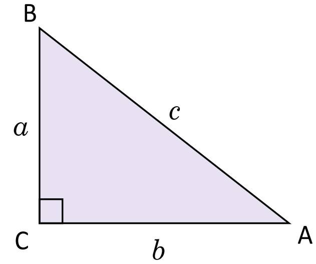
Ⓡ a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{10}$

Tarea: página 131 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Teorema de Pitágoras, parte 1

P

Dado el ΔABC, tal que $CA = b$, $AB = c$ y $BC = a$; con $\sphericalangle BCA = 90°$. Demuestra que $a^2 + b^2 = c^2$, aplicando el procedimiento de la clase 1.

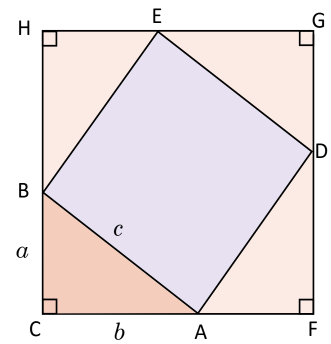


S

Construyendo un cuadrado que tenga como uno de sus lados la hipotenusa AB.

Al construir tres triángulos rectángulos congruentes al ΔABC, cuyas hipotenusas sean los tres lados restantes del cuadrado ADEB, se forma el cuadrado CFGH en el que cada uno de sus lados mide $a + b$.

Si se encuentra el área del cuadrado CFGH de dos formas distintas:

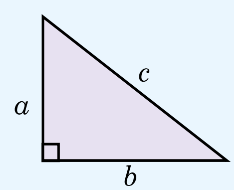


Forma 1.
$A_1 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

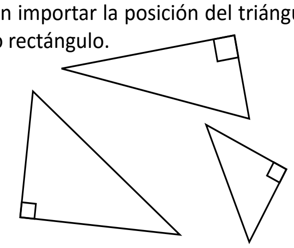
Forma 2.
$A_2 = c^2 + 4(\frac{ab}{2}) = c^2 + 2ab$.
Como el área es la misma se tiene que $A_1 = A_2$.
$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

C

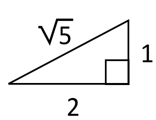
En todo triángulo rectángulo se cumple que, la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa, es decir, si los lados del triángulo son a, b y c, se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$. Este resultado es conocido como el **teorema de Pitágoras**.

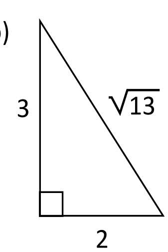


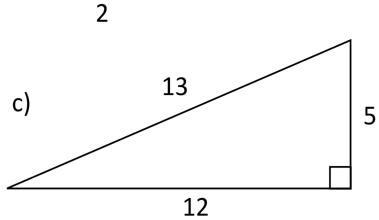
El teorema de Pitágoras se cumple sin importar la posición del triángulo rectángulo.



Verifica que el teorema de Pitágoras se cumple en los siguientes triángulos rectángulos.

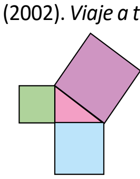
a)


b)


c)


Euclides (300 a. C.) enunció la siguiente proposición: "En los triángulos rectángulos, el área del cuadrado construido sobre el lado que subtiende el ángulo recto es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los otros lados del triángulo".

Dunham, W. (2002). *Viaje a través de los genios*.



Indicador de logro

1.3 Demuestra el teorema de Pitágoras utilizando áreas de triángulos y cuadrados.

Secuencia

En las clases anteriores se obtuvo la medida de la hipotenusa, como la raíz cuadrada del área del cuadrado que se forma sobre ella. En esta clase se demuestra el teorema de Pitágoras siempre utilizando áreas, como se hizo en la clase 1.1, solo que esta vez de manera general.

Propósito

P, S Demostrar la validez de la relación $a^2 + b^2 = c^2$, debe insistirse en recordar el procedimiento utilizado en la clase 1 como pista para resolver este problema. Por lo tanto, deberían construir el cuadrado sobre la hipotenusa como primer paso.

En la solución, es posible establecer:
$A_1 = A_2$, ya que ambas son formas distintas de representar el área del cuadrado.

Solución de algunos ítems:

a)
$1^2 + 2^2 = 1 + 4$
$= 5$
Además, $(\sqrt{5})^2 = 5$.
Por tanto, se cumple el teorema de Pitágoras.

b)
$2^2 + 3^2 = 4 + 9$
$= 13$
Además, $(\sqrt{13})^2 = 13$.
Por tanto, se cumple el teorema de Pitágoras.

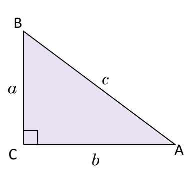
c)
$12^2 + 5^2 = 144 + 25$
$= 169$
Además, $13^2 = 169$.
Por tanto, se cumple el teorema de Pitágoras.

De la Unidad 2, se sabe que $(\sqrt{a})^2 = a$.

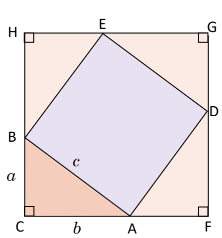
No importa la posición del triángulo, si es rectángulo siempre se cumplirá la relación.

Fecha: **U6 1.3**

P Dado el triángulo rectángulo ABC. Demuestra que $a^2 + b^2 = c^2$.



S



Forma 1.
$A_1 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Forma 2.
$A_2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right) = c^2 + 2ab$.

$A_1 = A_2$. Porque el área es la misma.

$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

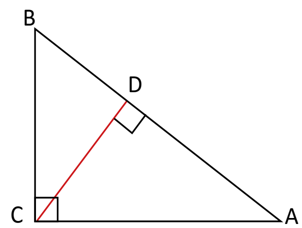
R a)
$1^2 + 2^2 = 1 + 4$
$= 5$
Además, $(\sqrt{5})^2 = 5$.
Por tanto, se cumple el teorema de Pitágoras.

Tarea: página 132 del Cuaderno de Ejercicios.

1.4 Teorema de Pitágoras, parte 2

P

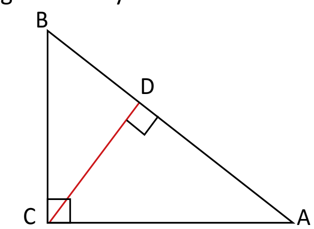
Utiliza semejanza de los triángulos ΔABC ~ ΔCBD y ΔABC ~ ΔACD para establecer que en el ΔABC, se cumple que $BC^2 + CA^2 = AB^2$.



S

Trazando la altura del vértice C al lado AB, se forman los triángulos rectángulos ADC y CDB.

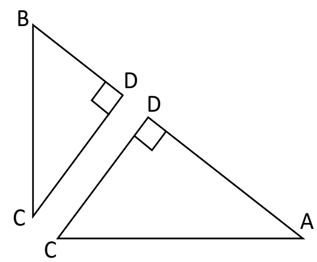
ΔABC ~ ΔCBD (tiene dos ángulos congruentes).



$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DB}$ (por la semejanza de los triángulos ABC y CBD).

Entonces, $BC^2 = AB \times DB$ (propiedad fundamental de las proporciones).

ΔABC ~ ΔACD (tiene dos ángulos congruentes).



$\frac{AB}{CA} = \frac{CA}{AD}$ (por la semejanza de los triángulos ABC y ADC).

Entonces, $CA^2 = AB \times AD$ (propiedad fundamental de las proporciones).

Luego, $CA^2 + BC^2 = AB \times AD + AB \times DB = AB \times (AD + DB) = AB^2$.

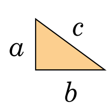
Por lo tanto, $BC^2 + CA^2 = AB^2$.

C

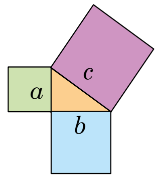
Se puede utilizar semejanza de triángulos para demostrar el teorema de Pitágoras.

Verificación del teorema de Pitágoras con recortes: Verifica que el área del cuadrado más grande (de área c^2) es igual a la suma de las áreas de los otros dos cuadrados (cuyas áreas son b^2 y a^2).

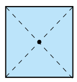
Dibuja un triángulo rectángulo.



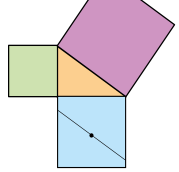
Recorta tres cuadrados con páginas de color, cuyos lados sean los lados del triángulo.



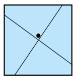
Dobla el cuadrado celeste por sus diagonales; desdobla y marca su punto de intersección.



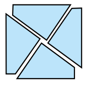
Traza un segmento paralelo a la hipotenusa que pase por el punto marcado.



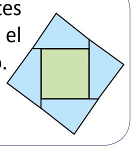
Traza un segmento perpendicular a este último y que pase por el mismo punto.



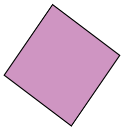
Corta las 4 partes en que ha quedado dividido el cuadrado celeste.



Une las 4 partes cortadas con el otro cuadrado.



Se forma un cuadrado congruente al más grande.



Indicador de logro

1.4 Demuestra el teorema de Pitágoras utilizando semejanza de triángulos.

Secuencia

En las clases 1.3 y 1.4 se usan dos formas diferentes para demostrar el teorema de Pitágoras, en ellas se utilizan dos conceptos diferentes; en 1.3 se utiliza congruencia respecto a los triángulos formados y en 1.4 se utiliza semejanza de triángulos que es el contenido de la unidad anterior.

Propósito

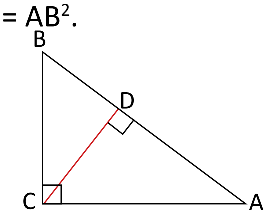
Ⓟ, Ⓢ Para comprender mejor la demostración pueden separarse los triángulos formados e identificar primero los lados correspondientes. Para concluir el resultado, se suman las relaciones obtenidas de la semejanza de los triángulos formados con el triángulo ABC.

Ⓒ Lo importante es mencionar que existen muchas maneras de demostrar el teorema de Pitágoras, aquí únicamente se presentan dos.

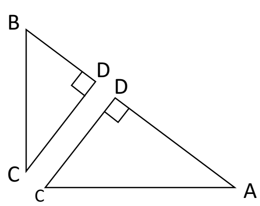
Los trazos de los segmentos paralelos y perpendiculares deben realizarse utilizando regla y escuadra. Lo importante es verificar que los recortes coinciden perfectamente con el cuadrado mayor.

Fecha: **U6 1.4**

Ⓟ En la figura:
$\Delta ABC \sim \Delta CBD$ y $\Delta ABC \sim \Delta ACD$. Demuestra que $BC^2 + CA^2 = AB^2$.



Ⓢ Separando la figura en dos triángulos.



1. Como $\Delta ABC \sim \Delta CBD$

$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DB}$ (por semejanza)

Entonces, $BC^2 = AB \times DB$.

2. Como $\Delta ABC \sim \Delta ACD$

$\frac{AB}{CA} = \frac{CA}{AD}$ (por semejanza)

Entonces, $CA^2 = AB \times AD$.

$$\begin{aligned} CA^2 + BC^2 &= AB \times AD + AB \times DB \\ &= AB \times (AD + DB) \\ &= AB \times AB \\ &= AB^2 \end{aligned}$$

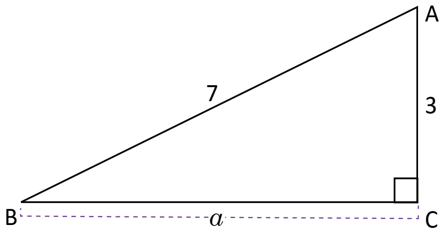
Por tanto, $BC^2 + CA^2 = AB^2$.

Tarea: página 133 del Cuaderno de Ejercicios.

1.5 Cálculo de la medida de un cateto

P

En el siguiente triángulo rectángulo ABC, encuentra la medida del cateto BC, es decir, el valor de a.



S

Como el triángulo es rectángulo se cumple que $3^2 + a^2 = 7^2$ (teorema de Pitágoras)

Despejando a^2, $a^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$.

Por definición de raíz cuadrada, $a^2 = 40 \Rightarrow a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, como $a > 0$.

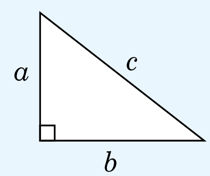
Por lo tanto: $a = 2\sqrt{10}$.

En el triángulo rectángulo ABC, cuya hipotenusa mide 7 y el cateto 3, el segundo cateto mide $2\sqrt{10}$.

C

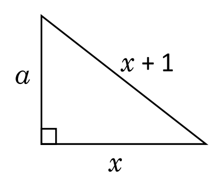
En general, en un triángulo rectángulo de lados a, b y c, debido a que se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, la hipotenusa y los catetos se pueden encontrar de la siguiente manera:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



E

Determina el valor del cateto a en términos de x. Considera $x > 0$.

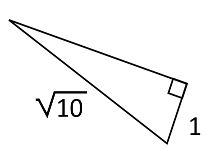


Entonces, $a^2 = (x + 1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$.

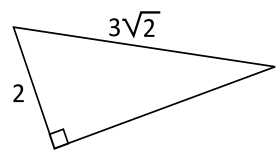
Por lo tanto, $a = \sqrt{2x + 1}$.

Encuentra en los siguientes triángulos la longitud de los lados desconocidos:

La medida del lado es 3



La medida del lado es $\sqrt{14}$



Indicador de logro

1.5 Encuentra la longitud de un cateto desconocido, utilizando el teorema de Pitágoras.

Secuencia

En las clases anteriores se ha demostrado el teorema de Pitágoras y verificado si los valores de los lados, en distintos triángulos rectángulos cumplen esta relación. De ahora en adelante se utilizará el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de lados desconocidos en triángulos rectángulos.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar uno de los catetos. En el último paso se plantea una ecuación cuadrática de la forma $x^2 = b$. Como se estudió en la Unidad 3, este problema tiene dos soluciones con distinto signo, en este caso solo se utiliza la solución positiva, ya que se trata del lado de un triángulo.

Ⓔ En este caso, la solución queda expresada en términos de una variable. La condición $x > 0$ es necesaria porque la medida de los lados es positiva.

Solución de algunos ítems:

En el primer triángulo.
Nombrando por a el lado desconocido

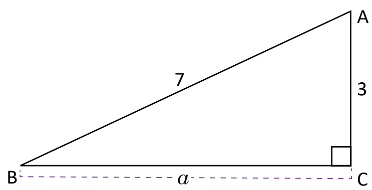
$$(\sqrt{10})^2 = 1^2 + a^2$$
$$(\sqrt{10})^2 = 1^2 + a^2$$
$$a^2 = 10 - 1$$
$$a = \sqrt{9}$$
$$a = 3$$

Para el segundo triángulo.
Nombrando por a el lado desconocido

$$(3\sqrt{2})^2 = 2^2 + a^2$$
$$\sqrt{18})^2 = 4 + a^2$$
$$a^2 = 18 - 4$$
$$a = \sqrt{14}$$

Fecha: **U6 1.5**

Ⓟ En el triángulo rectángulo ABC, encuentra el valor de a.

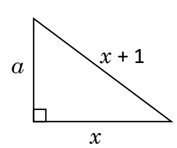


Ⓢ En el triángulo rectángulo:
$3^2 + a^2 = 7^2$ (por teorema de Pitágoras)
$a^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$
$a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

Por tanto, $a = 2\sqrt{10}$.

Ⓔ Determina a en términos de x. Considera $x > 0$.

Por el teorema de Pitágoras.
$a^2 = (x + 1)^2 - x^2$
$= x^2 + 2x + 1 - x^2$
$= 2x + 1$
$a = \sqrt{2x + 1}$



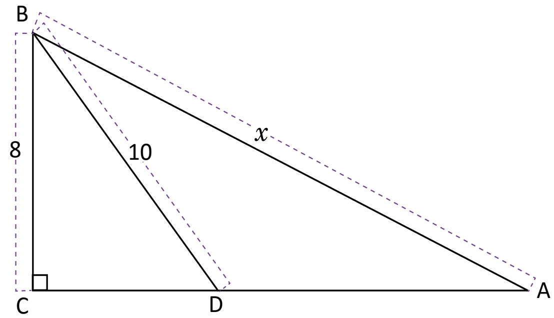
Ⓡ 1. La medida del lado es 3.
2. La medida del lado es $\sqrt{14}$.

Tarea: página 134 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 Resolución de problemas utilizando el teorema de Pitágoras

P

Encuentra la medida de la hipotenusa del triángulo ABC, sabiendo que el triángulo ABD es isósceles.



S

Para calcular el valor de x, se necesita saber la medida del cateto CA.

Debido a que el ΔABD es isósceles, el lado DA es 10.

Aplicando el teorema de Pitágoras en ΔDBC.

$$CD^2 + BC^2 = DB^2 \Rightarrow CD^2 + 8^2 = 10^2$$
$$\Rightarrow CD^2 = 36, \text{ con } CD > 0$$
$$\Rightarrow CD = 6$$

Dado que CA = CD + DA, se tiene que CA = 10 + 6 = 16.

Finalmente se aplica el teorema de Pitágoras en el ΔABC:

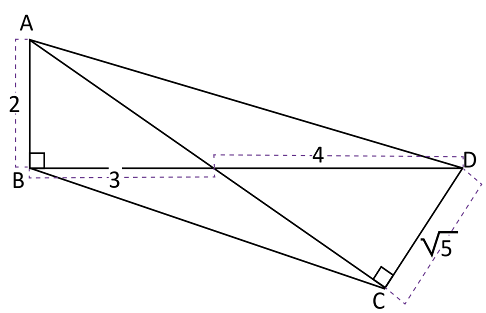
$x^2 = BC^2 + CA^2 \Rightarrow x^2 = 8^2 + 16^2 = 320.$

Por lo tanto $x = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$.

C

Para resolver problemas utilizando el teorema de Pitágoras, identifica los triángulos rectángulos en la figura y utiliza los valores que se proporcionan en ella, para determinar la medida de los lados desconocidos.

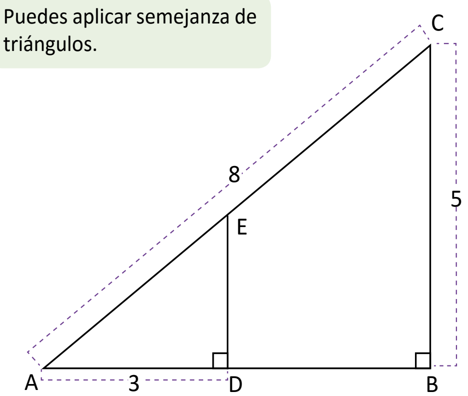
1. Determina la medida de la diagonal AC en el cuadrilátero ABCD.



$AC = \sqrt{13} + \sqrt{11}$

2. Calcula la medida de la hipotenusa del ΔADE.

Puedes aplicar semejanza de triángulos.



$AE = \frac{24}{\sqrt{39}}$

Unidad 6

Indicador de logro

1.6 Calcula la longitud del lado de un triángulo utilizando el teorema de Pitágoras dos veces.

Secuencia

En la clase anterior se calculó la longitud de un lado desconocido en un triángulo, utilizando el teorema de Pitágoras. En esta clase, para encontrar la medida del lado, el teorema se debe aplicar hasta dos veces, además para resolver se deben aplicar otros resultados de la geometría.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Dado que el triángulo ABC es rectángulo y se conoce la medida de BC, únicamente hace falta conocer la medida de CA para poder aplicar el teorema de Pitágoras y así obtener BA, lo importante es utilizar las hipótesis para realizar esto.

Solución de algunos ítems:

1.
Sea M el punto donde se intersecan las diagonales.
En el triángulo ABM se cumple:

$$AM^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

Por tanto, $AM = \sqrt{13}$.
En el triángulo CDM se cumple:

$$DM^2 = MC^2 + CD^2$$
$$4^2 = MC^2 + (\sqrt{5})^2$$
$$MC^2 = 16 - 5$$
$$MC = \sqrt{11}$$

Por tanto, $MC = \sqrt{11}$.

Luego, AC = AM + MC, $AC = \sqrt{13} + \sqrt{11}$.

2.
Como el ΔABC es rectángulo, se cumple que:

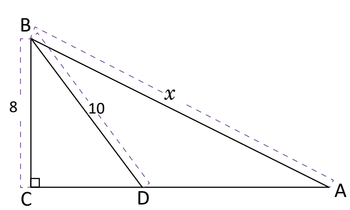
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$8^2 = AB^2 + 5^2$$
$$AB^2 = 64 - 25$$
$$AB = \sqrt{39}$$

Además, ΔABC ~ ΔADE (por AA).
Entonces,

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$$
$$\frac{AE}{8} = \frac{3}{\sqrt{39}}$$
$$AE = \frac{24}{\sqrt{39}}$$

Fecha: **U6 1.6**

Ⓟ Encuentra x sabiendo que ABD es isósceles.



Ⓢ DA = 10, porque ΔABD es isósceles.
Aplicando el teorema de Pitágoras.

$$CD^2 + BC^2 = DB^2 \Rightarrow CD^2 + 8^2 = 10^2$$
$$\Rightarrow CD^2 = 36$$
$$\Rightarrow CD = 6$$

CA = CD + DA.
CA = 10 + 6.

Aplicando el teorema de Pitágoras en ΔABC:
$x^2 = BC^2 + CA^2 \Rightarrow x^2 = 8^2 + 16^2 = 320$.

Por lo tanto, $x = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$.

Ⓡ 1. $AC = \sqrt{13} + \sqrt{11}$

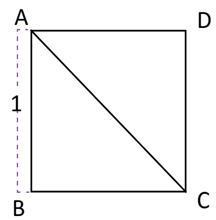
2. $AE = \frac{24}{\sqrt{39}}$

Tarea: página 135 del Cuaderno de Ejercicios.

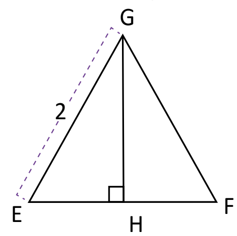
1.7 Triángulos notables

P

1. ¿Cuánto mide la diagonal CA del cuadrado ABCD, cuyos lados miden 1?, ¿cuánto miden los ángulos del ΔABC?



2. ¿Cuánto mide la altura del triángulo equilátero EFG cuyos lados miden 2?, ¿cuánto miden los ángulos del ΔEFG?



La altura de un triángulo es el segmento perpendicular a un lado que va desde el vértice opuesto a este (o a su prolongación).

S

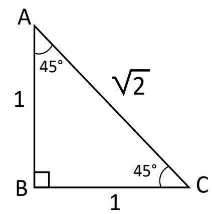
1. La diagonal CA es la hipotenusa de los triángulos rectángulos ABC y ACD. Solo se aplica el teorema de Pitágoras a cualquiera de estos triángulos para poder encontrar la medida de la hipotenusa CA.

En el ΔABC: $AB^2 + BC^2 = CA^2 \Rightarrow CA^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$$\Rightarrow CA = \sqrt{2}$$

Por lo tanto, la diagonal de ABCD es $\sqrt{2}$.

Como la diagonal CA del cuadrado ABCD es bisectriz del ∢DAB y ∢BCD, entonces los ángulos ∢CAB y ∢BCA del ΔABC miden 45°.



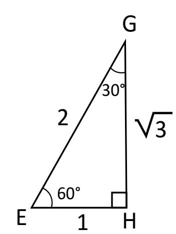
2. Como ΔEHG ≃ ΔFHG, EH = HF. Por lo tanto EH = 1.

En el ΔEHG: $EH^2 + HG^2 = GE^2 \Rightarrow HG^2 = GE^2 - EH^2 = 2^2 - 1^2 = 3$

$$\Rightarrow HG = \sqrt{3}$$

Por lo tanto, la altura de ΔEHG es $\sqrt{3}$.

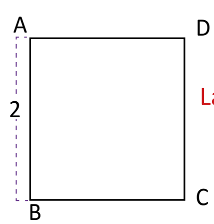
El ∢GEH = 60° debido a que el ΔEFG es equilátero, mientras que el ∢HGE = 30°, debido a que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.



C

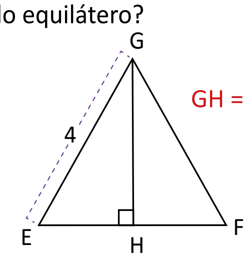
A los triángulos ABC y EHG se les denomina **triángulos notables** y serán de mucha utilidad en el estudio de la trigonometría en bachillerato.

1. ¿Cuál es la medida de la diagonal del siguiente cuadrado?



La diagonal mide $\sqrt{8}$

2. ¿Cuál es la medida de la altura del siguiente triángulo equilátero?



$GH = 2\sqrt{3}$

3. ¿Cuál es el área del triángulo EFG del ejercicio 2?

El área del triángulo es $4\sqrt{3}$.

Indicador de logro

1.7 Calcula la medida de los lados de los triángulos notables, utilizando el teorema de Pitágoras.

Secuencia

Los triángulos notables serán de utilidad en bachillerato, en los contenidos de trigonometría, por lo que en esta clase se realiza el procedimiento para conocer la medida de los lados de los triángulos, utilizando el teorema de Pitágoras.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Encontrar la diagonal de un cuadrado y la altura de un triángulo equilátero, utilizando el teorema de Pitágoras. A estos triángulos, con estas características específicas se les conoce como **triángulos notables**.

Solución de algunos ítems:

1.
Se resuelve de forma semejante al Problema inicial.

$$\begin{aligned} CA^2 &= 2^2 + 2^2 \\ &= 4 + 4 \\ &= 8 \\ CA &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

2.
Como $\Delta EHG \cong \Delta FHG$, por el criterio AA, $EH = HF$ entonces $EH = 2$.

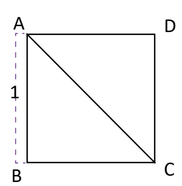
Luego:

$$\begin{aligned} GH^2 &= 4^2 - 2^2 \\ &= 16 - 4 \\ &= 12 \\ GH &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

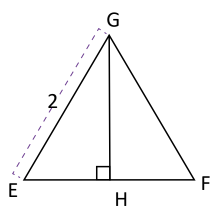
3.
$$\text{Área} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Fecha: **U6 1.7**

Ⓟ 1. En el siguiente cuadrado, ¿cuánto mide GH?



2. En el siguiente triángulo equilátero, ¿cuánto mide CA?



Ⓢ 1. ΔABC es rectángulo. Por tanto,

$$\begin{aligned} CA^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 1^2 + 1^2 \\ &= 2 \\ CA &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

2. Como $\Delta EHG \simeq \Delta FHG$, $EH = HF$, entonces $EH = 1$.

$$\begin{aligned} GE^2 &= HG^2 + EH^2 \\ HE^2 &= GE^2 - EH^2 \\ &= 2^2 - 1^2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$GH = \sqrt{3}$

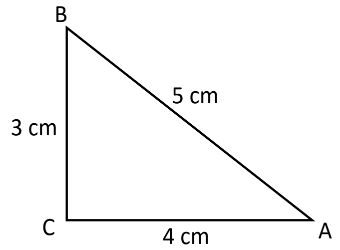
Ⓡ 1. $CA = \sqrt{8}$
2. $GH = 2\sqrt{3}$

Tarea: página 136 del Cuaderno de Ejercicios.

1.8 Recíproco del teorema de Pitágoras

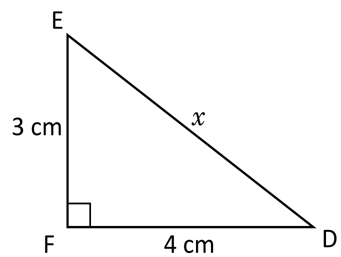
P

En el ΔABC, se cumple que $3^2 + 4^2 = 5^2$. Demuestra que la medida del ∢ACB es 90°.



S

1. Considerando el triángulo rectángulo ΔDEF, con lados EF = 3 cm, FD = 4 cm.



2. Utilizando el teorema de Pitágoras, $DE^2 = EF^2 + FD^2$

$$\Rightarrow x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$
$$\Rightarrow x = 5$$

3. Como CA = FD, AB = DE y BC = EF se concluye que el ΔABC ≅ ΔDEF (la medida de los tres lados son iguales).

4. Como ΔABC ≅ ΔDEF y ∢DFE = 90°, entonces el ∢ACB = 90°.

   Por lo tanto, se concluye que el ΔABC es rectángulo.

C

Si en un triángulo, sus lados a, b y c, cumplen la relación $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo, cuya hipotenusa es c. Este resultado es llamado el **recíproco del teorema de Pitágoras**.

E

Si las medidas de los tres lados de un triángulo son 8, 15 y 17, verifica si es un triángulo rectángulo.

Se debe verificar si se cumple que, la suma de los cuadrados de dos de ellos, es igual al cuadrado del tercero: $15^2 + 8^2 = 289$, $17^2 = 289$, luego $15^2 + 8^2 = 17^2$.

Observa que en un triángulo rectángulo, la hipotenusa tiene mayor longitud que los catetos.

Por el recíproco del teorema de Pitágoras se puede concluir que, el triángulo tiene un ángulo recto, y por lo tanto, es un triángulo rectángulo.

Verifica cuáles de los triángulos son rectángulos, si los datos proporcionados representan las medidas de sus lados.

a) 2 cm, 2 cm y 3 cm
No es un triángulo rectángulo.

b) 4 cm, 5 cm y $\sqrt{41}$ cm
Es un triángulo rectángulo.

c) 7, 24, 25
Es un triángulo rectángulo.

d) 2, 3, 4
No es un triángulo rectángulo.

Indicador de logro

1.8 Utiliza el recíproco del teorema de Pitágoras para verificar si un triángulo es rectángulo.

Secuencia

En las clases 1.3 y 1.4 se estableció el teorema de Pitágoras, donde la hipótesis es el triángulo rectángulo y se obtiene como conclusión la relación entre los catetos y la hipotenusa. En esta clase se estudia que el recíproco de este enunciado también es cierto, es decir que, si tres lados de un triángulo cumplen esta relación, el triángulo es rectángulo. El recíproco de un teorema se estudia en la Unidad 6 de octavo grado.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ La idea es utilizar un triángulo rectángulo, en el que no se conoce la hipotenusa y los catetos tienen la misma medida que el del Problema inicial. Al lograr establecer que los triángulos son congruentes, se obtiene que los ángulos correspondientes son iguales; por tanto, ABC es también rectángulo.

Ⓔ Al tener una terna de números, para verificar, se debe identificar el mayor de ellos, el cuadrado de este número tiene que ser igual a la suma de los cuadrados de los otros dos.

Solución de algunos ítems:

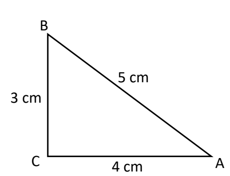
a) $3^2 = 9$
$2^2 + 2^2 = 8$
No se cumple el recíproco del teorema de Pitágoras, por tanto, no es un triángulo rectángulo.

b) $(\sqrt{41})^2 = 41$
$4^2 + 5^2 = 25 + 16 = 41$.
Por tanto, sí forman un triángulo rectángulo.

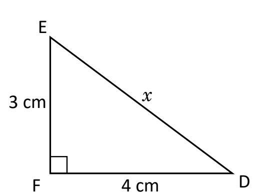
c) $(25)^2 = 625$
$7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$
Por tanto, sí forman un triángulo rectángulo.

Fecha: **U6 1.8**

Ⓟ En ΔABC se cumple $3^2 + 4^2 = 5^2$. Demuestra que $\sphericalangle ACB = 90°$.



Ⓢ Considerando el ΔDEF:



Utilizando el teorema de Pitágoras

$$DE^2 = EF^2 + FD^2$$
$$x^2 = 3^2 + 4^2$$
$$= 9 + 16 = 25$$

Entonces $x = 5$.
Como CA = FD, AB = DE y BC = EF entonces,
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$.
La congruencia de los triángulos permite establecer que $\sphericalangle ACB = 90°$.

Ⓔ Las medidas de un triángulo son 15, 8 y 17. Además, se cumple que

$$15^2 + 8^2 = 289 = 17^2$$

Por el recíproco del teorema de Pitágoras, el triángulo es rectángulo.

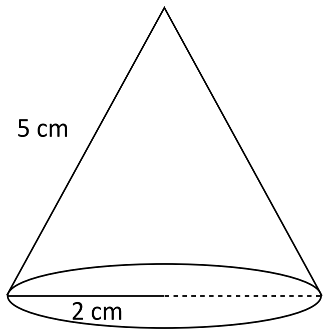
Tarea: página 137 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2 Aplicación del teorema de Pitágoras

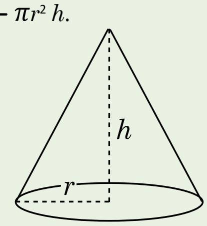
2.1 Cálculo de la altura y volumen de un cono

P

Calcula la altura y el volumen del cono.

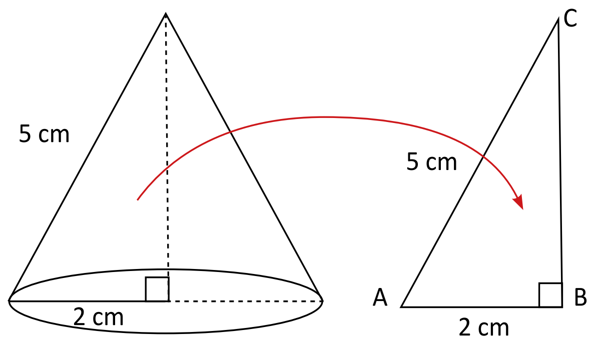


El volumen de un cono de radio r y altura h es $V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.



S

Se traza la altura en el cono y se forma un triángulo rectángulo el cual se denota como ΔABC, del cual ya se conoce la hipotenusa y un cateto, la altura del cono es el otro cateto de este triángulo, para calcularlo, se aplica el teorema de Pitágoras:



En el ΔABC: $AB^2 + BC^2 = CA^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow BC^2 &= CA^2 - AB^2 \\ &= 5^2 - 2^2 \\ &= 25 - 4 \\ \Rightarrow BC &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la altura del cono mide $\sqrt{21}$ cm.

El volumen del cono se obtiene con $V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde $r = 2$ cm y $h = \sqrt{21}$ cm, sustituyendo se tiene:

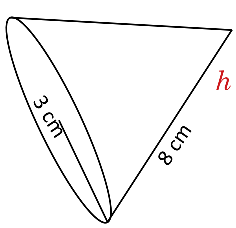
$$V_c = \frac{1}{3}\pi(2)^2\sqrt{21} = \frac{4\sqrt{21}\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

Por lo tanto, el volumen del cono es $\frac{4\sqrt{21}\pi}{3}$ cm³.

C

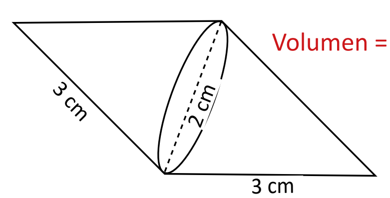
Para determinar el volumen o la altura desconocida de un cono, es necesario utilizar el teorema de Pitágoras.

1. Determina la altura del siguiente cono.



$h = \sqrt{55}$ cm

2. Encuentra el volumen del siguiente sólido geométrico.



Volumen = $\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi$ cm³

Indicador de logro

2.1 Calcula la altura y el volumen de un cono, utilizando el teorema de Pitágoras.

Secuencia

En octavo grado se estudió que el volumen de un cono es la tercera parte del volumen de un cilindro, dados su radio y su altura es posible calcular este volumen. En esta clase la altura del volumen no está dada y debe encontrarse utilizando el teorema de Pitágoras. Además, en esta lección se utiliza este teorema, para resolver problemas aplicados al entorno y a la misma matemática.

Propósito

Ⓟ, Ⓢ Lo importante es observar que es posible calcular la altura del cono utilizando el teorema de Pitágoras ya que por definición, la altura de un sólido es perpendicular a la base. Este resultado se estudió en séptimo grado.

Solución de algunos ítems:

1.
Sea h la altura del cono.

$$8^2 = h^2 + 3^2$$
$$h^2 = 64 - 9$$
$$h = \sqrt{55} \text{ cm}$$

2.
En este problema, la figura está compuesta por dos conos, cuyo lado mide 3 cm y el radio de la base mide 1 cm.

Sea h la altura de cada cono.

$$3^2 = h^2 + 1^2$$
$$h^2 = 9 - 1$$
$$h = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Si V representa el volumen de cada cono.

$$V = \frac{1}{3}\pi(1)^2(2\sqrt{2}) = \frac{2}{3}\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$$

Luego, el volumen de toda la figura es:

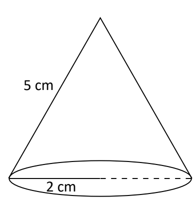
$$2 \times \frac{2}{3}\sqrt{2}\pi = \frac{4}{3}\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$$

Fecha: **U6 2.1**

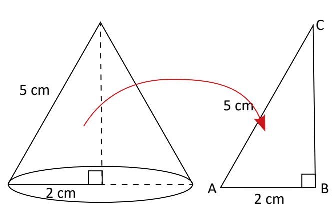
Ⓟ Calcula la altura y el volumen del cono.

Volumen del cono:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



Ⓢ Al trazar la altura se forma un triángulo rectángulo.



En el ΔABC: $AB^2 + BC^2 = CA^2$

$$BC^2 = CA^2 - AB^2$$
$$= 5^2 - 2^2$$
$$BC = \sqrt{21}$$

Así, $r = 2$ cm y $h = \sqrt{21}$ cm. Por tanto, el volumen es:

$$V_c = \pi(2)^2\sqrt{21} = \frac{4\sqrt{21}\pi}{3} \text{cm}^3$$

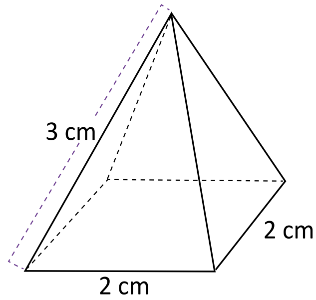
Ⓡ 1. $h = \sqrt{55}$ cm
2. Volumen $= \frac{4}{3}\sqrt{2}\pi$ cm^3

Tarea: página 138 del Cuaderno de Ejercicios.

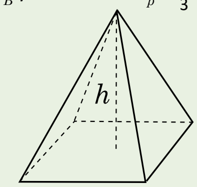
2.2 Cálculo de la medida de la altura y del volumen de la pirámide cuadrangular

P

Calcula la altura y el volumen de la pirámide cuadrangular.

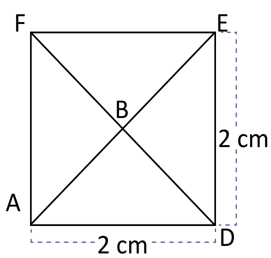


El volumen de una pirámide cuya área de la base es A_B y altura h es $V_p = \frac{1}{3} A_B\, h$.



S

Se traza la altura de la pirámide y se forma un triángulo rectángulo ABC, del cual solo se conoce la hipotenusa, pero no sus dos catetos. Se debe encontrar la medida del cateto BC, que es la altura de la pirámide, para ello se debe conocer el valor del cateto AB.

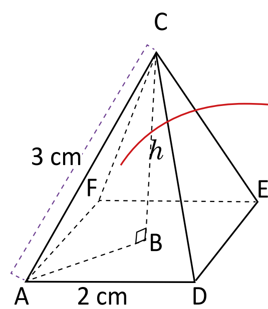


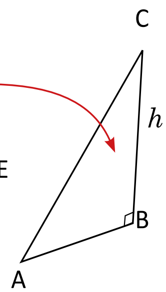
La base de la pirámide es un cuadrado donde $\overline{AB}$ es la semidiagonal. Como AD = 2 cm, entonces DE = 2 cm.

La medida de la diagonal EA se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras en el ΔADE:

$EA^2 = ED^2 + DA^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

$\Rightarrow EA = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$





Luego como $\overline{AB}$ es la semidiagonal, se tiene que AB = $\sqrt{2}$ cm. Con esta información ya se puede calcular la medida del cateto BC en el ΔABC; nuevamente aplicando el teorema de Pitágoras:

$$CA^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = CA^2 - AB^2 = 3^2 - \sqrt{2}^2 = 9 - 2 = 7$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{7}\text{, por lo tanto } h = \sqrt{7}\text{ (cm).}$$

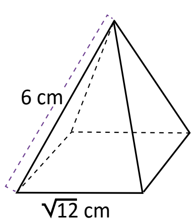
El volumen de la pirámide se obtiene con $V_p = \frac{1}{3} A_B\, h$; en este caso $A_B = 2 \times 2 = 4$ cm² y $h = \sqrt{2}$ cm, sustituyendo se obtiene que

$$V_p = \frac{1}{3}(4)\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\text{ cm}^3.$$

C

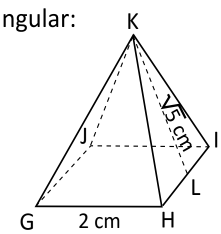
Para determinar el volumen o la altura desconocida de una pirámide, es necesario utilizar el teorema de Pitágoras.

1. Determina la altura de la pirámide cuadrangular.



$h = \sqrt{30}$

2. Si KL = $\sqrt{5}$ cm es la altura del triángulo isósceles KHI, determina el volumen de la siguiente pirámide cuadrangular:



$V = \frac{8}{3}$

Indicador de logro

2.2 Calcula la altura y el volumen de una pirámide, utilizando el teorema de Pitágoras.

Secuencia

En la clase anterior se estudió cómo calcular la altura de un cono utilizando el teorema de Pitágoras. Para esta clase, realizando un procedimiento similar, se encuentra la altura de una pirámide, pero se debe aplicar dos veces el teorema de Pitágoras.

Propósito

Ⓟ,Ⓢ Se observa que la altura de la pirámide forma un triángulo rectángulo, donde uno de sus catetos es la semidiagonal del cuadrado, de esta forma, para encontrar la altura se debe aplicar dos veces el teorema de Pitágoras.

Solución de algunos ítems:

1.
Sea d la diagonal del cuadrado.

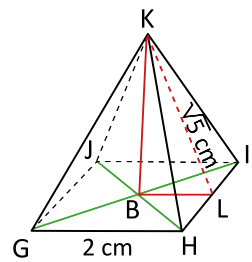
$$d^2 = (\sqrt{12})^2 + (\sqrt{12})^2$$
$$d^2 = 24$$
$$d = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras sobre el triángulo que se forma.

$$6^2 = (\sqrt{6})^2 + h^2$$
$$h^2 = 36 - 6$$
$$h^2 = 30$$
$$h = \sqrt{30} \text{ cm}$$

2.
Dado que KL es altura del triángulo isósceles, por propiedad L es el punto medio del triángulo KHI.

Sea B el centro del cuadrado y la distancia de ese punto a L es la mitad del lado del cuadrado.



$$(\sqrt{5})^2 = 1^2 + h^2$$
$$h^2 = 5 - 1$$
$$h = 2$$

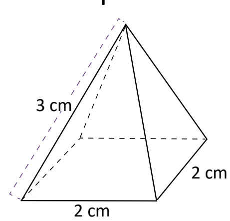
Por tanto, el volumen de la pirámide es:
$V = \frac{1}{3}4 \times 2 = \frac{8}{3}$ cm³.

Fecha:

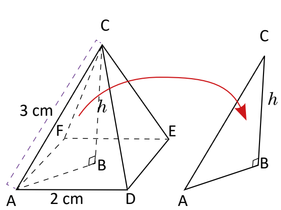
U6 2.2

Ⓟ Calcula la altura y el volumen de la pirámide.

Volumen del cono:
$$V = \frac{1}{3}A_b h$$



Ⓢ Al trazar la altura se forma un triángulo rectángulo.



La medida de la diagonal EA se obtiene:

$$EA^2 = AD^2 + AB^2$$
$$EA^2 = 2^2 + 2^2$$
$$EA = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Encontrando BC:

$$BC^2 = 3^2 - (\sqrt{2})^2$$
$$BC^2 = 9 - 2$$
$$BC = \sqrt{7}$$

El volumen de la pirámide es:
$$V = \frac{4}{3}\sqrt{7} \text{ cm}^3$$

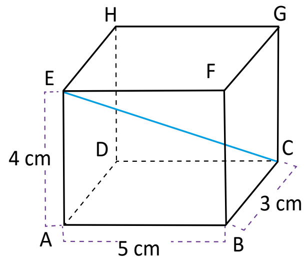
Ⓡ 1. $h = \sqrt{30}$ cm
2. Volumen = $\frac{8}{3}$ cm³

Tarea: página 139 del Cuaderno de Ejercicios.

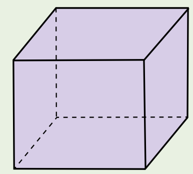
2.3 Cálculo de la medida de la diagonal de un ortoedro

P

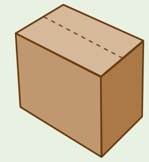
¿Cuál es la medida de la diagonal CE del siguiente ortoedro?



Un ortoedro es un prisma recto, y tiene la característica de que sus caras forman entre sí ángulos rectos.



Las cajas que usualmente se utilizan son ortoedros.

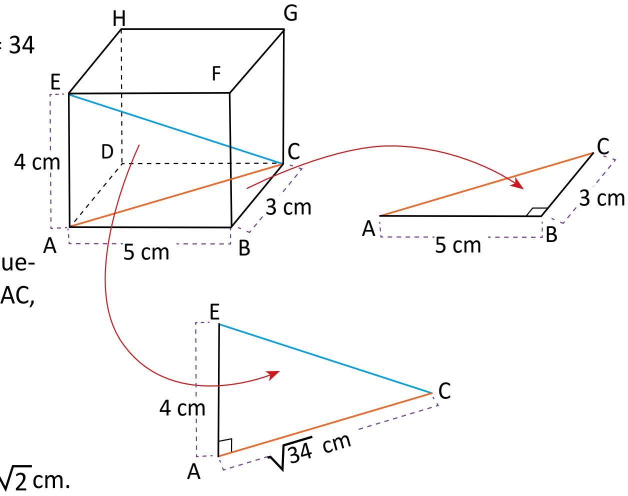


S

La diagonal CE es la hipotenusa del ΔACE. Se debe encontrar la medida del cateto $\overline{AC}$, para luego calcular la medida de $\overline{CE}$. Como AC también es la hipotenusa del ΔACB, se puede encontrar su medida aplicando el teorema de Pitágoras:

En el ΔACB, $AC^2 = BA^2 + CB^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$

$\Rightarrow AC = \sqrt{34}$



Como ya se conocen los catetos AC y EA, se puede aplicar el teorema de Pitágoras en el ΔEAC, para encontrar el valor de la hipotenusa CE.

$CE^2 = AC^2 + EA^2 = (\sqrt{34})^2 + 4^2 = 34 + 16 = 50$

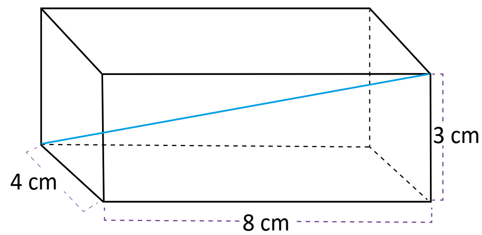
$\Rightarrow CE = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Por lo tanto, la diagonal del ortoedro mide $5\sqrt{2}$ cm.

C

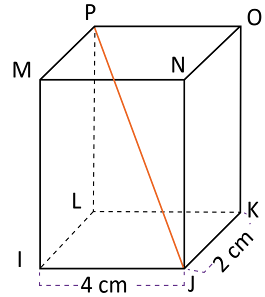
Para determinar la longitud de la diagonal del ortoedro se utiliza el teorema de Pitágoras dos veces.

1. Calcula la medida de la diagonal del ortoedro.



La diagonal mide $\sqrt{89}$ cm

2. Si en el ortoedro, la diagonal $JP = 3\sqrt{5}$, ¿cuánto mide su altura?



La altura del ortoedro es 5 cm

Indicador de logro

2.3 Calcula la medida de una de las diagonales de un ortoedro, utilizando el teorema de Pitágoras dos veces.

Secuencia

Anteriormente se ha estudiado, cálculo de la altura y volumen de un cono y de una pirámide. En esta clase se encuentra la diagonal de un ortoedro; además, esto permite desarrollar el razonamiento espacial del estudiante. Al igual que en la clase anterior, el teorema de Pitágoras se utiliza dos veces.

Propósito

Ⓟ,Ⓢ Lo importante es que el estudiante visualice que se pueden formar triángulos rectángulos, utilizando los ángulos rectos del ortoedro. Se pueden utilizar diversas analogías, como las cajas, o un salón de clases con forma de ortoedro.

Solución de algunos ítems:

1.
Aplicando el teorema de Pitágoras en la base y llamando x al lado desconocido:

$$x^2 = 8^2 + 4^2$$
$$x^2 = 64 + 16$$
$$x = \sqrt{80}$$

Aplicando nuevamente el teorema y llamando y al lado desconocido:

$$y^2 = 3^2 + (\sqrt{80})^2$$
$$y^2 = 9 + 80$$
$$y = \sqrt{89}$$

Por tanto, la diagonal mide $\sqrt{89}$ cm.

Observación:
En el ortoedro la altura coincide con la medida de sus aristas verticales.

2.
Aplicando el teorema de Pitágoras en el ΔLJI, para encontrar LJ:

$$LJ^2 = 4^2 + 2^2$$
$$LJ^2 = 20$$
$$LJ = \sqrt{20}$$

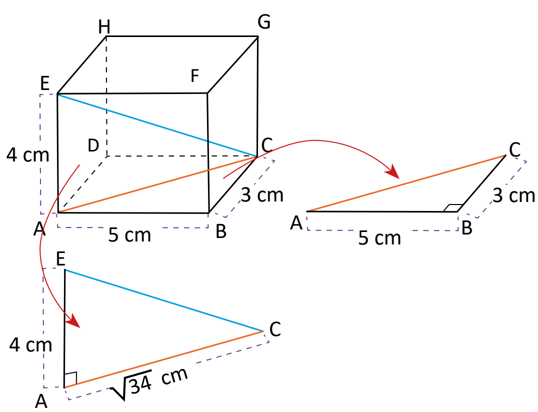
Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo PJL para encontrar LJ (la altura del triángulo).

$$PJ^2 = LP^2 + JL^2$$
$$(3\sqrt{5})^2 = LP^2 + (\sqrt{20})^2$$
$$PL^2 = 9 \times 5 - 20$$
$$PL = \sqrt{25} = 5$$

La altura del ortoedro es 5 cm.

Fecha: **U6 2.3**

Ⓟ Encuentra la medida de CE.



Aplicando Pitágoras.
En ΔACB: $AC^2 = BA^2 + CB^2$

$$AC^2 = 5^2 + 3^2$$
$$= 25 + 9$$
$$AC^2 = 34$$
$$AC = \sqrt{34}$$

En ΔEAC:

$$CE^2 = AC^2 + EA^2$$
$$CE^2 = (\sqrt{34})^2 + 4^2$$
$$= 34 + 16$$
$$CE = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Ⓡ 1. La diagonal mide $\sqrt{89}$ cm.
2. La altura del ortoedro es 5 cm.

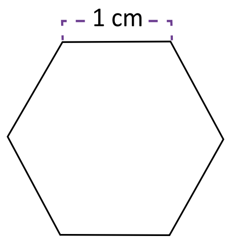
Tarea: página 140 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.4 Cálculo del área de un hexágono

P

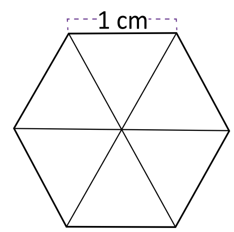
Calcula el área del hexágono regular, cuyos lados miden 1 cm.



Un polígono regular cumple que todos sus lados tienen la misma longitud, y todos los ángulos interiores tienen la misma medida.

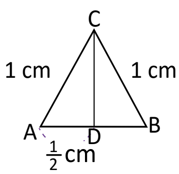
S

El hexágono regular está compuesto de 6 triángulos equiláteros congruentes. En este caso los 3 lados de cada triángulo miden 1 cm.



Se debe encontrar el área de un triángulo y luego multiplicarlo por 6, para encontrar el área del hexágono.

Se toma un triángulo cualquiera de los 6, y se denota por ΔABC. Se traza la altura desde el vértice C y utilizando el teorema de Pitágoras se encuentra su longitud:



$$CA^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow DC^2 = CA^2 - AD^2$$

$$\Rightarrow DC^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow DC = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

El área del ΔABC es: $(\Delta ABC) = \dfrac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,(\text{cm})^2$.

El área del hexágono es $\dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 6 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\,(\text{cm})^2$.

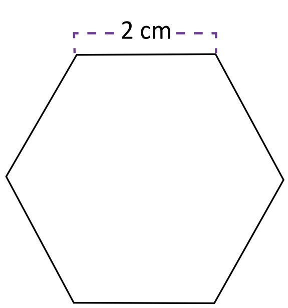
A la perpendicular trazada desde el centro de un polígono regular a cualquiera de sus lados se le llama **apotema**.

En el problema anterior la altura DC coincide con el apotema del hexágono.

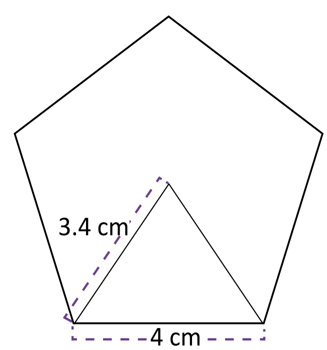
C

Para determinar el área de un polígono regular se puede utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar el apotema del polígono.

Encuentra la longitud del apotema y el área de los siguientes polígonos regulares.



El área del hexágono es aproximadamente $6\sqrt{3}$ cm



El área del pentágono es aproximadamente 27.5 cm

Indicador de logro

2.4 Calcula el área de un hexágono, conociendo la longitud de la altura del triángulo equilátero contenido en el hexágono.

Secuencia

En las clases anteriores se estudió el uso del teorema de Pitágoras para calcular la altura de algunos sólidos y posteriormente calcular su volumen. En el desarrollo de esta clase, se estudiará el cálculo del apotema de un hexágono utilizando el teorema de Pitágoras y posteriormente se calculará su área.

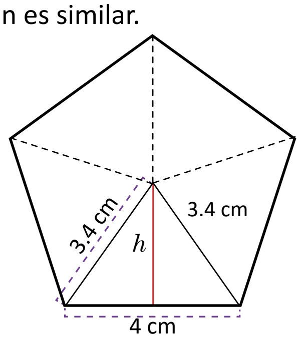
Propósito

Ⓟ, Ⓢ Utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar el área del hexágono. Aunque no se sepa la fórmula para calcular el área de un hexágono, se puede encontrar su valor utilizando una idea un tanto ingeniosa. Se trata de dividir en triángulos congruentes, se puede demostrar que estos triángulos son equiláteros, en este caso se puede omitir esta parte y asumirlo directamente.

Ⓒ La altura de un triángulo equilátero, divide al otro lado en dos segmentos iguales, esto se conoce de grados anteriores, pero se puede hacer un pequeño recordatorio sobre esto antes de iniciar la clase o cuando se esté desarrollando la solución del problema.

Solución de algunos ítems:

2. Se trata de una variante, un pentágono. La idea de la solución es similar.



Como las figuras son congruentes, los triángulos son todos isósceles.

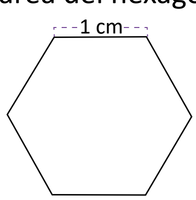
$$(3.4)^2 = h^2 + 2^2$$
$$h^2 = (3.4)^2 - 2^2$$
$$h^2 = 7.56$$
$$h \approx 2.75$$

Área del triángulo:
$\frac{4 \times 2.75}{2} = 5.5$
Área del pentágono:
$5.5 \times 5 = 27.5$
Por tanto, el área del pentágono es aproximadamente 27.5 cm².

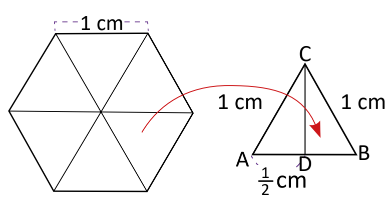
Observación: Utilizar calculadora solo para este ejercicio.

Fecha: **U6 2.4**

Ⓟ Calcula el área del hexágono.



Ⓢ Dividiendo en seis triángulos congruentes equiláteros.



$$CA^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow DC^2 = CA^2 - AD^2$$
$$\Rightarrow DC^2 = 1 - \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow DC^2 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(\Delta ABC) = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^2$$

El área del hexágono es: $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm²

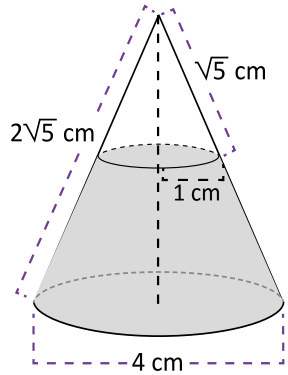
Ⓡ 1. Área: $6\sqrt{3}$ cm²
2. Área, aproximadamente: 27.5 cm²

Tarea: página 141 del Cuaderno de Ejercicios.

2.5 Practica lo aprendido

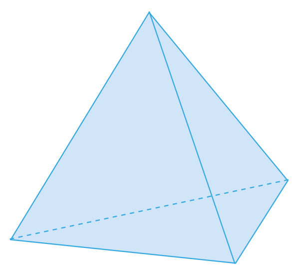
1. Encuentra el volumen del sólido que está sombreado de gris.

El volumen del sólido sombreado es: $\frac{14}{3}\pi$



2. Determina el área total de la pirámide, si los triángulos son equiláteros y la medida de sus lados es 3.

El área es: $9\sqrt{3}$



2.6 Practica lo aprendido

1. Calcula la medida del segmento BC del siguiente ortoedro.

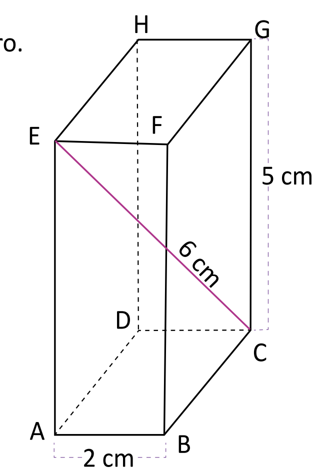
En el ΔACE, $6^2 = 5^2 + AC^2$

$AC^2 = 36 - 25$

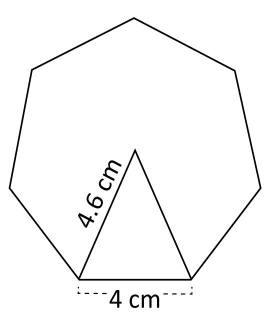
$AC = \sqrt{11}$

En el ΔABC, $(\sqrt{11})^2 = 2^2 + BC^2$

$BC^2 = 11 - 4$ entonces $BC = \sqrt{7}$



2. Calcula el área del siguiente heptágono regular.



Se forman siete triángulos isósceles congruentes, de altura h.

$h^2 = 4.6^2 - 2^2$

$h^2 = 17.16$

$h \approx 4.14$

Área de cada triángulo: $\frac{4 \times 4.14}{2} = 8.28$ cm^2

Área del heptágono:

$8.28 \times 7 = 57.96$ cm^2

Indicador de logro

2.5 y 2.6 Resuelve problemas sobre figuras y cuerpos geométricos donde se aplique el teorema de Pitágoras.

Solución de algunos ítems:

1.

Sea h_1 la altura del cono pequeño.

$$(\sqrt{5})^2 = 1^2 + h_1^{\,2}$$
$$h_1^{\,2} = 5 - 1$$
$$h_1 = \sqrt{4}$$
$$h_1 = 2$$

Sea V_1 el volumen del cono pequeño.

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \times (1)^2 \times 2$$
$$V_1 = \frac{2}{3}\pi$$

Sea h_2 la altura del cono grande.

$$(2\sqrt{5})^2 = 2^2 + h_2^{\,2}$$
$$h_2^{\,2} = 20 - 4$$
$$h_2 = \sqrt{16}$$
$$h_2 = 4$$

Sea V_2 el volumen del cono grande.

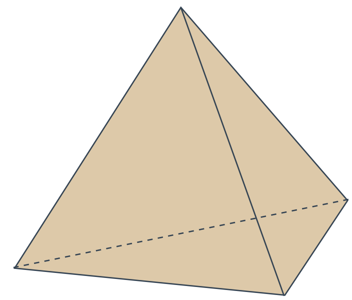
$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \times (2)^2 \times 4$$
$$V_2 = \frac{16}{3}\pi$$

Por tanto, el volumen de la parte sombreada es:

$$\frac{16}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{14}{3}\pi$$

2.

Como sus caras son triángulos equiláteros, su altura intercepta al otro lado en el punto medio.



Sea h la altura de una cara del triángulo.

$$3^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + h^2$$
$$h^2 = 9 - \frac{9}{4}$$
$$h = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

El área de una cara es: $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

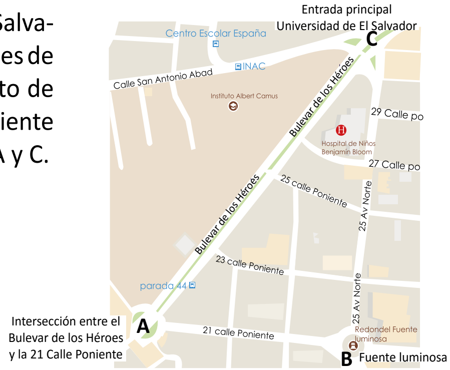
El área total de la figura es: $4 \times \frac{9\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm^2.

Tarea: página 142 del Cuaderno de Ejercicios.

2.7 Aplicación del teorema de Pitágoras

P

La distancia desde la entrada principal de la Universidad de El Salvador en San Salvador (punto C) hasta la fuente luminosa (punto B) es de 554.8 m; mientras que desde la fuente luminosa hasta el punto de intersección, entre el bulevar de los Héroes y la 21 calle poniente (punto A) es 375.6 m. Encuentra la distancia entre los puntos A y C.



S

En la situación anterior, se forma el triángulo rectángulo ABC, del cual ya se conoce la longitud de los catetos AB y BC. Utilizando el teorema de Pitágoras se encuentra la longitud de la hipotenusa CA:

$CA^2 = AB^2 + BC^2 = 375.6^2 + 554.8^2 \approx 141\,075.4 + 307\,803.0 = 448\,878.4$

$\Rightarrow CA \approx \sqrt{448878.4} \approx 670.$

C

El teorema de Pitágoras es aplicable para medir distancias, así fue posible determinar que la distancia entre la entrada principal de la Universidad de El Salvador, la intersección entre el bulevar de los Héroes y la 21 calle poniente es 670 m.

Calcula la altura del monumento a los Próceres, ubicado en el centro de la plaza Libertad de San Salvador. Ese monumento fue inaugurado por el presidente Manuel Enrique Araujo el 5 de noviembre de 1911, tras cumplirse 100 años del Primer Grito de Independencia y está esculpido en bronce, mármol, granito y concreto.

Indicador de logro

2.7 Aplica el teorema de Pitágoras a situaciones reales para calcular una distancia desconocida, realizando cálculos hasta un decimal.

Secuencia

Hasta la clase anterior, se utiliza el teorema de Pitágoras para resolver problemas aplicados dentro de la misma matemática. En esta clase, se utiliza el teorema de Pitágoras para resolver problemas en contexto, los cálculos involucran números decimales.

Propósito

Ⓟ,Ⓢ En el problema debe asumirse que el triángulo formado ABC es rectángulo. Lo importante es comprender que se puede utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar longitudes en un mapa, si se conocen dos distancias y si el triángulo formado por los tres puntos es un triángulo rectángulo.

Ⓒ Los datos son aproximados a los datos reales y pueden comprobarse con cualquier mapa confiable en internet.

Solución de algunos ítems:

Sea h la altura del monumento a los Próceres.

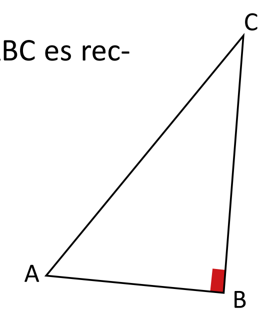
$$h^2 = (22.7)^2 - (10.9)^2$$
$$h^2 = 515.3 - 118.8$$
$$h^2 = 396.5$$
$$h = 19.9$$

Aplicación de la matemática al entorno:
El estudiante debe comprender que algunos conocimientos matemáticos como el teorema de Pitágoras permiten resolver problemas concretos del contexto, debe comprender además que otros contenidos no poseen una aplicación directa pero permiten la construcción de otros contenidos que sí son aplicables.

Fecha: **U6 2.7**

Ⓟ La distancia entre B y C es 554.8 m, también entre A y B es 375.6. Encuentra la distancia entre A y C.

Asumiendo que ΔABC es rectángulo.



Ⓢ $CA^2 = AB^2 + BC^2$
$= 375.6^2 + 554.8^2$
$\approx 141\,075.4 + 307\,803.0$
$\approx 448\,878.4$
Entonces, CA $\approx \sqrt{448\,878.4} \approx 670$ m.

Ⓡ Sea h la altura del monumento a los Próceres.

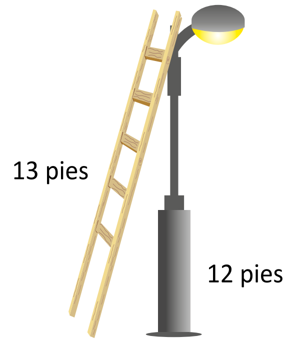
$$h^2 \approx (22.7)^2 - (10.9)^2$$
$$h^2 \approx 515.3 - 118.8$$
$$h^2 \approx 396.5$$
$$h \approx 19.9$$

Tarea: página 144 del Cuaderno de Ejercicios.

2.8 Practica lo aprendido

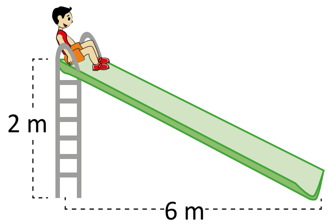
1. Mario tiene una escalera de 13 pies de longitud y quiere cambiar una lámpara que está a 12 pies de altura en un poste, ¿a qué distancia de la base del poste debe colocar la base de la escalera?

La distancia entre el poste y la escalera debe ser 5 pies



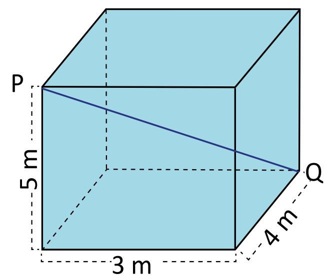
2. Miguel desea deslizarse por un tobogán, cuya altura máxima es 3.5 m. La distancia que hay entre el punto donde toca el suelo y la base del tobogán es de 6 m. ¿Qué distancia recorrerá en el tobogán?

Recorrerá 6.94 m.



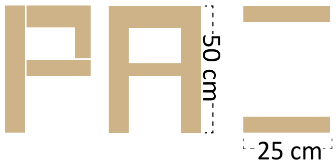
3. En una cisterna de concreto, don Juan necesita colocar un alambre entre los puntos P y Q, ¿cuál debe ser la medida de este?

$PQ = 5\sqrt{2}$ m

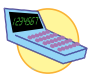


2.9 Practica lo aprendido

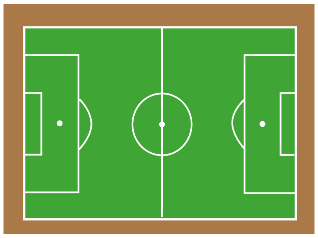
1. En la escuela El Zapote, se está preparando un evento alusivo a la paz, para ello, a José le han encomendado colocar en el muro de la escuela, las letras alusivas al evento, ¿cuántos centímetros de mecate le hacen falta para terminarlo? Hacen falta 55.9 cm de mecate para terminarlo.



2. El césped del estadio Cuscatlán en San Salvador, tiene 107 m de largo y la diagonal mide 127 m, ¿cuál es el área de la cancha?



El área de la cancha es 7 319.9 m^2



Indicador de logro

2.8 Resuelve problemas sobre figuras y cuerpos geométricos donde se aplique el teorema de Pitágoras.

Solución de algunos ítems:

Clase 2.8

1. El poste con el suelo forman un ángulo de 90°, por tanto, puede aplicarse el teorema de Pitágoras.

Sea b la distancia a encontrar.

$$12^2 + b^2 = 13^2$$
$$b^2 = 169 - 144$$
$$b^2 = 25$$
$$b = 5$$

2. **Observación:** Para resolver este problema, utilizar los datos de la indicación y no los que aparecen en la imagen.

3. Se puede aplicar el teorema de Pitágoras en la base. Sea x la distancia desconocida:

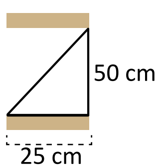
$$x^2 = 3^2 + 4^2$$
$$x^2 = 25$$
$$x = 5$$

Aplicando nuevamente el teorema para encontrar PQ.

$$PQ^2 = 5^2 + 5^2$$
$$PQ = \sqrt{50}$$
$$PQ = 5\sqrt{2}$$

Clase 2.9

1. La altura de todas las letras es 50 cm.



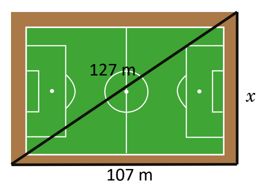
El triángulo que se forma es rectángulo. Sea h la hipotenusa.

$$h^2 = 25^2 + 50^2$$
$$h^2 = 625 + 2\,500$$
$$h^2 = 3\,125$$
$$h = 55.90$$

Hacen falta 55.9 cm de mecate para terminarlo.

Tarea: página 145 del Cuaderno de Ejercicios.

2.



$$x^2 + 107^2 = 127^2$$
$$x^2 = 16\,129 - 11\,449$$
$$x^2 = 4\,680$$
$$x \approx 68.41$$

Área de la cancha:

68.41 m × 107 m ≈ 7 319.9 m^2

Los estudiantes deben contar con su calculadora para la siguiente clase.

Unidad 7. Ángulo inscrito y central

Competencias de la Unidad

Determinar la medida de los ángulos inscritos y semiinscritos en una circunferencia, utilizando los teoremas y relaciones sobre cuerdas y arcos en una circunferencia, para estudiar las características y propiedades de figuras planas.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Construcción de ángulos usando el transportador
- Clasificación y construcción de triángulos
- Clasificación y construcción de cuadriláteros
- Clasificación de cuerpos geométricos
- Figuras simétricas
- Perímetro y área de triángulos y cuadriláteros
- Patrones de cubos y prismas rectangulares y triangulares
- Longitud de la circunferencia y área del círculo
- Longitud y área de sectores circulares notables
- Volumen de prisma
- Traslaciones, giros y simetría rotacional

Séptimo grado

Unidad 8: Figuras planas y construcción de cuerpos geométricos
- Movimiento de figuras en el plano
- Círculos, segmentos y ángulos
- Planos, cuerpos geométricos y área total del prisma, pirámide y cilindro

Octavo grado

Unidad 4: Paralelismo y ángulos de un polígono
- Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
- Rectas paralelas y ángulos

Unidad 5: Criterios de congruencia de triángulos
- Congruencia de triángulos

Unidad 6: Características de los triángulos y cuadriláteros
- Triángulos
- Paralelogramos

Unidad 7: Área y volumen de sólidos geométricos
- Características y elementos de los sólidos geométricos
- Cálculo del volumen de sólidos geométricos
- Aplicaciones de volúmenes
- Áreas de sólidos geométricos
- Aplicaciones de áreas

Noveno grado

Unidad 5: Figuras semejantes
- Semejanza
- Semejanza de triángulos
- Semejanza y paralelismo
- Aplicación de semejanza y triángulos semejantes

Unidad 6: Teorema de Pitágoras
- Teorema de Pitágoras
- Aplicación del teorema de Pitágoras

Unidad 7: Ángulo inscrito y central
- Ángulo central e inscrito
- Aplicación de ángulos central e inscrito

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Ángulo central e inscrito	1	1. Elementos de la circunferencia
	1	2. Definición y medida de ángulos inscritos
	1	3. Ángulo inscrito, parte 1
	1	4. Ángulo inscrito, parte 2
	1	5. Teorema del ángulo inscrito
	1	6. Practica lo aprendido
	1	7. Arcos congruentes
	1	8. Practica lo aprendido
2. Aplicación del ángulo central e inscrito	1	1. Construcción de tangentes a una circunferencia
	1	2. Cuerdas y arcos de la circunferencia
	1	3. Aplicación con semejanza de triángulos
	1	4. Paralelismo
	1	5. Cuatro puntos en una circunferencia
	1	6. Ángulo semiinscrito
	2	7. Practica lo aprendido
	1	Prueba de la Unidad 7

16 horas clase + prueba de la Unidad 7

Puntos esenciales de cada lección

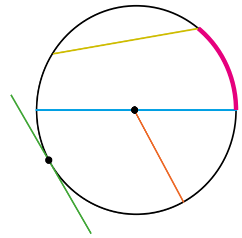
Lección 1: Ángulo central e inscrito
En la clase 1.2 se determina el teorema del ángulo central de una forma intuitiva, utilizando los instrumentos geométricos, para que en las clases posteriores a esta lección se realice la demostración formal del mismo.

Lección 2: Aplicación de ángulo central e inscrito
Habiendo demostrado el teorema de la medida del ángulo inscrito anteriormente, en esta lección se hace uso de este resultado como herramienta principal para la deducción de algunas propiedades.

1.1 Elementos de la circunferencia

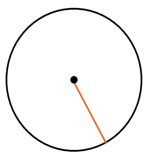
P

Escribe el nombre que reciben los elementos dibujados en la siguiente circunferencia:

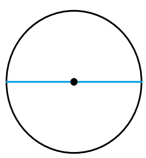


S

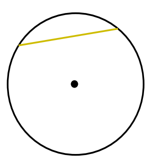
Segmentos.



El segmento que va del centro a un punto de la circunferencia se llama **radio.**

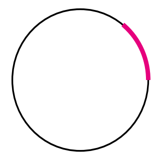


El segmento que va de un punto de la circunferencia a otro y pasa por el centro se llama **diámetro.**



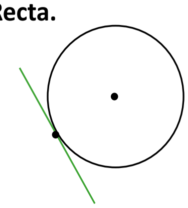
El segmento que va de un punto de la circunferencia a otro se llama **cuerda.**

Arco.



La parte de la circunferencia delimitada por dos puntos en ella se llama **arco**.

Recta.



La recta que toca la circunferencia en un punto se llama **tangente.**

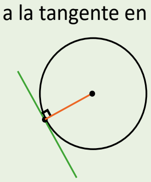
El punto donde la recta tangente toca la circunferencia se llama: **punto de tangencia.**

C

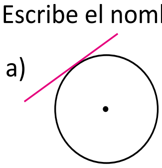
Los elementos de la circunferencia son:

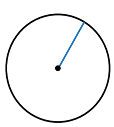
- Los segmentos: radio, diámetro y cuerda
- Las rectas: tangente
- El arco de la circunferencia

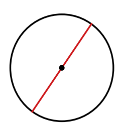
El radio al punto de tangencia es perpendicular a la tangente en ese punto.

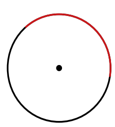


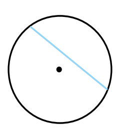
1. Escribe el nombre de los elementos señalados en cada circunferencia:

a) 
Recta tangente

b) 
Radio

c) 
Diámetro

d) 
Arco

e) 
Cuerda

2. Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el nombre del elemento que es $\frac{1}{2}$ del diámetro? Radio

b) ¿Cuál es el nombre de la cuerda de mayor longitud de una circunferencia? Diámetro

c) ¿Cómo es la recta tangente y el radio al punto de tangencia de una circunferencia? Perpendiculares

d) Al colocar dos puntos sobre la circunferencia, ¿cuántos arcos se forman? Dos

Indicador de logro

1.1 Identifica los elementos de una circunferencia.

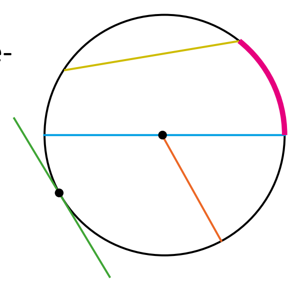
Secuencia

En primero y segundo ciclo se conocieron los elementos del círculo, luego en séptimo se retomó el círculo para trabajar con sus elementos, determinar el significado de recta tangente a la circunferencia y deducir propiedades a partir de las características de dos círculos que se intersecan. Para esta clase se hace un recordatorio de los elementos del círculo, con la diferencia de que se presentan como elementos de la circunferencia; además, se presenta a la recta tangente a la circunferencia como un elemento más. En este grado los estudiantes ya tienen claridad en cuanto a comprender la relación entre el círculo y la circunferencia, por lo que se espera que no haya confusión en ellos respecto al título de la clase.

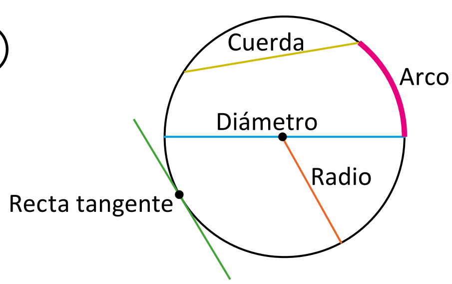
Para este caso el primer ítem se considera completo al escribir los nombres de todos los literales.

Fecha: **U7 1.1**

(P) Escribe el nombre de cada elemento en la circunferencia.



(S)



(R) 1.
a) Recta tangente
b) Radio
c) Diámetro
d) Arco
e) Cuerda

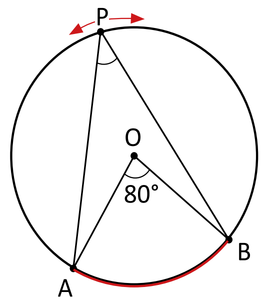
2.
a) Radio
b) Diámetro
c) Perpendiculares
d) Dos

Tarea: página 148 del Cuaderno de Ejercicios.

1.2 Definición y medida de ángulos inscritos

P

Realiza el dibujo en una hoja de papel y mide el ∢BPA desplazando el punto P a diferentes lugares de la circunferencia. Compara la medida de ∢BPA con la medida del ∢BOA.



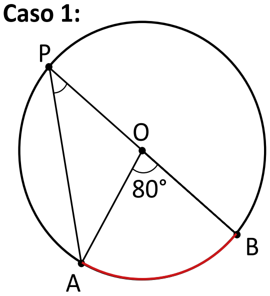
El ángulo BOA se llama **ángulo central**, porque su vértice es el centro de la circunferencia.

Observa que el ∢BPA y el ∢BOA comparten el mismo arco $\widehat{AB}$.

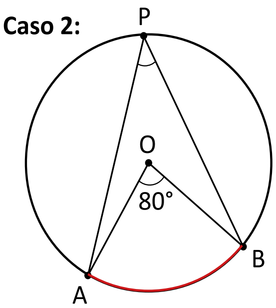
S

Utilizando regla y compás para hacer el dibujo y desplazar el punto P en la circunferencia, se tienen los siguientes casos:

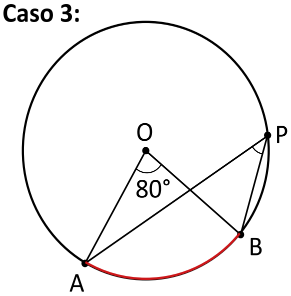
Caso 1:



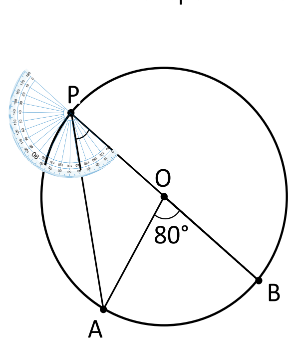
Caso 2:

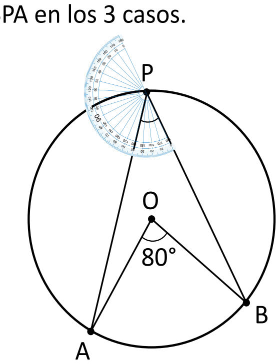


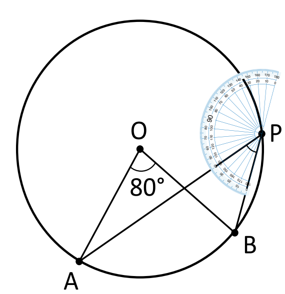
Caso 3:



Utilizando transportador se mide el∢BPA en los 3 casos.







En los tres casos la medida del ∢BPA = 40°.

Y el ∢BOA = 2∢BPA o bien el ∢BPA = $\frac{1}{2}$∢BOA.

C

Los ángulos cuyo vértice está en la circunferencia se llaman: **ángulos inscritos**.

Subtender el mismo arco significa compartir el mismo arco.

En una circunferencia se cumple que la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco que cualquier ángulo inscrito, es el doble de la medida de cualquier ángulo inscrito que subtienda el mismo arco.

Determina la medida de un ángulo inscrito a una circunferencia cuyo ángulo central correspondiente al mismo arco mide 160°. Utiliza un esquema como en el Problema inicial.

Indicador de logro

1.2 Distingue los tipos de ángulos inscritos en la circunferencia y su relación intuitiva con el ángulo central.

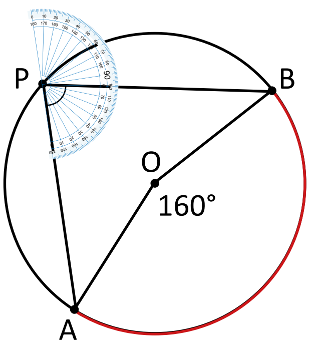
Secuencia

Para esta clase se introduce el concepto de ángulo inscrito en una circunferencia y al mismo tiempo se presenta la propiedad relacionada a su medida. Se plantea la propiedad intuitivamente a partir de la construcción, es decir, a través del uso de los instrumentos de geometría. Esta clase es importante porque en las tres siguientes se retoman algunos elementos vistos en ella, los cuales se detallarán en el apartado de propósitos.

Propósito

Ⓟ Presentar los 3 posibles casos que se pueden dar al hacer el movimiento del punto en la circunferencia. Pueden ser más formas las que los estudiantes hagan, pero cualquiera de las formas hechas por ellos se corresponderá a uno de los casos presentados. El 1 hace referencia al caso en el que el ángulo central está sobre un lado del ángulo inscrito, el 2 al caso en el que el ángulo central está al interior del ángulo inscrito y el 3 al caso en el que el ángulo central está fuera del ángulo inscrito.

Solución de algunos ítems:



La medida del $\sphericalangle BPA = 80°$

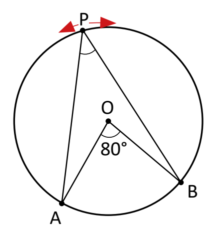
$\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPA$

o bien

$\sphericalangle BPA = \frac{1}{2}\sphericalangle BOA$.

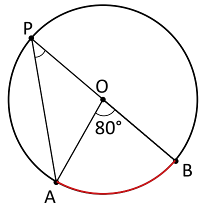
Fecha: **U7 1.2**

Ⓟ Mide el $\sphericalangle BPA$ desplazando P en diferentes posiciones en la circunferencia. Compara la medida del $\sphericalangle BPA$ con la del $\sphericalangle BOA$.

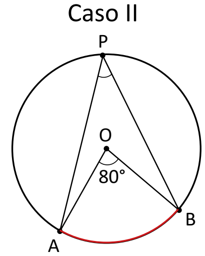


Ⓢ

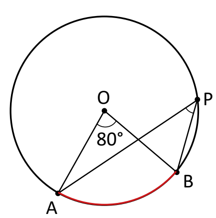
Caso I



Caso II

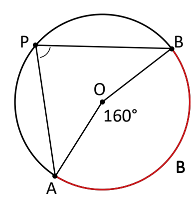


Caso III



En los tres casos $\sphericalangle BPA = 40°$, y $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPA$ o $\sphericalangle BPA = \frac{1}{2}\sphericalangle BOA$.

Ⓡ



La medida del $\sphericalangle BPA = 80°$

$\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BPA$

o bien

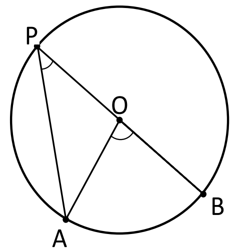
$\sphericalangle BPA = \frac{1}{2}\sphericalangle BOA$.

Tarea: página 149 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Ángulo inscrito, parte 1

P

Demuestra que el ∢BOA = 2∢BPA cuando el centro queda en algún lado del ΔBPA.



El diámetro es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

S

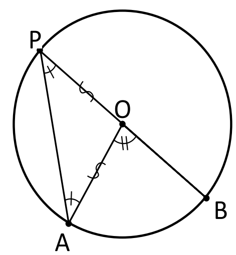
En el ΔAOP: OP = OA (son radios de la circunferencia).

Entonces, ∢OPA = ∢PAO (a lados iguales se oponen ángulos iguales).

Por otra parte ∢BOA = ∢OPA + ∢PAO (∢BOA es ángulo exterior del ΔAOP).

Por lo tanto, ∢BOA = 2∢OPA.   Como ∢OPA = ∢BPA.

Entonces, ∢BOA = 2∢BPA.



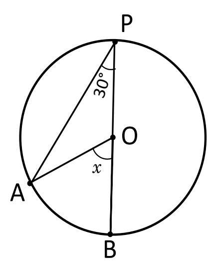
C

En los ángulos inscritos cuyo lado coincide con el diámetro de la circunferencia se cumple que **la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco es el doble de la medida del ángulo inscrito.**

E

Determina el valor de x para cada caso.

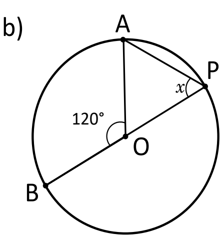
a)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

Por lo tanto, x = 2(30°) = 60°.

b)



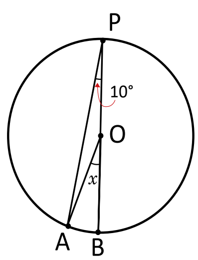
Como ∢BOA = 2∢BPA.

Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA

Por lo tanto, $x = \frac{120°}{2}$ = 60°.

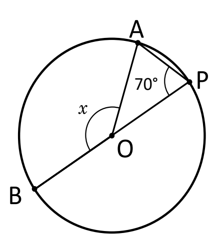
Determina el valor de x para cada caso.

a)



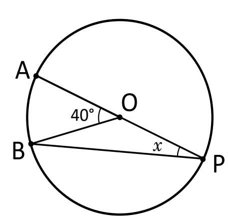
x = 20°

b)



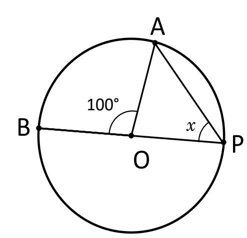
x = 140°

c)



x = 20°

d)



x = 50°

Indicador de logro

1.3 Determina las medidas de ángulos inscritos cuyo lado coincide con un diámetro de la circunferencia.

Secuencia

Siendo que en la clase anterior se estableció la propiedad referente a la medida de un ángulo inscrito intuitivamente, para esta clase se hará de una manera formal, para ello se tomará una situación similar al caso 1 de la Solución de la clase anterior.

Propósito

Ⓟ Aplicar el concepto de radio de una circunferencia, las características de un triángulo isósceles, la propiedad de la medida de un ángulo externo de un triángulo para la resolución del Problema inicial. El primer paso en la estrategia de solución es determinar que el ΔAOP es isósceles, dado que sus lados coinciden con dos radios de la circunferencia. Luego se aplica que la medida del ángulo externo BOA es la suma de los dos ángulos internos no adyacentes a él, que en este caso son iguales por el hecho de que ΔAOP es isósceles..

Ⓢ Aplicar directamente la propiedad del ángulo inscrito para determinar el valor de una incógnita, en ángulos que están en una posición diferente a la del Problema inicial.

Solución de algunos ítems:

a) Como ∢BOA = 2∢BPA.
Por lo tanto, x = 2(10°) = 20°.

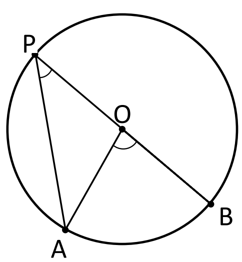
c) Como ∢BOA = 2∢BPA.

Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Por lo tanto, $x = \frac{40°}{2}$ = 20°.

Fecha: **U7 1.3**

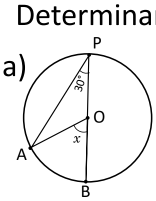
Ⓟ Demuestra que ∢BOA = 2∢BPA.



Ⓢ En el ΔAOP: OP = OA (son radios de la circunferencia) **(1)**
∢OPA = ∢PAO (a lados iguales se oponen ángulos iguales)
∢BOA = ∢OPA + ∢PAO (∢BOA es ángulo exterior del ΔAOP) **(2)**
∢BOA = 2∢OPA (por (1) y (2))
Entonces, ∢BOA = 2∢BPA.

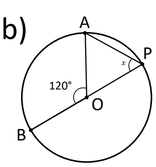
Ⓔ Determinando x en cada caso.

a)



∢BOA = 2∢BPA
Por lo tanto,
x = 2(30°) = 60°.

b)



∢BOA = 2∢BPA
Entonces,
∢BPA = $\frac{1}{2}$∢BOA

Por lo tanto, $x = \frac{120}{2}$ = 60°.

Ⓡ a) x = 20° b) x = 140°
c) x = 20° d) x = 50°

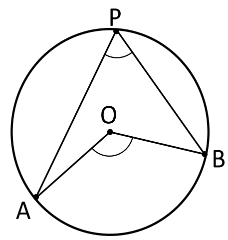
Tarea: página 150 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 1

1.4 Ángulo inscrito, parte 2

P

Demuestra que el ∢BOA = 2∢BPA cuando el centro está dentro del ∢BPA.



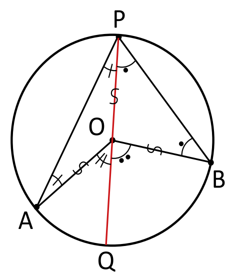
S

Se traza el diámetro QP.

∢QOA = 2∢QPA y ∢BOQ = 2∢BPO (por lo visto en la clase 3).

Sumando ambas igualdades:
∢QOA + ∢BOQ = 2∢QPA + 2∢BPQ = 2(∢QPA + ∢BPQ).

Por lo tanto, ∢BOA = 2∢BPA.



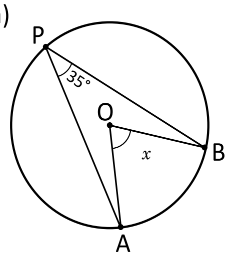
C

En los ángulos inscritos que tiene en el interior el ángulo central, que subtiende el mismo arco, también se cumple que **la medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito**.

E

Determina el valor de x para cada caso.

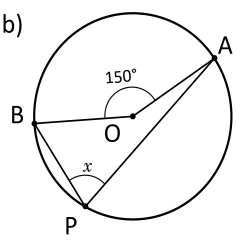
a)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

Por lo tanto, $x = 2(35°) = 70°$.

b)



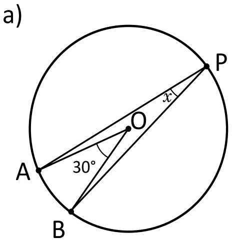
Como ∢BOA = 2∢BPA.

Entonces ∢BPA = $\frac{1}{2}$∢BOA.

Por lo tanto $x = \frac{150°}{2} = 75°$.

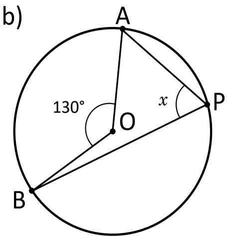
Determina el valor de x para cada caso.

a)



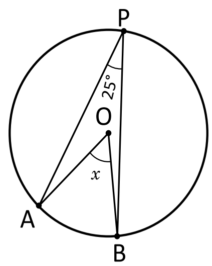
x = 15°

b)



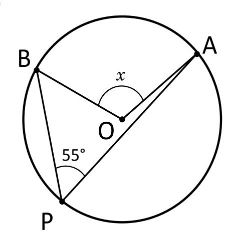
x = 65°

c)



x = 50°

d)



x = 110°

Unidad 7

147

Indicador de logro

1.4 Determina las medidas de ángulos inscritos cuyo ángulo central está al interior del ángulo inscrito.

Secuencia

Para esta clase se toma una situación similar al caso 2 de la Solución de la clase 1.2 para realizar la demostración de la propiedad. Como estrategia para su realización, se utiliza la demostración hecha en la clase anterior.

Propósito

Ⓟ El primer paso en la estrategia de solución, es hacer la construcción auxiliar del diámetro QP para llegar a una situación similar a la del Problema inicial de la clase anterior y poder utilizar el resultado que se obtuvo como una herramienta para realizar la demostración.

Ⓢ Aplicar directamente la propiedad del ángulo inscrito para determinar el valor de una incógnita, en ángulos que están en una posición diferente a la del Problema inicial.

Solución de algunos ítems:

a) Como ∢BOA = 2∢BPA.

Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

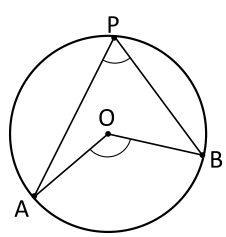
Por lo tanto, $x = \frac{30°}{2} = 15°$.

c) Como ∢BOA = 2∢BPA.

Por lo tanto, $x = 2(25°) = 50°$.

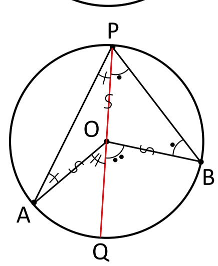
Fecha: **U7 1.4**

Ⓟ Demuestra que:
∢BOA = 2∢BPA
cuando el centro está dentro del ∢BPA.



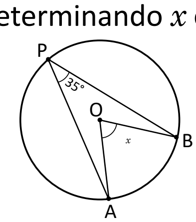
Ⓢ

Se traza el diámetro QP.
∢QOA = 2∢QPA y ∢BOQ = 2∢BPO
(por lo visto en la clase 3)
Sumando ambas igualdades:
∢QOA + ∢BOQ = 2∢QPA + 2∢BPQ
= 2(∢QPA + ∢BPQ)
Por lo tanto, ∢BOA = 2∢BPA.



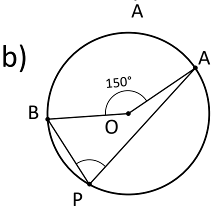
Ⓔ Determinando x en cada caso.

a)



Como ∢BOA = 2∢BPA.
Por lo tanto,
$x = 2(35°) = 70°$.

b)



Como ∢BOA = 2∢BPA
∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.
Por lo tanto,
$x = \frac{150°}{2} = 75°$.

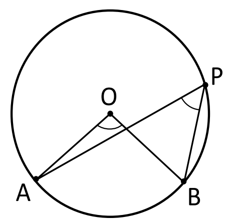
Ⓡ a) $x = 15°$ b) $x = 65°$
c) $x = 50°$ d) $x = 110°$

Tarea: página 151 del Cuaderno de Ejercicios.

1.5 Teorema del ángulo inscrito

P

Demuestra que el ∢BOA = 2∢BPA cuando el centro está fuera del ∢BPA.



S

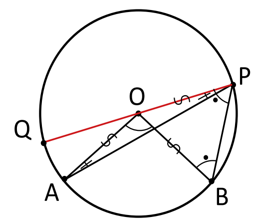
Se traza el diámetro QP.

∢AOQ = 2∢APQ y ∢BOQ = 2∢BPQ (por lo visto en la clase 3).

Como ∢BOA = ∢BOQ – ∢AOQ.

Entonces, ∢BOA = 2∢BPQ – 2∢APQ = 2(∢BPQ – ∢APQ) = 2∢BPA.

Por lo tanto, ∢BOA = 2∢BPA.



C

En una circunferencia, para cualquier ángulo inscrito se cumple que **la medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco**.

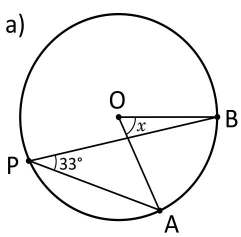
Además los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco tienen igual medida.

Este resultado se conoce como **El teorema del ángulo inscrito**.

E

Determina el valor de x para cada caso.

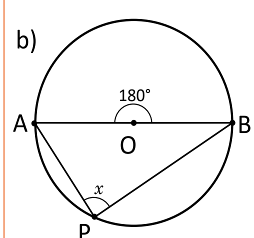
a)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

Por lo tanto, x = 2(33°) = 66°.

b)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

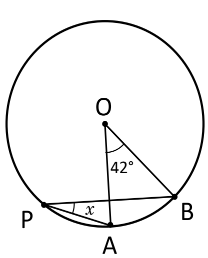
Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Por lo tanto, $x = \frac{180°}{2}$ = 90°.

El ángulo inscrito a la semicircunferencia mide 90°.

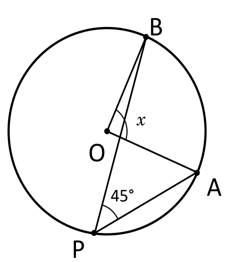
Determina el valor de x, y y z para cada caso.

a)



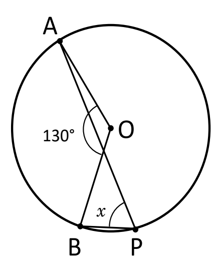
x = 21°

b)



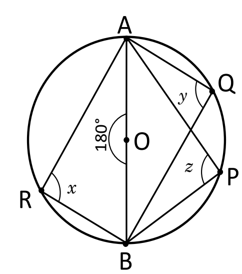
x = 90°

c)



x = 65°

d)



x = 90° y = 90°
z = 90°

Indicador de logro

1.5 Utiliza el teorema del ángulo inscrito para determinar la medida de ángulos en la circunferencia.

Secuencia

Se toma una situación similar al caso 3 de la Solución de la clase 1.2 para realizar la demostración de la propiedad. Como estrategia para su realización, se utiliza la demostración hecha en la clase 1.3.

Propósito

Ⓟ El primer paso en la estrategia de solución es hacer la construcción auxiliar del diámetro QP para llegar a una situación similar a la del caso 1 tal como la de Problema inicial de la clase 1.3 y poder utilizar el resultado que se obtuvo como una herramienta más para realizar la demostración.

Ⓢ Además de que se aborda la Conclusión es importante señalar en el recuadro de información adicional que el nombre que recibe la relación existente entre las medidas del ángulo inscrito y central es **Teorema del ángulo inscrito**. Ⓒ Aplicar directamente la propiedad del ángulo inscrito para determinar el valor de una incógnita, en ángulos que están en una posición diferente a la del Problema inicial.

Solución de algunos ítems:

a) Como ∢BOA = 2∢BPA.

Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Por lo tanto, $x = \frac{42°}{2} = 21°$.

b) Como ∢BOA = 2∢BPA.
Por lo tanto, $x = 2(45°) = 90°$.

d) Como ∢BOA = 2∢BPA.

Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Por lo tanto, $z = \frac{180°}{2} = 90°$.

Como ∢BOA = 2∢BQA.

Entonces, ∢BQA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

Por lo tanto, $y = \frac{180°}{2} = 90°$.

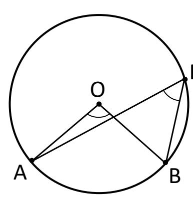
Como ∢BOA = 2∢BRA.

Entonces, ∢BRA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

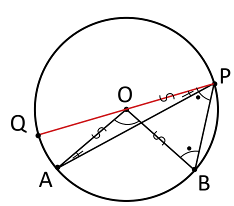
Por lo tanto, $x = \frac{180°}{2} = 90°$.

Fecha: **U7 1.5**

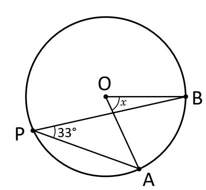
Ⓟ Demuestra que
∢BOA = 2∢BPA.
Cuando el centro está fuera del ∢BPA.



Ⓢ Se traza el diámetro QP.
∢AOQ = 2∢APQ y ∢BOQ = 2∢BPQ
(por lo visto en la clase 3)
Como ∢BOA = ∢BOQ – ∢AOQ
∢BOA = 2∢BPQ – 2∢APQ
= 2(∢BPQ – ∢APQ)
= 2∢BPA.
Por lo tanto, ∢BOA = 2∢BPA.

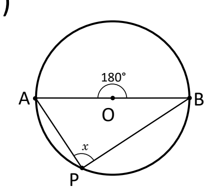


Ⓔ a)



Como:
∢BOA = 2∢BPA
Por lo tanto,
$x = 2(33°) = 66°$.

b)



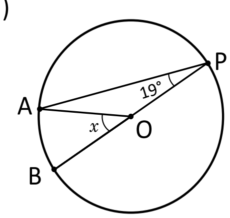
Como:
∢BOA = 2∢BPA
∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.
Por lo tanto,
$x = \frac{180}{2} = 90°$.

Ⓡ a) $x = 21°$ b) $x = 90°$
c) $x = 65°$ d) $x = 90°$
$y = 90°$
$z = 90°$

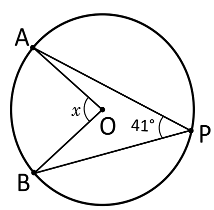
Tarea: página 152 del Cuaderno de Ejercicios.

1.6 Practica lo aprendido

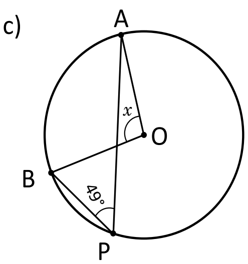
1. Determina el valor de x para cada caso.

a)


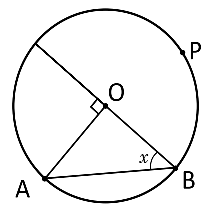
$x = 38°$

b)


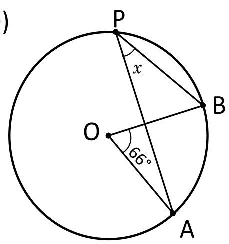
$x = 82°$

c)


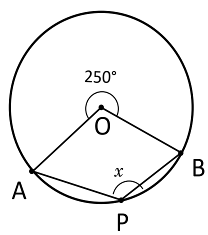
$x = 98°$

d)


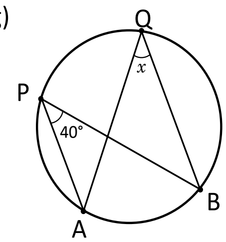
$x = 45°$

e)


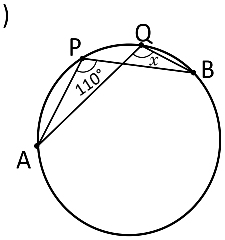
$x = 33°$

f)


$x = 125°$

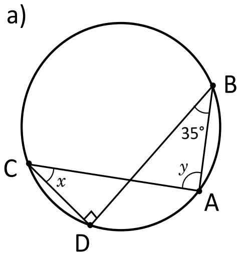
g)


$x = 40°$

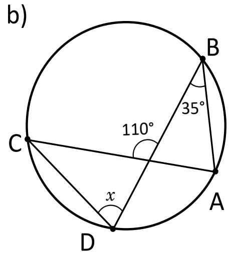
h)


$x = 110°$

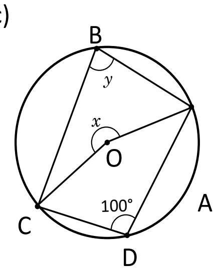
2. Determina el valor de x y de y según cada caso.

a)


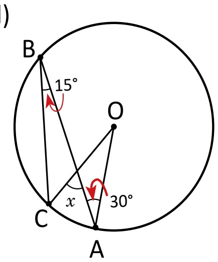
$x = 35°$
$y = 90°$

b)


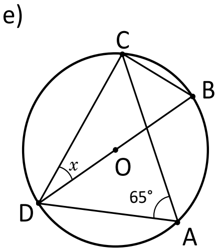
$x = 75°$

c)


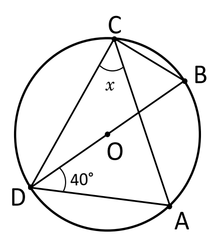
$x = 200°$
$y = 80°$

d)


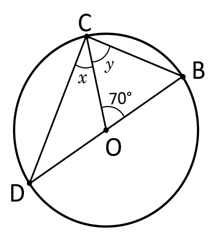
$x = 60°$

e)


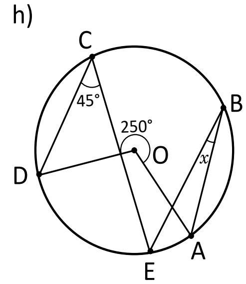
$x = 25°$

f)


$x = 50°$

g)


$x = 35°$
$y = 55°$

h)


$x = 10°$

Unidad 7

Indicador de logro

1.6 Resuelve problemas correspondientes al ángulo central e inscrito.

Solución de algunos ítems:

1.

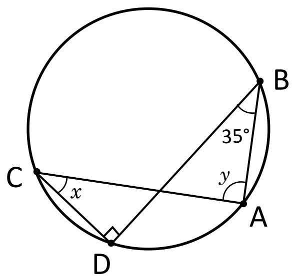
a) Como ∢BOA = 2∢BPA
Por lo tanto, x = 2(19°) = 38°.

e) Como ∢BOA = 2∢BPA
Entonces, ∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.
Por lo tanto, $x = \frac{66°}{2}$ = 33°.

h) x = ∢BQA = ∢BPA = 110°, porque ambos ángulos inscritos subtienden al $\overset{\frown}{AB}$.

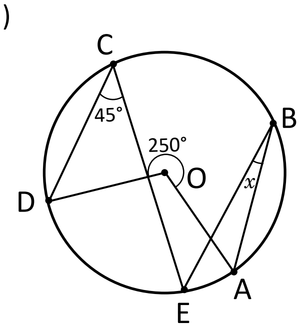
2.

a)



Como ∢CED = 90° – 35° = 55°,
entonces ∢BEA = ∢CED = 55°.
Por tanto, y = 180° – 35° – 55° = 90°.

h)



Primero se traza $\overline{OE}$.
∢AOD = 360° – 250° = 110°
∢EOD = 2(45°) = 90°
∢AOD = ∢AOE + ∢EOD
110° = ∢AOE + 90°
∢AOE = 20°

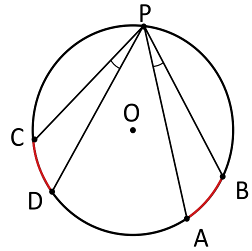
Por lo tanto,
x = ∢ABE = $\frac{1}{2}$ ∢AOE = $\frac{20°}{2}$ = 10°.
x = 10°

Tarea: página 153 del Cuaderno de Ejercicios.

1.7 Arcos congruentes

P

Compara la medida del ∢BPA con el ∢DPC en la siguiente figura si $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$.



La notación $\overset{\frown}{AB}$, significa la porción de arco comprendida entre el punto A y el punto B.

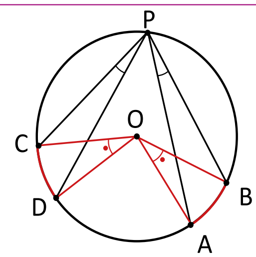
S

Se construyen los ángulos ∢BOA y ∢DOC.

∢BOA = ∢DOC ($\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$ por hipótesis).

∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA y ∢DPC = $\frac{1}{2}$ ∢DOC (por ángulo inscrito).

Por lo tanto, ∢BPA = ∢DPC.



C

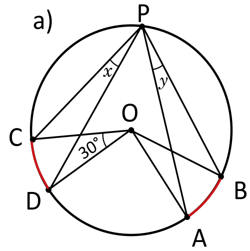
En una circunferencia los ángulos inscritos, que subtienden arcos de igual medida, tienen igual medida.

También se cumple que si dos ángulos inscritos son de igual medida, entonces los arcos que subtienden también son de igual medida.

E

Determina el valor de x y y para cada caso donde $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$.

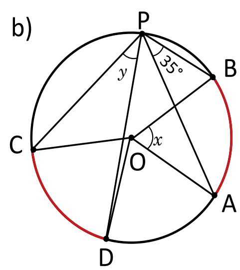
a)



Como ∢BOA = ∢DOC.

Por lo tanto,
$x = y = \frac{30°}{2} = 15°$.

b)



Como ∢BOA = 2∢BPA.

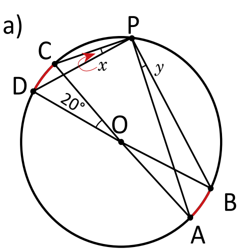
Por lo tanto, $x = 2(35°) = 70°$.

Por otra parte, ∢BOA = ∢DOC.

Entonces, y = ∢DPC = ∢BPA = 35°.

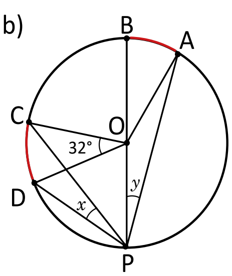
Determina el valor de x y y para cada caso. Considera $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

a)



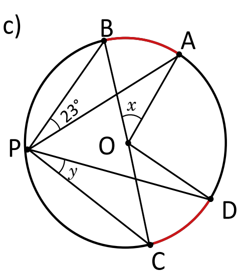
$x = y = 10°$

b)



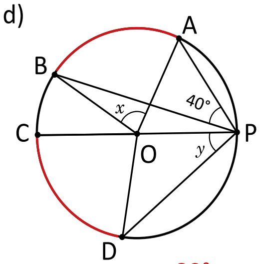
$x = y = 16°$

c)



$x = 46°$
$y = 23°$

d)



$x = 80°$
$y = 40°$

Indicador de logro

1.7 Determina la medida de ángulos inscritos que subtienden arcos de igual medida.

Secuencia

Para esta clase se establece la propiedad de que en ángulos inscritos que subtienden arcos de igual medida, tienen igual medida y recíprocamente si dos ángulos inscritos son de igual medida, entonces los arcos que subtienden también son de igual medida. Para la demostración de dicha propiedad se hace la construcción auxiliar de los respectivos ángulos centrales. Esta estrategia se emplea debido a que en séptimo se trabajó la longitud de arco de segmentos circulares cuyo ángulo se consideraba ángulo central en una circunferencia, por lo que ya saben que si dos arcos son iguales entonces deben ser iguales los ángulos centrales que los subtienden.

Propósito

Ⓟ Como primer paso para realizar la comparación, se trazan los ángulos centrales ∢BOA y ∢DOC, luego se determina que estos ángulos centrales son de igual medida porque $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$ (en séptimo se trabajó la longitud de arco de un sector circular).

Ⓢ Aplicar directamente la propiedad del ángulo inscrito para determinar el valor de una incógnita, en ángulos que están en una posición diferente a la del Problema inicial.

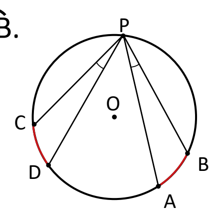
Solución de algunos ítems:

a) Como ∢BOA = ∢COD.
Por lo tanto, $y = x = \frac{20°}{2} = 10°$.

c) Como ∢BOA = 2∢BPA.
Por lo tanto, $x = 2(23°) = 46°$.
Por otra parte, ∢BOA = ∢DOC.
Entonces, y = ∢DPC = ∢BPA = 23°.

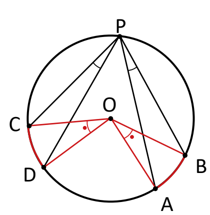
Fecha: **U7 1.7**

Ⓟ Compara la medida del ∢BPA con el ∢DPC en la figura si $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$.



Ⓢ Se construyen los ángulos: ∢BOA y ∢DOC.

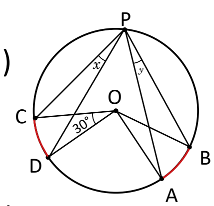
∢BOA = ∢DOC
($\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AB}$ por hipótesis)



∢BPA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA y
∢DPC = $\frac{1}{2}$ ∢DOC
(por ángulo inscrito)

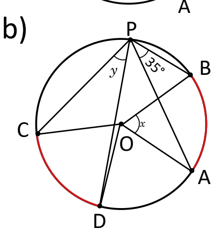
Por lo tanto, ∢BPA = ∢DPC.

Ⓔ a)



Como
∢BOA = ∢DOC.
Por lo tanto,
$y = x = \frac{30}{2} = 15°$.

b)



Como
∢BOA = 2∢BPA.
Por lo tanto,
$x = 2(35°) = 70°$.
Por otra parte,
∢BOA = ∢DOC.
Entonces,
y = ∢DPC = ∢BPA = 35°.

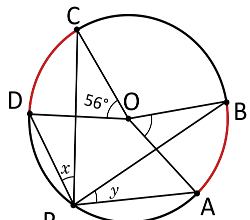
Ⓡ a) $x = y = 10°$ b) $x = y = 16°$
c) $x = 46°$, $y = 23°$ d) $x = 80°$, $y = 40°$

Tarea: página 154 del Cuaderno de Ejercicios.

1.8 Practica lo aprendido

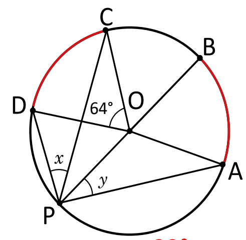
1. Determina el valor de x y y para cada caso. Considera $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

a) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



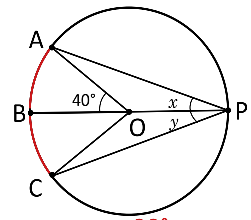
$x = 28°$
$y = 28°$

b) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



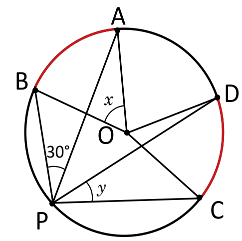
$x = 32°$
$y = 32°$

c) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$



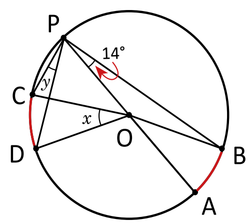
$x = 20°$
$y = 20°$

d) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



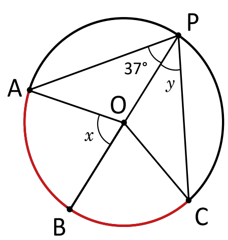
$x = 60°$
$y = 30°$

e) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



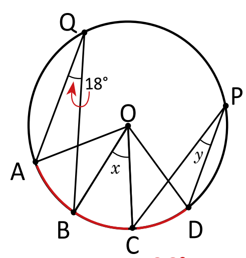
$x = 28°$
$y = 14°$

f) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$



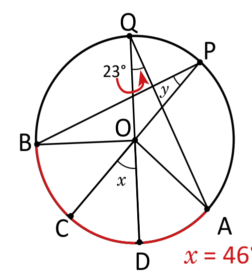
$x = 74°$
$y = 37°$

g) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$



$x = 36°$
$y = 18°$

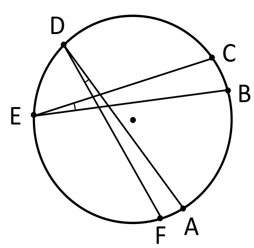
h) $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DA}$



$x = 46°$
$y = 23°$

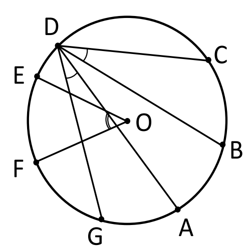
2. En las siguientes circunferencias, determina los arcos que sean de igual medida.

a) ∢ADF = ∢CEB



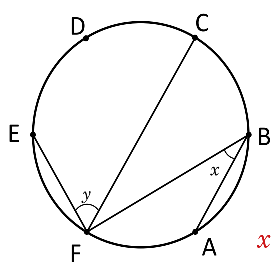
$\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CB}$

b) ∢FOE = 2∢CDB y ∢BDC = ∢ADG



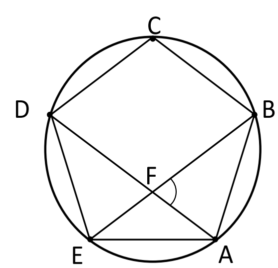
$\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{AG}$

3. Determina el valor de x y y si en la siguiente figura los puntos A, B, C, D, E, F dividen la circunferencia en 6 arcos iguales.



$x = 30°$
$y = 60°$

4. En la siguiente figura ABCDE es un pentágono regular, se trazan las diagonales AD y BE. Determina la medida de ∢BFA.



∢BFA = 72°

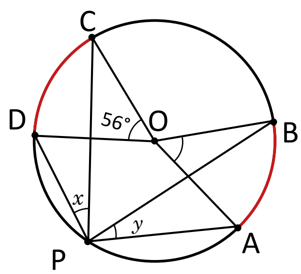
Indicador de logro

1.8 Resuelve problemas correspondientes al ángulo central e inscrito.

Solución de algunos ítems:

1.

a)



$\measuredangle BOA = \measuredangle DOC$ porque $\widehat{BA} = \widehat{CD}$,

$\measuredangle BOA = \measuredangle DOC = 56°$ por ser ángulos opuestos por el vértice.

Por tanto,

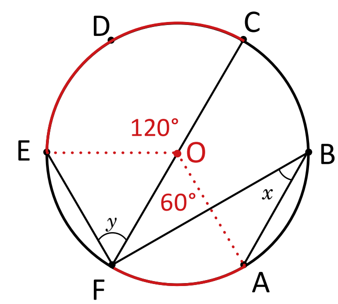
$x = y = \frac{56}{2} = 28°$.

3.

Como son seis arcos iguales entonces los 360° de la circunferencia deben dividirse también en seis ángulos iguales.

$360 \div 6 = 60°$.

Es decir, por cada arco corresponde un ángulo central de 60°.



Como $\measuredangle COE = 2\measuredangle CFE$.

Entonces, $\measuredangle CFE = \frac{1}{2}\measuredangle COE$.

Por lo tanto, $y = \frac{120°}{2} = 60°$.

Como $\measuredangle AOF = 2\measuredangle ABF$.

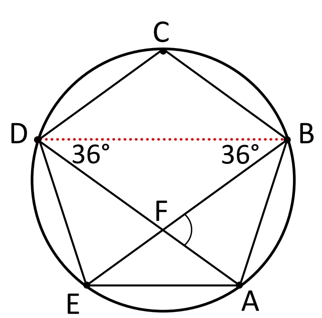
Entonces, $\measuredangle ABF = \frac{1}{2}\measuredangle AOF$.

Por lo tanto, $x = \frac{60°}{2} = 30°$.

4.

Como se tiene un pentágono regular cada uno de los arcos delimitados por sus vértices tienen igual medida. Por tanto, cada arco corresponde a un ángulo central de $\frac{360°}{5} = 72°$. Entonces, $\measuredangle FBD = \measuredangle FDB = \frac{72°}{2} = 36°$.

En el ΔBFD, $\measuredangle BFA = \measuredangle FBD + \measuredangle FDB = 72°$.

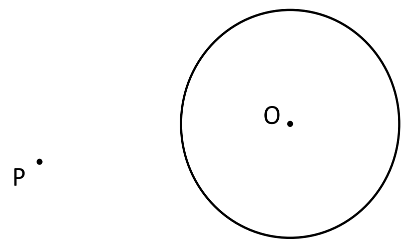


Tarea: página 155 del Cuaderno de Ejercicios.

2.1 Construcción de tangentes a una circunferencia

P

Dada la siguiente circunferencia y el punto P, construye con regla y compás las rectas que pasan por el punto P y son tangentes a la circunferencia.



S

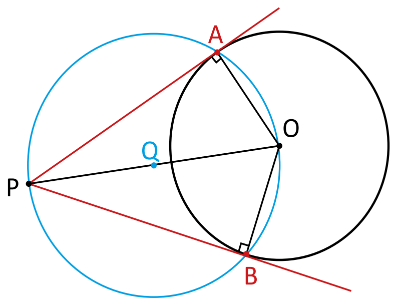
Tomando el punto medio del segmento PO, denotado por Q.

Se traza la circunferencia con centro Q y radio QO.

Se marcan los puntos A y B donde se intersectan las circunferencias.

Entonces, ∢OAP = ∢PBO = 90° (ambos subtienden un arco de 180°).

Por lo tanto, las rectas PA y PB son tangentes a la circunferencia de centro O.



La recta perpendicular al radio en un punto de la circunferencia es la tangente a la circunferencia.

C

Utilizando los resultados de ángulo inscrito se pueden construir las rectas que pasan por un punto P y tangentes a una circunferencia dada siguiendo los pasos de la solución.

1. Dibuja otra circunferencia y otro punto P fuera de dicha circunferencia, diferentes a los del inicio de la clase y construye las tangentes a la circunferencia que pasen por el punto P.

2. Con base al ejercicio de la clase responde:

   a) ¿Son iguales los segmento PA y PB?

   b) ¿Por qué?

Puedes aplicar congruencia de triángulos para justificar tu respuesta.

Indicador de logro

2.1 Construye las tangentes a una circunferencia desde un punto fuera de dicha circunferencia.

Secuencia

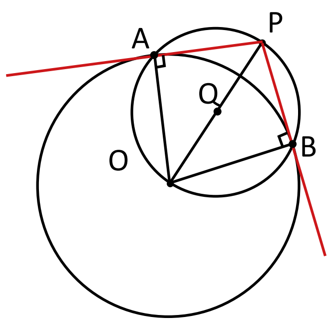
En séptimo grado se presentó por primera vez el concepto de recta tangente a una circunferencia, por lo que los estudiantes ya conocen este tipo de rectas. Para esta clase se construyen dos rectas tangentes de manera que estas pasen por un punto externo a la circunferencia. Además, haciendo uso de la propiedad de ángulos inscritos se concluye que una recta perpendicular al radio en un punto de la circunferencia es la recta tangente en ese punto.

Propósito

Ⓟ Después de realizar la construcción de las rectas tangentes, se debe señalar la información contenida en el recuadro de recordatorio, en la que se establece que una recta perpendicular a un radio sobre un punto de la circunferencia es una recta tangente.

Solución de algunos ítems:

1.

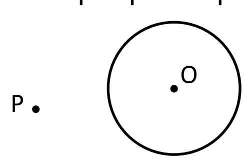


2.
a) Sí

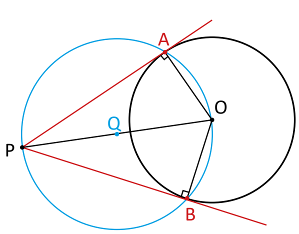
b) Porque los ΔOAP y ΔOBP son triángulos rectángulos y sus hipotenusas y uno de sus catetos que les corresponden a los radios son de igual medida (criterio de congruencia de triángulos rectángulos). Por tanto, $PA = PB$.

Fecha: **U7 2.1**

Ⓟ Construye las rectas que pasan por P y son tangentes a la circunferencia.

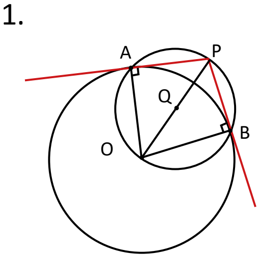


Ⓢ



1. Tomando el punto medio de $\overline{PO}$, denotado por Q, se traza la circunferencia con centro Q y radio $\overline{QO}$.
3. Se marcan los puntos A y B donde se intersecan las circunferencias.
4. Entonces, $\sphericalangle OAP = \sphericalangle PBO = 90°$ (ambos subtienden un arco de 180°).
   Por lo tanto, las rectas PA y PB son tangentes a la circunferencia de centro O.

Ⓡ 1.

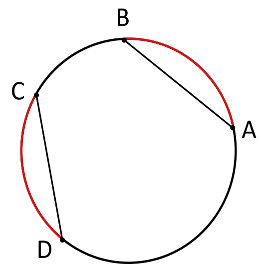


Tarea: página 156 del Cuaderno de Ejercicios.

2.2 Cuerdas y arcos de la circunferencia

P

En la siguiente figura $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Compara la longitud de las cuerdas AB y CD.



S

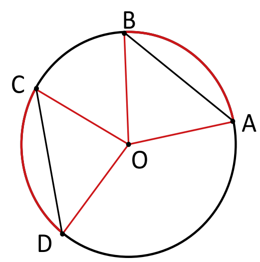
Trazando los radios OA, OB, OC y OD.

∢BOA = ∢DOC (porque $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$).

OA = OB = OC = OD (son radios de la circunferencia).

Entonces, ΔBOA ≅ ΔDOC (por criterio LAL).

Por lo tanto, AB = CD (por la congruencia).



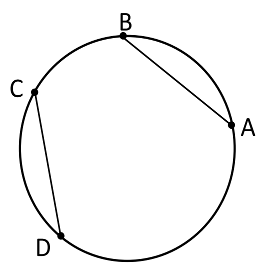
Para aplicar el criterio de congruencia LAL es necesario que dos lados y el ángulo entre ellos sean congruentes.

C

En una circunferencia si la medida de dos arcos es igual, entonces la medida de las cuerdas que subtienden esos arcos es igual.

E

En la siguiente figura AB = CD. Compara la longitud de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$.

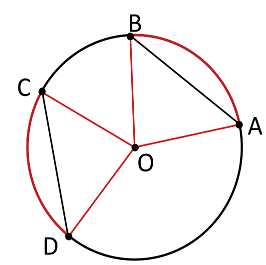


Trazando los radios OA, OB, OC y OD.

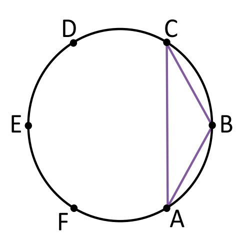
Entonces, ΔBOA ≅ ΔDOC (por criterio LLL).

Luego, ∢BOA = ∢DOC (por la congruencia).

Por lo tanto, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (el ángulo central es igual).



Los puntos A, B, C, D, E, F dividen la circunferencia en 6 arcos iguales. Clasifica las figuras que se forman uniendo los puntos indicados en cada literal. Observa el ejemplo:



a) ABC BA = BC (porque $\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{BC}$).
R. ABC es un triángulo isósceles.

b) ABDE

c) ACE

d) ACD

e) ABCDEF

f) DEF

g) ABCD

Unidad 7

153

Indicador de logro

2.2 Utiliza las cuerdas y los arcos congruentes para clasificar figuras con lados iguales.

Secuencia

Anteriormente se han trabajado los criterios de congruencia de triángulos; también se ha mostrado que si 2 arcos tienen igual medida entonces los ángulos centrales que los subtienden tienen igual medida. Lo anterior se usa como herramienta para establecer que en una circunferencia si la medida de 2 arcos es igual, entonces la medida de las cuerdas que subtienden es igual.

Propósito

Ⓟ Primero se construyen los ΔBOA y ΔDOC que son isósceles porque cada lado de ellos tiene la misma medida ya que son radios de la circunferencia. Luego por el criterio LAL se determina que los triángulos son congruentes (los lados en color rojo son de igual medida así como el ángulo comprendido entre ellos ya que AB = CD).

Determinar que AB = CD, con una construcción similar a la de los ΔBOA y ΔDOC, con la diferencia que se aplica el criterio LLL para determinar que los triángulos son congruentes ya que como hipótesis se establece que AB = CD. Luego a partir de la congruencia establecida se concluye que los arcos son iguales ya que son subtendidos por ángulos de igual medida.

Solución de algunos ítems:

b) ∢ABD = 90° (porque $\overline{AD}$ es un diámetro).
De la misma manera: ∢BDE = ∢DEA = ∢EAB = 90°.
R. ABDE es un rectángulo.

c) AC = CE = EA (porque AC = CE = EA) ACE es un triángulo equilátero.

d) ∢ACD = 90° (porque $\overline{AD}$ es un diámetro)
R. ACD es un triángulo rectángulo.

e) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA}$
∢ABC = ∢BCD = ∢CDE = ∢DEF = ∢EFA
(porque AB = BC = CD = DE = EF = FA)
R. ABCDEF es un hexágono regular.

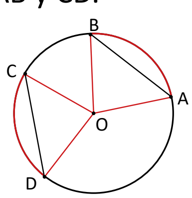
f) DE = EF (porque DE = EF)
R. DEF es un triángulo isósceles.

g) AB = CD (porque $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$)
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ (porque ∢ACB = ∢DBC como $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$)
R. ABCD es un trapecio isósceles.

Fecha: **U7 2.2**

Ⓟ En la figura $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Compara la longitud de las cuerdas AB y CD.

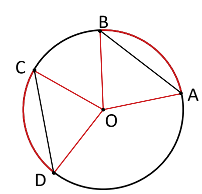
Ⓢ



Trazando los radios OA, $\overset{\frown}{OB}$, $\overset{\frown}{OC}$ y OD.
∢BOA = ∢DOC (porque AB = CD)
OA = OB = OC = OD (son radios de la circunferencia).

Entonces, ΔBOA ≌ ΔDOC (por criterio LAL).
Por lo tanto, AB = CD (por la congruencia).

Ⓔ Si AB = CD entonces:



Al trazar OA, OB, OC y OD.
ΔBOA ≅ ΔDOC. (Por LLL)
∢BOA = ∢DOC (por congruencia)
Por tanto, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.
(El ángulo central es igual)

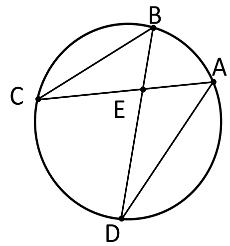
Ⓡ b) AB = DE y AE = BD
(porque $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DE}$ y $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BD}$)
R. ABDE es un rectángulo.

Tarea: página 157 del Cuaderno de Ejercicios.

2.3 Aplicación con semejanza de triángulos

P

En la siguiente figura determina si se cumple que el ΔAED ~ ΔBEC.



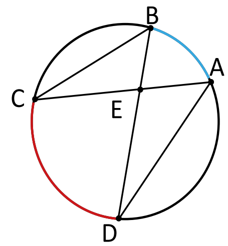
S

En la figura ∢AED = ∢BEC (son opuestos por el vértice).

∢DBC = ∢DAC (subtienden el mismo arco).

Pero ∢EBC = ∢DBC y ∢DAE = ∢DAC.

Por lo tanto, ΔAED ~ ΔBEC (por criterio AA).



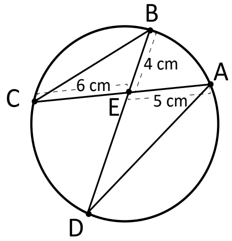
Para aplicar el criterio AA solo es necesario que dos ángulos sean congruentes.

C

Para determinar semejanza entre triángulos es necesario observar los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.

E

En la siguiente figura determina la medida del segmento ED.



Como ΔAED ~ ΔBEC .

Entonces, $\frac{ED}{EC} = \frac{AE}{BE}$.

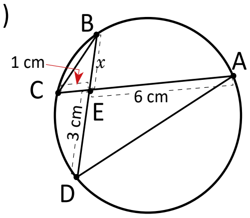
Por lo tanto, ED = EC × $\frac{AE}{BE}$ = 6 × $\frac{5}{4}$ = 7.5.

ED = 7.5 cm

Cuando dos triángulos son semejantes, la razón entre sus lados homólogos se mantiene constante.

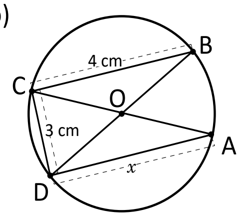
1. Determina x en las siguientes figuras:

a)



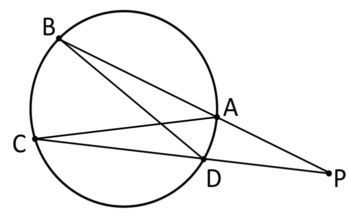
x = 2 cm

b)



x = 4 cm

2. En la siguiente figura determina qué condiciones son necesarias para que ΔACP ~ ΔDPB.



¿Es necesario algo más?

Indicador de logro

2.3 Resuelve problemas con triángulos semejantes utilizando el teorema del ángulo inscrito.

Secuencia

Anteriormente se ha trabajado el teorema de los ángulos opuestos, y se determinó si dos triángulos son semejantes. De igual manera en la clase 1.7 de esta unidad los estudiantes aprendieron que dos ángulos inscritos tienen la misma medida si subtienden arcos de igual medida. Por lo que en esta clase se usan esos hechos para demostrar que para determinar la semejanza entre triángulos como los del Problema inicial es necesario observar los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco.

Propósito

Ⓟ Después de realizar la semejanza de los triángulos, señalar a los estudiantes que lean la información contenida en el recuadro de la pista.

Ⓢ Después de realizar la semejanza de los triángulos, señalar a los estudiantes que lean la información contenida en el recuadro de la pista.

Solución de algunos ítems:

1.

a) Como $\Delta AED \sim \Delta BEC$ (por criterio de semejanza AA).

Entonces, $\frac{ED}{EC} = \frac{AE}{BE}$.

Por lo tanto,

$BE = x = AE \times \frac{EC}{ED} = 6 \times \frac{1}{3} = 2$

$x = 2$ cm

b) En los triángulos ΔADC y ΔBCD, $\measuredangle ADC = \measuredangle BCD = 90°$, $CA = DB$ y $\overline{CD}$ es común.

Por lo tanto, $\Delta ADC \cong \Delta BCD$.

Luego $x = BC = 4$

$x = 4$ cm

2. En los ΔACP y ΔDBP, $\measuredangle ACP = \measuredangle DBP$ (por ser ángulos inscritos subtendidos por $\overset{\frown}{AD}$), $\measuredangle P$ es común.

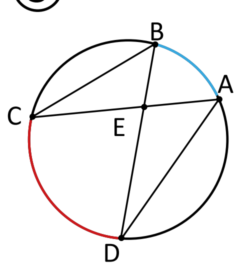
Por lo tanto, $\Delta ACP \sim \Delta DBP$ (Por el criterio de semejanza AA).

No se hacen necesarias otras condiciones.

Fecha: **U7 2.3**

Ⓟ En la figura determina si se cumple que el $\Delta AED \backsim \Delta BEC$.

Ⓢ

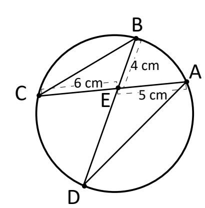


En la figura $\measuredangle AED = \measuredangle BEC$.
(Son opuestos por el vértice)
$\measuredangle DBC = \measuredangle DAC$.
(Subtienden el mismo arco)

Pero $\measuredangle EBC = \measuredangle DBC$ y $\measuredangle DAE = \measuredangle DAC$

Por lo tanto, $\Delta AED \sim \Delta BEC$.
(Por criterio AA).

Ⓔ En la figura $\Delta AED \backsim \Delta BEC$



Entonces, $\frac{ED}{EC} = \frac{AE}{BE}$.

Por tanto, $ED = EC \times \frac{AE}{BE}$

$= 6 \times \frac{5}{4}$

$= 7.5$

Ⓡ 1.

a) $x = 2$ cm

b) $x = 4$ cm

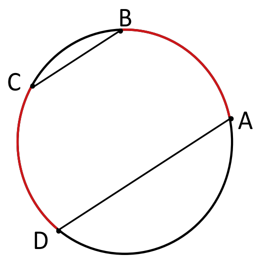
Tarea: página 158 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.4 Paralelismo

P

En la siguiente figura $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Determina si los segmentos AD y BC son paralelos o secantes.

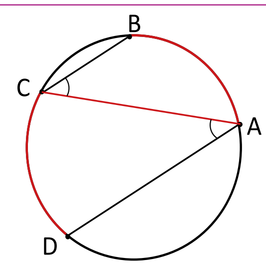


S

Trazando la cuerda AC.

Entonces, $\measuredangle BCA = \measuredangle DAC$ (dado que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$).

Por lo tanto, BC ∥ AD (los ángulos alternos internos son iguales).

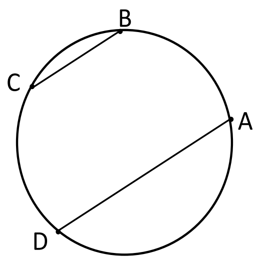


C

En una circunferencia, si se tienen dos arcos de igual medida, entonces las cuerdas determinadas por el inicio de un arco y el final del otro son paralelas.

E

Compara los arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ de la circunferencia, si BC ∥ AD.

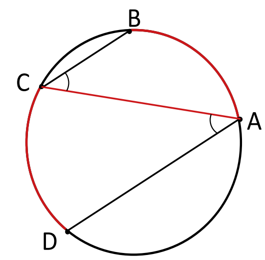


Trazando la cuerda AC.

$\measuredangle BCA = \measuredangle DAC$ (ángulos alternos internos).

Por lo tanto, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (teorema del ángulo inscrito).

Este resultado es el recíproco del ejercicio inicial.



Determina cuáles de los literales siguientes son condiciones suficientes para que 4 puntos consecutivos A, B, C, D en una circunferencia cumplan que al unirlos hay al menos un par de cuerdas paralelas.

a) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$	b) $\measuredangle DBC = \measuredangle BDA$	c) CB = DA	d) $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{AD}$
e) AB = BC	f) $\measuredangle ACD = \measuredangle ADB$	g) AC = BD	h) $\Delta ABC \cong \Delta DCB$

Unidad 7

155

Indicador de logro

2.4 Utiliza arcos congruentes para determinar el paralelismo entre cuerdas.

Secuencia

Ahora se establece que si en una circunferencia se tienen dos arcos de igual medida, entonces las cuerdas determinadas por el final de un arco y el inicio del otro son paralelas.

En octavo grado, se trabajaron las condiciones de paralelismo entre dos rectas. En el problema se hace la construcción de $\overline{AC}$ y como ∢ACB = ∢CAD (por subtender arcos iguales) se determina que $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ son paralelos (∢ACB y ∢CAD son alternos internos). Además en la clase 1.7 se determinó que si 2 arcos tiene la misma medida entonces los ángulos inscritos que los subtienden tienen la misma medida.

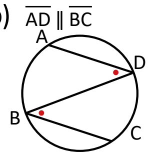
Propósito

Ⓟ En el Ejemplo se trabaja el recíproco de la propiedad en la Conclusión, es decir, a partir de que $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ determinar que AB = CD.

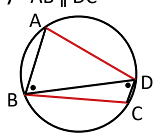
Solución de algunos ítems:

Condiciones suficientes (b, c, d, g y h):

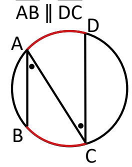
b) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



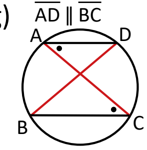
c) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$



d) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

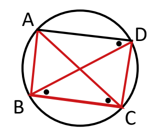


g) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



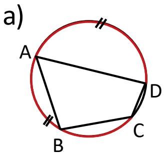
Si AC = BD entonces, $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.
Por tanto, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

h) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



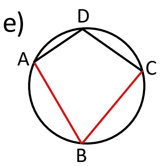
Condiciones no suficientes (a, e y f):

a)



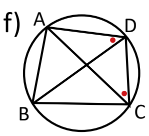
El punto B podría moverse a lo largo de $\overset{\frown}{AC}$.

e)



El punto D podría moverse a lo largo de $\overset{\frown}{AC}$.

f)

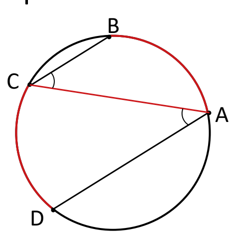


El punto C podría moverse a lo largo de $\overset{\frown}{BD}$.

Fecha: **U7 2.4**

Ⓟ En la figura $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Determina si los segmentos AD y BC son paralelos o secantes.

Ⓢ

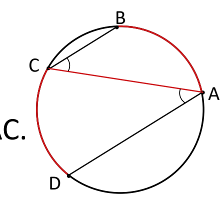


Trazar la cuerda AC.

Entonces, ∢BCA = ∢DAC. (Dado que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$)

Por lo tanto, BC ∥ AD.
(Los ángulos alternos internos son iguales).

Ⓔ Si BC ∥ AD:



Trazando la cuerda AC.

∢BCA = ∢DAC
(ángulos alternos internos).

Por lo tanto, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$
(teorema del ángulo inscrito).

Ⓡ b), c), d), g) y h)

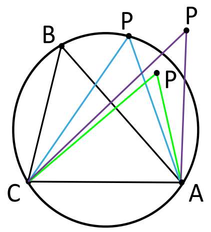
Tarea: página 159 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2

2.5 Cuatro puntos en una circunferencia

P

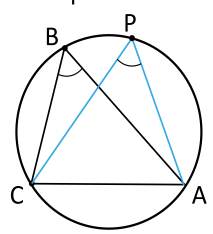
Considerando $\measuredangle ABC = \measuredangle APC$ y que ambos ángulos comparten el segmento AC. Demuestra que los puntos A, B, C y P están en una misma circunferencia.



S

El punto P tiene 3 opciones, sobre, dentro o fuera la circunferencia.

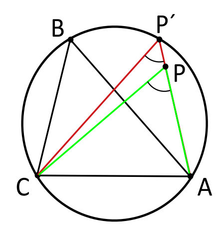
Opción 1



En este caso:
$\measuredangle$**ABC =** $\measuredangle$**APC**.

Por lo tanto, A, B, C y P deben estar en una misma circunferencia.

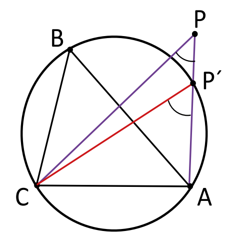
Opción 2



Trazando $\measuredangle$AP'C, se tiene que
$\measuredangle ABC = \measuredangle AP'C < \measuredangle APC$
Dado que $\measuredangle APC = \measuredangle AP'C + \measuredangle P'CP$

Por lo tanto, $\measuredangle$**ABC <** $\measuredangle$**APC**.

Opción 3



Trazando $\measuredangle$AP'C, se tiene que
$\measuredangle ABC = \measuredangle AP'C > \measuredangle APC$.
Dado que $\measuredangle AP'C = \measuredangle APC + \measuredangle PCP'$.

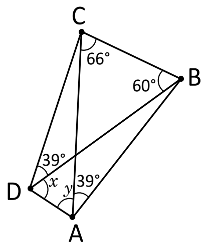
Por lo tanto, $\measuredangle$**ABC >** $\measuredangle$**APC**.

C

Si dos ángulos iguales, además comparten un segmento en sus aberturas, entonces los cuatro puntos están sobre una misma circunferencia.

E

Determina el valor de x y y.

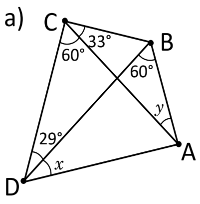


Como $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$ y ambos comparten el segmento CB, entonces A, B, C, D están sobre una misma circunferencia.

Se debe cumplir que $\measuredangle$**BCA =** $\measuredangle$**BDA**, entonces $x = 66°$.
Y además se debe cumplir que $\measuredangle$**CBD =** $\measuredangle$**CAD**, entonces $y = 60°$.

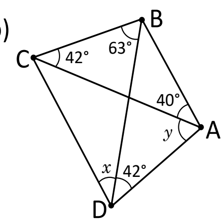
Determina el valor de x y y.

a)



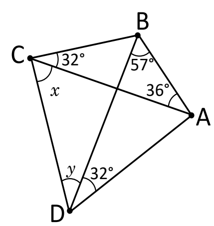
$x = 33°$ y $y = 29°$

b)



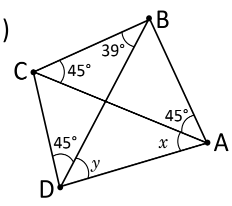
$x = 40°$ y $y = 63°$

c)



$x = 57°$ y $y = 36°$

d)



$x = 39°$ y $y = 45°$

Indicador de logro

2.5 Determina las condiciones para que cuatro puntos estén sobre una circunferencia.

Secuencia

Para esta clase se determina que si dos ángulos son iguales y comparten un segmento en sus aberturas, entonces los cuatro puntos están sobre una misma circunferencia. Para esto se analizan los resultados obtenidos a partir de la posición que ocupa un punto P en la circunferencia (dentro, sobre y fuera de ella).

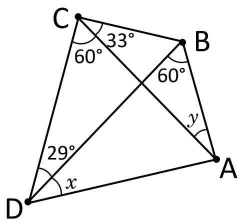
Propósito

Ⓟ La redacción del Problema inicial debe ser: Sean A, B y C puntos fijos sobre la circunferencia y P otro punto que puede estar dentro, sobre o fuera de la circunferencia. Si ∢ABC = ∢APC se cumple y ambos ángulos comparten el segmento AC, demostrar que el punto P está sobre la misma circunferencia.

Ⓢ En la solución se abordan los tres casos que se pueden dar, para determinar que cuando el punto no está sobre la circunferencia los ángulos tienen diferente medida.

Solución de algunos ítems:

a)



Como ∢ACD = ∢ABD y ambos comparten el segmento DA, entonces A, B, C, D están sobre una misma circunferencia.

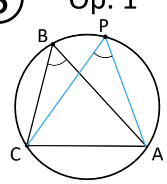
Como ∢ADB y ∢ACB subtienden el mismo arco entonces:
x = ∢ADB = ∢ACB = 33

Luego, como ∢BAC y ∢BDC subtienden el mismo arco entonces:
y = ∢BAC = ∢BDC = 29
x = 33° y y = 29°

Fecha: **U7 2.5**

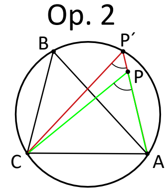
Ⓟ Si A, B y C están fijos sobre la circunferencia y P puede estar dentro, sobre o fuera de ella. Si ∢ABC = ∢APC y comparten $\overline{AC}$. Demostrar que P está sobre la circunferencia.

Ⓢ Op. 1



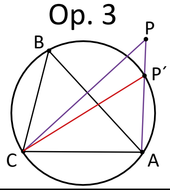
En este caso:
∢ABC = ∢APC.

Op. 2



∢ABC = ∢AP'C.
∢APC = ∢AP'C + ∢P'CP > ∢AP'C.
Por tanto, ∢ABC = ∢AP'C < ∢APC.

Op. 3



∢ABC = ∢AP'C.
∢AP'C = ∢APC + ∢PCP' > ∢APC.
Por tanto, ∢ABC = ∢AP'C > ∢APC.

Ⓔ Determinando x y y.
∢CAB = ∢CDB y comparten $\overline{CB}$.
A, B, C y D están sobre una misma circunferencia.
∢BCA = ∢BDA, x = 66°
∢CBD = ∢CAD, y = 60°

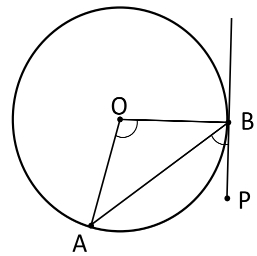
Ⓡ a) x = 33° y y = 29°
b) x = 40° y y = 63°
c) x = 57° y y = 36°
d) x = 39° y y = 45°

Tarea: página 160 del Cuaderno de Ejercicios.

2.6 Ángulo semiinscrito

P

Compara la medida de ∢ABP con ∢BOA en la siguiente figura.



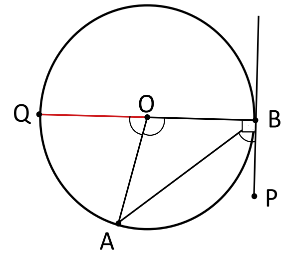
S

Se traza el diámetro QB.

Entonces, ∢AOQ = 2∢ABO (teorema del ángulo inscrito).

También, ∢AOQ = 180° – ∢BOA (ángulo suplementario).

Luego 2 ∢ ABO = 180° – ∢BOA, es decir, ∢ABO = 90° – $\frac{∢BOA}{2}$.



Por lo tanto, ∢PBA = $\frac{∢BOA}{2}$, o bien ∢BOA = 2∢PBA (por ángulo complementario, ya que PB ⊥ BO).

C

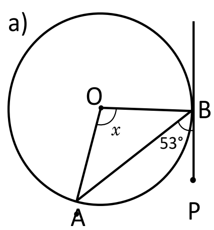
El ángulo formado por una tangente y una cuerda de la circunferencia se llama: **ángulo semiinscrito**.

En una circunferencia **la medida de un ángulo semiinscrito, es igual a la mitad de la medida del ángulo central, que subtiende el mismo arco que la cuerda.**

E

Determina el valor de x para cada caso.

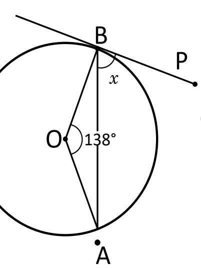
a)



Como ∢BOA = 2∢PBA.

Por lo tanto, x = 2(53°) = 106°.

b)

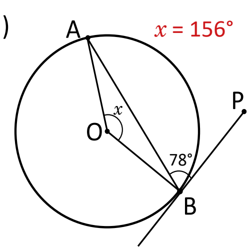


Como ∢PBA = $\frac{1}{2}$ ∢BOA.

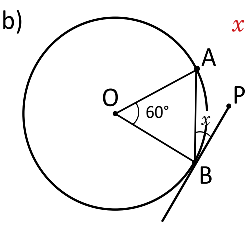
Por lo tanto, x = $\frac{138°}{2}$ = 69°.

Determina el valor de x para cada caso:

a) x = 156°



b) x = 30°



Indicador de logro

2.6 Determina las medidas de ángulos semiinscritos utilizando la medida del ángulo central.

Secuencia

Se introduce el término de ángulo semiinscrito así como la propiedad referente a su medida. Para tal caso, se construye una situación similar a la presentada en el Problema inicial de la clase 1.3 (es decir, que el ángulo central está sobre un lado del ángulo inscrito) como un primer paso en la estrategia para hacer la deducción formal de la propiedad.

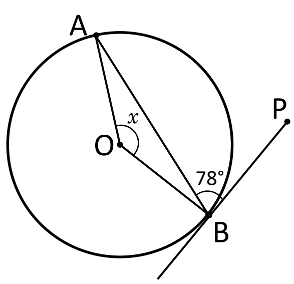
Propósito

Ⓟ Haciendo uso del teorema del ángulo inscrito y la condición de ángulos suplementarios, realizar la comparación de los ángulos. En un primer momento se hace la construcción auxiliar del diámetro QB para construir un ángulo inscrito similar al del caso 1 de la Solución de la clase 1.2.

Ⓢ Señalar la importancia de las construcciones auxiliares (que en este caso fue la del diámetro) para poder realizar algunas demostraciones en geometría.

Solución de algunos ítems:

a)

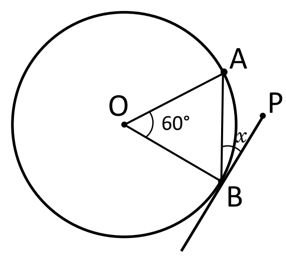


Como $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle PBA$.

Por lo tanto, $x = 2(78°) = 156°$

$x = 156°$.

b)



Como $\sphericalangle PBA = \frac{1}{2}\sphericalangle BOA$.

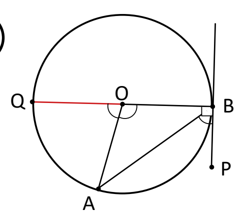
Por lo tanto, $x = \frac{60°}{2} = 30°$

$x = 30°$.

Fecha: **U7 2.6**

Ⓟ Compara la medida de $\sphericalangle ABP$ con $\sphericalangle BOA$ en la figura.

Ⓢ



Se traza el diámetro QB.

$\sphericalangle AOQ = 2\sphericalangle ABO$.
(Teorema del ángulo inscrito)

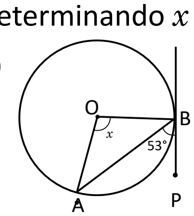
$\sphericalangle AOQ = 180° - \sphericalangle BOA$.
(Ángulo suplementario)

$2\sphericalangle ABO = 180° - \sphericalangle BOA$, es decir, $\sphericalangle ABO = 90° - \frac{\sphericalangle BOA}{2}$

Por lo tanto, $\sphericalangle PBA = 90° - \sphericalangle ABO = \frac{\sphericalangle BOA}{2}$, o bien $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle PBA$. (Por ángulo complementario, ya que $PB \perp BO$).

Ⓔ Determinando x para cada caso.

a)

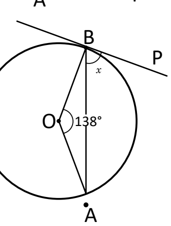


$\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle PBA$

Por tanto,

$x = 2(53°) = 106°$.

b)



$\sphericalangle PBA = \frac{1}{2}\sphericalangle BOA$

Por lo tanto,

$x = \frac{138°}{2} = 69°$.

Ⓡ

a) $x = 156°$

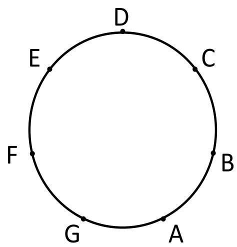
b) $x = 30°$

Tarea: página 161 del Cuaderno de Ejercicios.

2.7 Practica lo aprendido

1. Dibuja una circunferencia y un punto P fuera de ella, construye con regla y compás las tangentes a la circunferencia que pasan por el punto P.

2. Los puntos A, B, C, D, E, F, G dividen la circunferencia en 7 arcos iguales. Clasifica las figuras que se forman uniendo los puntos indicados en cada literal.



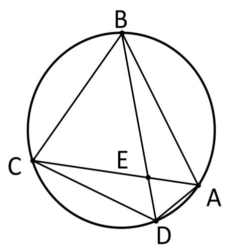
a) ABC
Triángulo isósceles
AB = BC

b) ACDF
Trapecio isósceles
CD ∥ AF y AC = FD

c) ADG
Triángulo isósceles
AD = DG

d) ABCDEFG
Heptágono regular
Los lados y los ángulos son congruentes respectivamente.

3. En la siguiente figura A, B, C, D están en una circunferencia. Responde:



a) ¿Cómo son los ángulos ∢EAB y ∢EDC?

b) ¿Cómo son los ángulos ∢ABE y ∢ACD? ¿Por qué?

c) ¿Cómo son los triángulos ΔABE y ΔDCE? ¿Por qué?

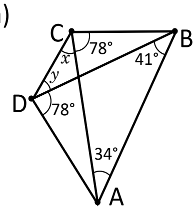
4. Determina cuáles de los literales siguientes son condiciones suficientes para que 4 puntos consecutivos A, B, C, D en una circunferencia cumplan que al unirlos haya al menos un par de cuerdas paralelas.

a) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ b) ∢CAB = ∢CDB c) AC = AD d) ΔABC ~ ΔCDA

2.8 Practica lo aprendido

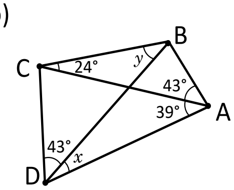
Determina el valor de x o y, según corresponda.

a)



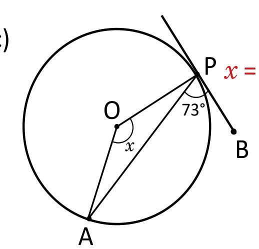
$x = 41°$
$y = 34°$

b)



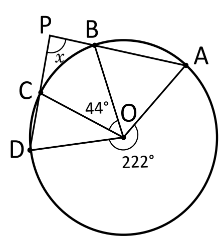
$x = 24°$
$y = 39°$

c)



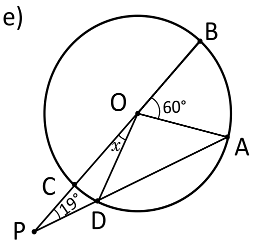
$x = 146°$

d)



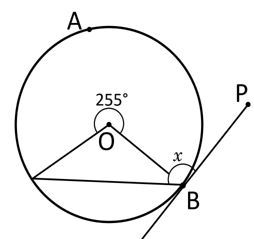
$x = 89°$

e)



$x = 22°$

f)



$x = 127.5°$

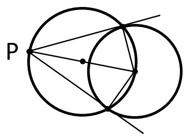
Indicador de logro

2.7 y 2.8 Resuelve problemas correspondientes a la aplicación de ángulo central e inscrito.

Solución de algunos ítems:

Clase 2.7

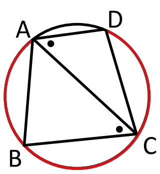
1. Un ejemplo de solución puede ser:



3.
a) $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EDC$ porque ambos subtienden a $\widehat{BC}$.
b) $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ACD$ porque ambos coinciden con ángulos inscritos que subtienden a $\widehat{AD}$.
c) ΔABE es semejante al ΔDCE porque 2 de sus ángulos son iguales (AA).

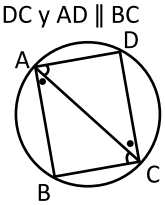
4.
Condiciones suficientes:

a) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



$\widehat{AC} = \widehat{BD}$ entonces $\widehat{AB} = \widehat{CD}$
Por tanto, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD$.

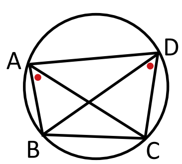
d) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



Como $\Delta ABC \sim \Delta CDA$ entonces,
$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD$, $\sphericalangle BCA = \sphericalangle DAC$.

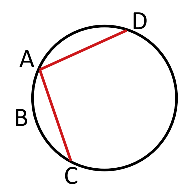
Condiciones no suficientes:

b)



El punto D podría moverse a lo largo de $\widehat{AC}$.

c)



El punto B podría moverse a lo largo de $\widehat{AC}$.

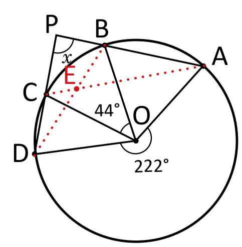
Clase 2.8

a) Como $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$ y ambos comparten el segmento AB, entonces A, B, C, D están sobre una misma circunferencia.
Como $\sphericalangle ACD$ y $\sphericalangle ABD$ subtienden el mismo arco entonces:
$x = \sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD = 41°$
Luego, como $\sphericalangle BAC$ y $\sphericalangle BDC$ subtienden el mismo arco entonces:
$y = \sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC = 34°$

$x = 41°$ y $y = 34°$

Tarea: página 162 del Cuaderno de Ejercicios.

d)



Primero se trazan $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$.
Como $\sphericalangle AOD = 222°$ es central entonces los ángulos inscritos: $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = 111°$ porque los dos subtienden al $\widehat{AD}$. Luego $\sphericalangle BOC = 44°$ es central entonces el ángulo inscrito $\sphericalangle CAB = 22°$ porque ambos subtienden al $\widehat{BC}$.
También:
$\sphericalangle ACP = 180° - \sphericalangle ACD$
$= 180° - 111°$
$= 69°$
porque los ángulos están sobre $\overline{DP}$.
Por último:
$22 + 69 + x = 180$
$x = 89°$

Unidad 8. Medidas de dispersión

Competencias de la Unidad

Calcula e interpreta las medidas de dispersión para analizar críticamente situaciones de su contexto que requieran del análisis de datos.

Relación y desarrollo

Primero y segundo ciclo

- Representación de datos en tabla
- Gráfica de barras
- Pictogramas
- Gráfica de líneas
- Moda, mediana y media
- Porcentajes

Séptimo grado

Unidad 7: Gráfica de faja y circular
- Gráfica de faja
- Gráfica circular

Octavo grado

Unidad 8: Organización y análisis de datos estadísticos
- Tablas y gráficas estadísticas para variables cuantitativas
- Medidas de tendencia central
- Valor aproximado y dígitos significativos

Noveno grado

Unidad 8: Medidas de dispersión
- Dispersión
- Propiedades de la desviación típica

Plan de estudio de la Unidad

Lección	Horas	Clases
1. Dispersión	1	1. Rango para datos no agrupados
	1	2. Desviación respecto a la media
	1	3. Varianza para datos no agrupados
	1	4. Desviación para datos no agrupados
	1	5. Agrupación de datos
	1	6. Media aritmética y rango para datos agrupados
	1	7. Varianza para datos agrupados
	1	8. Desviación típica
	1	9. Practica lo aprendido
	1	10. Practica lo aprendido
2. Propiedades de la desviación típica	1	1. Desviación típica de una variable, más una constante
	1	2. Desviación típica de una variable multiplicada por una constante
	1	Prueba de la Unidad 8
	1	Prueba del tercer trimestre

12 horas clase + prueba de la Unidad 8 + prueba del tercer trimestre

Puntos esenciales de cada lección

Lección 1: Dispersión
Se introduce la definición de medidas de dispersión para datos agrupados y no agrupados. Las medidas introducidas en esta lección son rango, varianza y desviación típica.

Lección 2: Propiedades de la desviación típica
Se introducen las propiedades de la desviación típica como una herramienta para el cálculo de la desviación típica de un conjunto de datos que se han modificado, ya sea sumándolos o multiplicándolos por una constante.

Lección 1 Dispersión

1.1 Rango para datos no agrupados

P

En la tabla se presenta la tarifa mensual (en dólares) por el servicio de agua potable en dos residenciales de San Salvador:

Residencial 1	
Casa	Tarifa mensual (en dólares)
1	12
2	11
3	12
4	13
5	12
6	18

Residencial 2	
Casa	Tarifa mensual (en dólares)
1	10
2	13
3	12
4	11
5	12
6	12
7	14

¿Cómo se calcula la media aritmética, mediana y moda para datos no agrupados?

a) Calcula la media aritmética, la mediana y la moda de las tarifas de cada una de las residenciales.

b) Para cada residencial calcula la diferencia entre la tarifa más alta y la más baja. ¿Cuál residencial tiene la mayor diferencia?

S

a) Para calcular la media aritmética (μ) se suman todos los datos y el resultado se divide entre el número de datos, la mediana es el dato que ocupa la posición central cuando estos se ordenan de menor a mayor y la moda es el dato con mayor frecuencia (el que más se repite).

Para la residencial 1:

$$\mu = \frac{12 + 11 + 12 + 13 + 12 + 18}{6}$$
$$= \frac{78}{6}$$
$$= 13$$

La media aritmética es \$13.

Los datos ordenados de menor a mayor quedan de la siguiente forma:

11, 12, 12, 12, 13, 18

Por ser un número par de datos, la mediana es la media de los datos que ocupan las posiciones 3 y 4:

$$\frac{12 + 12}{2} = 12$$

La mediana es igual a \$12. Por último, la moda es \$12 para la residencial 1, pues es el dato que más se repite.

Para la residencial 2:

$$\mu = \frac{10 + 13 + 12 + 11 + 12 + 12 + 14}{7}$$
$$= \frac{84}{7}$$
$$= 12$$

La media aritmética es \$12.

Los datos ordenados de menor a mayor quedan de la siguiente forma:
10, 11, 12, 12, 12, 13, 14
El dato que ocupa la posición central (cuarta posición) es 12, es decir, la mediana de la residencial 2 es igual a \$12. Finalmente, la moda es igual a \$12 para la residencial 2, pues es el dato que más se repite.

Los resultados anteriores se resumen en el siguiente cuadro:

	Residencial 1	Residencial 2
Media aritmética	\$13	\$12
Mediana	\$12	\$12
Moda	\$12	\$12

b) Para la residencial 1 la tarifa más alta es \$18, la más baja es \$11 y la diferencia es 18 − 11 = 7.
Para la residencial 2 la tarifa más alta es \$14, la más baja es \$10 y la diferencia es 14 − 10 = 4.

Por lo tanto, la diferencia de la tarifa más alta y la más baja es mayor en la residencial 1.

C

Las **medidas de dispersión** indican qué tanto se dispersan o agrupan los datos con respecto a su media aritmética.

El **rango** es una medida de dispersión que para una serie de datos no agrupados es igual a la diferencia del dato mayor y el dato menor. Al **rango** también se le llama **amplitud.** En el Problema inicial, las tarifas de la residencial 1 se encuentran más dispersas, ya que el rango es mayor.

1. Observa los datos no agrupados de las series A y B. ¿En cuál serie los datos están más dispersos?

Como el rango es mayor para la serie B, entonces es la serie más dispersa.

	Serie A	Serie B
1	20.3	20.9
2	20.8	20.5
3	21.0	24.0
4	20.5	29.5
5	21.1	21.0
6	20.2	19.1
7	20.4	16.4

2. María registra la temperatura en dos semanas diferentes, obteniendo los resultados de la derecha.

a) Calcula la media aritmética, la mediana y la moda de cada semana.

b) Calcula el rango de cada semana, ¿en cuál de ellas los datos están más dispersos?

a) μ = 30°, mediana = 30° y moda = 29°.
μ = 30.43°, mediana = 30° y moda = 30°.

b) Semana 1, rango = 3°
Semana 2, rango = 10°
La semana 2 tiene los datos más dispersos.

Semana 1	
Día	Temperatura
domingo	32°
lunes	31°
martes	29°
miércoles	30°
jueves	30°
viernes	29°
sábado	29°

Semana 2	
Día	Temperatura
domingo	35°
lunes	34°
martes	32°
miércoles	30°
jueves	30°
viernes	27°
sábado	25°

Indicador de logro

1.1 Identifica la dispersión de distribuciones de datos, utilizando el rango para datos no agrupados.

Secuencia

Anteriormente se trabajaron las medidas de tendencia central para datos no agrupados y agrupados, por lo que en esta unidad se trabajan las medidas de dispersión, igualmente para datos no agrupados y agrupados.
Vale recordar que en tercer ciclo todas las medidas de tendencia central y de dispersión se denotan por las letras griegas mayúsculas, porque no se trabaja con muestras, por tanto se debe tener cuidado de no utilizar las notaciones $\overline{\mathbf{x}}$ y $\mathbf{s^2}$ cuando se utilice la media aritmética y la varianza respectivamente.

Solución de algunos ítems:

1.
Serie A
Dato menor: 20.2. Dato mayor: 21.1
Rango: 21.1 − 20.2 = 0.9 dólares
Serie B
Dato menor: 16.4. Dato mayor: 29.5
Rango: 13.1 dólares
Como el rango es mayor para la serie B, entonces es la serie más dispersa.

2.
a) Semana 1
Media.
$\mu = \frac{32 + 31 + 29 + 30 + 30 + 29 + 29}{7}$
$\mu = \frac{210}{7} = 30°$
Mediana.
Ordenando los datos se tiene:
29, 29, 29, 30, 30, 31, 32
La mediana es 30°.
Moda.
La moda es 29°

Semana 2
Media.
$\mu = \frac{35 + 34 + 32 + 30 + 30 + 27 + 25}{7}$
$\mu = \frac{213}{7} = 30.43°$
Mediana.
Ordenando los datos se tiene:
25, 27, 30, 30, 32, 34, 35
La mediana es 30°.
Moda.
La moda es 30°

b) Semana 1
Dato menor: 29. Dato mayor:32
Rango: 32 − 29 = 3°
Semana 2
Dato menor: 25. Dato mayor: 35
Rango: 10°

Como el rango es mayor para la semana 2, entonces es la serie más dispersa.

Fecha: **U8 1.1**

P Para cada residencial:
a) Calcula la media aritmética, la mediana y la moda.
b) Calcula la diferencia entre la tarifa más alta y la más baja. ¿Cuál residencial tiene la mayor diferencia?

S a) Residencial 1: μ = 13, mediana = 12 y moda = 12
Residencial 2: μ = 12, mediana = 12 y moda = 12
b) Residencial 1: 18 – 11 = 7
Residencial 2: 14 – 10 = 4
Por tanto, la mayor diferencia es de la residencial 1.

R 1. Como el rango es mayor para la serie B, entonces es la serie más dispersa.

2. μ = 30°, mediana = 30° y moda = 29°.
μ = 30.43°, mediana = 30° y moda = 30°.

Semana 1, rango = 3°
Semana 2, rango = 10°
La semana 2 tiene los datos más dispersos.

Tarea: página 166 del Cuaderno de Ejercicios.

1.2 Desviación respecto a la media

P

Residencial 1	
Casa	Tarifa mensual (en dólares)
1	12
2	11
3	12
4	13
5	12
6	18

Residencial 2	
Casa	Tarifa mensual (en dólares)
1	10
2	13
3	12
4	11
5	12
6	12
7	14

En las series de datos de la tarifa mensual por el servicio de agua potable en dos residenciales de San Salvador, se obtuvo lo siguiente:

	Residencial 1	Residencial 2
Media aritmética	\$13	\$12
Mediana	\$12	\$12

a) ¿Cuál de las medidas; media o mediana, consideras puede ser más representativa para cada distribución?

b) En ambas series, encuentra las diferencias de cada dato y su media aritmética, ¿cómo se relacionan estas diferencias con la dispersión?

S

a) Para la residencial 1: la mayoría de los datos son menores a \$13, que es el valor de la media. Esto es debido a que la media se ve afectada por el sexto dato (\$18) que difiere considerablemente de los demás; entonces, para esta distribución la mediana puede ser un dato más representativo.

Para la residencial 2: tanto la media como la mediana tienen el mismo valor, puede tomarse cualquiera de los dos como dato más representativo de la distribución.

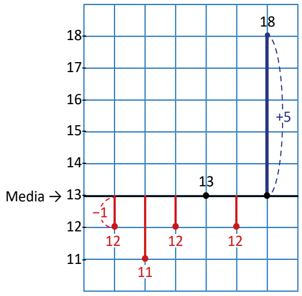
b) En la tabla se presentan las diferencias de cada uno de los datos y la media:

Residencial 1	
x	$x-\mu$
12	12−13 = −1
11	11−13 = −2
12	12−13 = −1
13	13−13 = 0
12	12−13 = −1
18	18−13 = 5

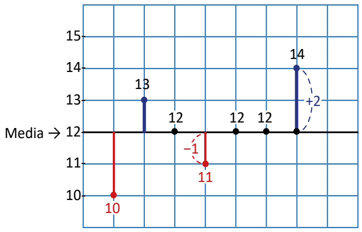
Residencial 2	
x	$x-\mu$
10	10−12 = −2
13	13−12 = 1
12	12−12 = 0
11	11−12 = −1
12	12−12 = 0
12	12−12 = 0
14	14−12 = 2

Sin tomar en cuenta los signos negativos, las diferencias reflejan la distancia de cada uno de los datos a su media aritmética. Lo anterior puede observarse mejor en los siguientes esquemas:

Residencial 1



Residencial 2



En ellos se observa que los datos de la residencial 2 se encuentran a menor distancia con respecto a su media aritmética ($12); mientras que en los datos de la residencial 1, el último de ellos está relativamente lejos de su media aritmética ($13).

C

En una distribución, a la diferencia de cada uno de los datos (x) y su media aritmética (μ) se le llama **desviación** respecto a la media (o simplemente desviación), se simboliza por $x - \mu$ e indica la diferencia de cada uno de los datos a la media aritmética. La suma de todas las desviaciones se simboliza por $\Sigma(x - \mu)$ y siempre es igual a cero:

Suma de todas las desviaciones = 0

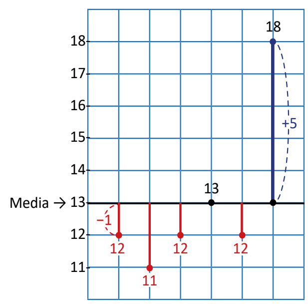
es decir,

$$\Sigma(x - \mu) = 0$$

E

Utilizando el Problema inicial, verifica que la suma de todas las desviaciones con respecto a la media es cero.

Residencial 1



En el esquema puede notarse que el valor absoluto de la suma de las distancias negativas es igual al de la positiva, haciendo que el resultado sea cero. También puede hacerse el cálculo:

$$\begin{aligned}\Sigma(x - \mu) &= (-1) + (-2) + (-1) + 0 + (-1) + 5 \\ &= -1 - 2 - 1 - 1 + 5 \\ &= -5 + 5 \\ &= 0\end{aligned}$$

En la siguiente tabla se presentan tres series de datos no agrupados.

Completa cada una de las tablas y con base en las desviaciones, respecto a la media responde:

¿En cuál distribución los datos se encuentran más dispersos con respecto a la media?

Los datos se encuentran más dispersos en la serie A.

Serie A		
	x	$x - \mu$
	15	9
	4	−2
	6	0
	3	−3
	2	−4
Media		6
Mediana		4
Rango		13

Serie B		
	x	$x - \mu$
	8	1
	9	2
	6	−1
	7	0
	5	−2
Media		7
Mediana		7
Rango		4

Serie C		
	x	$x - \mu$
	15	6
	5	−4
	8	−1
	10	1
	7	−2
Media		9
Mediana		8
Rango		10

Indicador de logro

1.2 Identifica distribuciones de datos que se encuentran más dispersas respecto a la media.

Secuencia

Para esta clase se aborda el concepto de desviación de los datos respecto a la media y el hecho de que la suma de todas las desviaciones es cero. Este concepto es necesario para abordar la varianza de un conjunto de datos en la siguiente clase.

Propósito

Ⓟ Definir el concepto de desviación respecto a la media. También se explica que el significado de la notación:

$$\Sigma(x - \mu)$$

es indicar la suma de todas las desviaciones, por lo que es recomendable mencionar que el símbolo Σ se lee "sumatoria".

Solución de algunos ítems:

Serie A
$\mu = 6$

	Serie A	
	x	$x - \mu$
	15	15 – 6 = 9
	4	4 – 6 = –2
	6	6 – 6 = 0
	3	3 – 6 = –3
	2	2 – 6 = –4
Media	6	
Mediana	4	
Rango	13	

Serie B
$\mu = 7$

	Serie B	
	x	$x - \mu$
	8	8 – 7 = 1
	9	9 – 7 = 2
	6	6 – 7 = –1
	7	7 – 7 = 0
	5	5 – 7 = –2
Media	7	
Mediana	7	
Rango	4	

Serie C
$\mu = 9$

	Serie C	
	x	$x - \mu$
	15	15 – 9 = 6
	5	5 – 9 = –4
	8	8 – 9 = –1
	10	10 – 9 = 1
	7	7 – 9 = –2
Media	9	
Mediana	8	
Rango	10	

Los datos se encuentran más dispersos en la serie A.

Fecha: **U8 1.2**

Ⓟ Con los datos de la tabla:

a) ¿Entre la media y mediana, cuál consideras más representativa para cada residencial?

b) En ambas series, calcula las diferencias de cada dato y su media. ¿Cómo se relacionan estas diferencias con la dispersión?

Ⓢ a) Residencial 1: la media se ve afectada por el sexto dato que es muy diferente de los demás. La mediana es más representativa.

Residencial 2: la media y la mediana tienen el mismo valor. Puede tomarse cualquiera de las dos.

b) Los datos de la residencial 2 están a menor distancia de su media; y en los datos de la residencial 1, el último de ellos está relativamente lejos de su media.

Ⓔ $\Sigma(x - \mu)$
$= (-1) + (-2) + (-1) + 0 + (-1) + 5$
$= -1 - 2 - 1 - 1 + 5$
$= -5 + 5$
$= 0$

Ⓡ Serie A: 9, –2, 0, –3 y –4
Media: 6, Mediana: 4, Rango: 13

Serie B: 1, 2, –1, 0 y –2
Media: 7, Mediana: 7, Rango: 4

Serie C: 6, –4, –1, 1 y –2
Media: 9, Mediana: 8, Rango: 10

Los datos se encuentran más dispersos en la serie A.

Tarea: página 168 del Cuaderno de Ejercicios.

1.3 Varianza para datos no agrupados

P

Las desviaciones con respecto a la media pueden resultar complicadas de interpretar debido al signo negativo en alguna de ellas y cuando se tienen muchos datos.

En las tablas aparecen las desviaciones respecto a la media de los datos de la clase anterior:

Residencial 1	
x	$x - \mu$
12	12 − 13 = − 1
11	11 − 13 = − 2
12	12 − 13 = − 1
13	13 − 13 = 0
12	12 − 13 = − 1
18	18 − 13 = 5

Residencial 2	
x	$x - \mu$
10	10 − 12 = − 2
13	13 − 12 = 1
12	12 − 12 = 0
11	11 − 12 = − 1
12	12 − 12 = 0
12	12 − 12 = 0
14	14− 12 = 2

a) Calcula el cuadrado de cada una de las desviaciones con respecto a su media.
b) Calcula la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones del literal anterior. Esta media aritmética se simboliza con σ^2 (σ es la letra griega sigma).

S

a) En las tablas se presentan los cuadrados de cada una de las desviaciones, en la columna $(x - \mu)^2$.

Residencial 1		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
12	12 − 13 = − 1	$(-1)^2 = 1$
11	11 − 13 = − 2	$(-2)^2 = 4$
12	12 − 13 = − 1	$(-1)^2 = 1$
13	13 − 13 = 0	$0^2 = 0$
12	12 − 13 = − 1	$(-1)^2 = 1$
18	18 − 13 = 5	$5^2 = 25$

Residencial 2		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
10	10−12 = −2	$(-2)^2 = 4$
13	13−12 = 1	$1^2 = 1$
12	12−12 = 0	$0^2 = 0$
11	11−12 = −1	$(-1)^2 = 1$
12	12−12 = 0	$0^2 = 0$
12	12−12 = 0	$0^2 = 0$
14	14−12 = 2	$2^2 = 4$

b) La media aritmética de los cuadrados de las desviaciones del literal anterior (que se simboliza por σ^2) se calcula sumando todos los resultados, de la última columna, de cada tabla y dividiéndolos entre el total de datos.

Para la residencial 1:

$$\sigma^2 = \frac{1 + 4 + 1 + 0 + 1 + 25}{6} = \frac{32}{6} \approx 5.33$$

Para la residencial 2:

$$\sigma^2 = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 4}{7} = \frac{10}{7} \approx 1.43$$

La medida (σ^2) sirve también para calcular la dispersión de los datos con respecto a su media. Se puede observar que cuanto mayor sean las desviaciones respecto a la media, mayor es σ^2 y por consiguiente más dispersos se encontrarán los datos.

σ^2 en la residencial 1 se ve afectada por la desviación del último dato cuyo cuadrado es 25, dando como resultado que sea mayor a σ^2 de la residencial 2. Por lo tanto, las tarifas de la residencial 1 se encuentran más dispersas.

C

A la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones se le llama **varianza**, se denota por σ^2 y se calcula:

$$\textit{Varianza} = \frac{\text{Suma de los cuadrados de las desviaciones}}{\text{Número de datos}}$$

es decir,

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x-\mu)^2}{n}$$

Donde n es el número total de datos y μ es la media aritmética de la serie de datos. En el problema inicial, la varianza de la serie de datos de la residencial 1 es $\sigma^2 \approx 5.33$; mientras que la varianza de la serie de datos de la residencial 2 es $\sigma^2 \approx 1.43$.

Como esta medida es sensible a cada uno de los datos de la serie, la varianza revela aspectos en la dispersión que no refleja el rango. Cuanto mayor sea la varianza, más dispersos se encontrarán los datos con respecto a su media aritmética y puede recurrirse a la mediana como dato representativo de la distribución.

En las tablas se presentan las tres series de datos no agrupados de la clase anterior.

Serie A		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
15	9	81
4	–2	4
6	0	0
3	–3	9
2	–4	16

Varianza (σ^2)	22

Serie B		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
8		1
9	2	4
6	–1	1
7	0	0
5	–2	4

Varianza (σ^2)	2

Serie C		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
15	6	36
5	–4	16
8	–1	1
10	1	1
7	–2	4

Varianza (σ^2)	11.6

Completa cada una de las tablas y calcula la varianza de cada serie. Con base en ella, justifica en cuál serie los datos se encuentran más dispersos. Compáralo con el resultado obtenido en la clase anterior.

La serie A tiene mayor varianza, por tanto, también es la serie con más dispersión. Al igual que lo indicaba el Rango, con la varianza también se determina que la serie A tiene más dispersión.

Indicador de logro

1.3 Utiliza la varianza para datos no agrupados para justificar la dispersión de los datos de la serie.

Secuencia

En la clase 1.2 se trabajó el concepto de desviación de los datos respecto a la media, por lo que en esta clase ya se puede abordar el concepto de la varianza de un conjunto de datos no agrupados.

Solución de algunos ítems:

Serie A

$\mu = 6$

Serie A		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
15	$15 - 6 = 9$	$9^2 = 81$
4	$4 - 6 = -2$	$(-2)^2 = 4$
6	$6 - 6 = 0$	$0^2 = 0$
3	$3 - 6 = -3$	$(-3)^2 = 9$
2	$2 - 6 = -4$	$(-4)^2 = 16$

$\sigma^2 = \frac{81 + 4 + 0 + 9 + 16}{5}$

$\sigma^2 = \frac{110}{5}$

$\sigma^2 = 22$

Varianza (σ^2)	22

Serie B

$\mu = 7$

Serie B		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
8	$8 - 7 = 1$	$1^2 = 1$
9	$9 - 7 = 2$	$2^2 = 4$
6	$6 - 7 = -1$	$(-1)^2 = 1$
7	$7 - 7 = 0$	$0^2 = 0$
5	$5 - 7 = -2$	$(-2)^2 = 4$

$\sigma^2 = \frac{1 + 4 + 1 + 0 + 4}{5}$

$\sigma^2 = \frac{10}{5}$

$\sigma^2 = 2$

Varianza (σ^2)	2

Serie C

$\mu = 9$

Serie C		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
15	$15 - 9 = 6$	$6^2 = 36$
5	$5 - 9 = -4$	$(-4)^2 = 16$
8	$8 - 9 = -1$	$(-1)^2 = 1$
10	$10 - 9 = 1$	$1^2 = 1$
7	$7 - 9 = -2$	$(-2)^2 = 4$

$\sigma^2 = \frac{36 + 16 + 1 + 1 + 4}{5}$

$\sigma^2 = \frac{58}{5}$

$\sigma^2 = 11.6$

Varianza (σ^2)	11.6

La serie A tiene mayor varianza, por tanto, también es la serie con más dispersión. Al igual que lo indicaba el rango, con la varianza también se determina que la serie A tiene más dispersión.

Fecha:

U8 1.3

P Con la información de las tablas, calcula:
a) El cuadrado de cada desviación $(x - \mu)$.
b) La media aritmética de los valores obtenidos en a), y simbolízala con σ^2.

S a) Residencial 1: 1, 4, 1, 0, 1 y 25

Residencial 2: 4, 1, 0, 1, 0, 0 y 4

b) $\sigma^2 = \frac{1 + 4 + 1 + 0 + 1 + 25}{6} = \frac{32}{6} \approx 5.33$

$\sigma^2 = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 4}{7} = \frac{10}{7} \approx 1.43$

Entre mayor es σ^2 los datos tienen mayor dispersión.

R Serie A:
$x - \mu = 9, -2, 0, -3$ y -4
$(x - \mu)^2 = 81, 4, 0, 9, 16$
$\sigma^2 = 22$
Serie B:
$x - \mu = 1, 2, -1, 0, -2$
$(x - \mu)^2 = 1, 4, 1, 0, 4$
$\sigma^2 = 2$
Serie C:
$x - \mu = 6, -4, -1, 1, -2$
$(x - \mu)^2 = 36, 16, 1, 1, 4$
$\sigma^2 = 11.6$
La serie A tiene mayor varianza, por tanto, también es la serie con más dispersión. Al igual que lo indicaba el rango.

Tarea: página 169 del Cuaderno de Ejercicios.

1.4 Desviación típica para datos no agrupados

P

Con la tarifa mensual por el servicio de agua potable, en dos residenciales de San Salvador, realiza lo siguiente:

a) Calcula la raíz cuadrada de la varianza de ambas series y simbolízala por σ (sin el cuadrado). ¿Sigue siendo mayor el resultado de la residencial 1 que cuenta con datos más dispersos?
b) Coloca los datos de cada residencial como puntos sobre la recta numérica.
c) Resta y suma el respectivo valor de σ a cada media aritmética. Coloca estos números sobre la recta.
d) Según lo observado en la recta, ¿cuáles datos están más dispersos?

Residencial 1	
Casa	Tarifa mensual (en dólares)
1	12
2	11
3	12
4	13
5	12
6	18
σ^2	5.33 (dólares al cuadrado)

Residencial 2	
Casa	Tarifa mensual (en dólares)
1	10
2	13
3	12
4	11
5	12
6	12
7	14
σ^2	1.43 (dólares al cuadrado)

S

a) La raíz cuadrada de la varianza de los datos de la residencial 1 es:

$$\sigma = \sqrt{5.33}$$
$$\approx 2.31$$

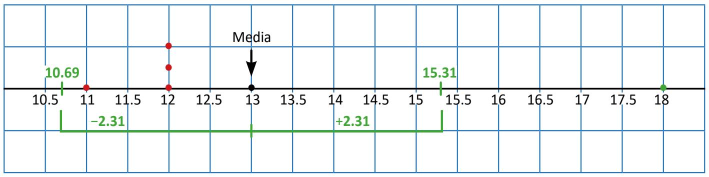
Mientras que la raíz cuadrada de la varianza de los datos de la residencial 2 es:

$$\sigma = \sqrt{1.43}$$
$$\approx 1.20$$

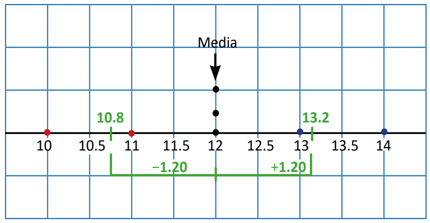
El resultado de la residencial 1 sigue siendo mayor que el de la residencial 2.

b) Cada punto representa uno de los datos; si dos o más datos tienen el mismo valor, entonces se ubican verticalmente sobre el valor correspondiente (los puntos rojos son los datos menores que la media, los azules los mayores, y los negros los que tienen igual valor que la media).

c) **En la serie de la residencial 1:** Para conocer la cantidad de datos que quedan a una distancia σ de su media (13) se le resta y suma a μ el valor de σ (que es 2.31) dando como resultado 10.69 y 15.31 respectivamente. En el esquema de abajo se observa que cinco de los seis datos de la serie quedan a una distancia de 2.31 de la media aritmética.



En la serie de la residencial 2: Al restar y sumar σ (1.20) a la media (12) se obtiene como resultado 10.8 y 13.2 respectivamente. En el esquema de abajo se observa que cinco de los siete datos de la serie quedan a una distancia de 1.20 de la media aritmética.



d) Aparentemente no hay mucha diferencia en las dos series, sin embargo, el hecho que σ sea menor para la residencial 2 indica que los datos se encuentran a una menor distancia de su media aritmética que los datos de la residencial 1, y por tanto, las tarifas mensuales de la residencial 1 se encuentran más dispersas (esto por influencia del dato cuyo valor es $18).

C

A la raíz cuadrada de la varianza se le denomina **desviación típica**, se denota por σ y se calcula así:

$$\text{Desviación Típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{Suma de los cuadrados de las desviaciones}}{\text{Número de datos}}}$$

Es decir,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\mu)^2}{n}}$$

A la desviación típica también se le llama **desviación estándar.**

La desviación típica da un tipo de promedio de las desviaciones con respecto de la media μ, o sea, un promedio de las distancias de cada dato a su media aritmética, algo que no hace la varianza por expresarse en unidades cuadradas.

Cuanto mayor sea la desviación típica, más dispersos se encontrarán los datos con respecto a su media aritmética y puede recurrirse a la mediana como medida representativa de la serie de datos. La desviación típica siempre es un número mayor que cero o igual a cero (en su defecto), nunca será negativo.

Con las series de datos A, B y C del ejercicio de la clase anterior realiza los siguiente:

Serie A		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
15	9	81
4	−2	4
6	0	0
3	−3	9
2	−4	16

σ^2	22
σ	4.69

Serie B		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
8	1	1
9	2	4
6	−1	1
7	0	0
5	−2	4

σ^2	2
σ	1.41

Serie C		
x	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$
15	6	36
5	−4	16
8	−1	1
10	1	1
7	−2	4

σ^2	11.6
σ	3.41

a) Calcula la desviación típica de cada una de las series de datos.

b) Determina, en cada serie, la cantidad de datos que quedan a una distancia de una desviación típica con respecto a su media.

Serie A: 4, 6, 3 y 2.
4 datos

Serie B: 8, 6, y 7.
3 datos

Serie C: 8, 10 y 7.
3 datos

Indicador de logro

1.4 Justifica la dispersión de una serie utilizando la desviación típica.

Secuencia

Como ya se ha trabajado la varianza de un conjunto de datos, se introduce la desviación típica como la raíz cuadrada de la varianza.

Propósito

Ⓟ Establecer que a partir de la desviación típica se puede determinar cuál de las dos series está más dispersa. Presentar las ilustraciones obtenidas a partir del desarrollo de b), c) y d) no tienen como objetivo deducir cuál serie tiene mayor dispersión a partir de ellas, más bien solo hacen una presentación gráfica de lo que es una desviación típica.

Solución de algunos ítems:

a) Serie A
$\mu = 6$

Serie A		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
15	9	81
4	−2	4
6	0	0
3	−3	9
2	−4	16

σ^2	22
σ	$\sqrt{22} = 4.69$

Serie B
$\mu = 7$

Serie B		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
8	1	1
9	2	4
6	−1	1
7	0	0
5	−2	4

σ^2	2
σ	$\sqrt{2} = 1.41$

Serie C
$\mu = 9$

Serie C		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
15	6	36
5	−4	16
8	−1	1
10	1	1
7	−2	4

σ^2	11.6
σ	$\sqrt{11.6} = 3.41$

b) Serie A
$\mu - \sigma = 6 - 4.69 = 1.31$
$\mu + \sigma = 6 + 4.69 = 10.69$
Datos: 4, 6, 3 y 2.
4 datos

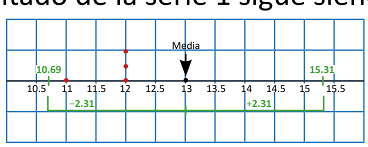
Serie B
$\mu - \sigma = 7 - 1.41 = 5.59$
$\mu + \sigma = 7 + 1.41 = 8.41$
Datos: 8, 6, y 7.
3 datos

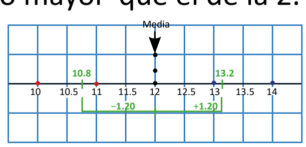
Serie C
$\mu - \sigma = 9 - 3.41 = 5.59$
$\mu + \sigma = 9 + 3.41 = 12.41$
Datos: 8, 10 y 7.
3 datos

Fecha: **U8 1.4**

Ⓟ a) Calcula la raíz cuadrada de σ^2. ¿Sigue siendo mayor el valor de la serie 1?
b) Coloca los datos de cada serie en una recta.
c) Coloca en la recta, la resta y suma del respectivo valor de σ a cada media.
d) ¿Cuál serie está más dispersa?

Ⓢ a) Residencial 1 es: $\sigma = \sqrt{5.33} \approx 2.31$
Residencial 2 es: $\sigma = \sqrt{1.43} \approx 1.20$
El resultado de la serie 1 sigue siendo mayor que el de la 2.
b) y c)





d) La σ de la serie 1 es mayor que la de la 2, por tanto está más dispersa.

Ⓡ a) Serie A:
$\sigma = 4.69$
Serie B:
$\sigma = 1.41$
Serie C:
$\sigma = 3.41$

b) Serie A: 4, 6, 3 y 2.
4 datos
Serie B: 8, 6, y 7.
3 datos
Serie C: 8, 10 y 7.
3 datos

Tarea: página 171 del Cuaderno de Ejercicios.

1.5 Agrupación de datos

P

Carlos y Antonio trabajan en la librería Maquilishuat. Durante 30 días registran la cantidad de cuadernos vendidos cada día, obteniendo el siguiente registro:

Carlos				
5	15	23	11	20
10	6	9	10	22
15	21	15	16	34
20	18	13	26	18
16	22	21	24	12
14	17	19	16	11

Antonio				
9	15	5	18	22
13	17	11	24	14
19	22	23	10	11
20	12	16	28	18
10	13	21	17	8
21	20	15	15	6

Cada casilla representa un día.

a) Clasifica el número de cuadernos vendidos en 6 grupos de 5 en 5, inicia en 5 y termina en 35.
b) Organiza los grupos en una tabla y determina el total de datos en cada grupo.

S

a) Como deben ser 6 grupos y el primero de ellos debe comenzar en 5 y el último terminar en 35, entonces los grupos serán: de 5 a 10 cuadernos, de 10 a 15 cuadernos, de 15 a 20 cuadernos, de 20 a 25 cuadernos, de 25 a 30 cuadernos y de 30 a 35 cuadernos. Según lo anterior, los cuadernos vendidos por Carlos quedan clasificados de la siguiente forma:

Carlos			16			
			19			
			17	24		
		11	16	21		
		14	18	22		
		12	18	20		
		13	16	21		
	9	10	15	22		
	6	10	15	20		
	5	11	15	23	26	34
	De 5 a 10	**De 10 a 15**	**De 15 a 20**	**De 20 a 25**	**De 25 a 30**	**De 30 a 35**

En el grupo "de 5 a 10" se colocan las cantidades 5, 6, 7, 8 y 9, si las hay; la cantidad final (10) se coloca en el grupo siguiente. De manera similar se hace para los demás grupos.

De forma similar se clasifican los cuadernos vendidos por Antonio:

En 8 días, Antonio vendió de 20 a 25

Antonio						
			15			
		13	15	20		
		10	17	21		
		12	18	21		
		11	16	20		
	6	10	19	23		
	8	14	17	22		
	5	11	18	24		
	9	13	15	22	28	
	De 5 a 10	**De 10 a 15**	**De 15 a 20**	**De 20 a 25**	**De 25 a 30**	**De 30 a 35**

b) La tabla queda de la siguiente manera:

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días	
	Carlos	Antonio
5 a 10	3	4
10 a 15	7	8
15 a 20	10	9
20 a 25	8	8
25 a 30	1	1
30 a 35	1	0
TOTAL	**30**	**30**

Este número representa la cantidad de días en los que Antonio vendió de 20 a 25 cuadernos.

C

La tabla en que se organizan los grupos de datos de una serie tal como en el Problema inicial se llama: **tabla de distribución de frecuencias.**

A los intervalos de datos formados se les llama **clases** y el total de datos que corresponde a cada clase se le llama **frecuencia**. Al tamaño de una clase se le llama ancho de clase y a los valores extremos **límites de clase**.

Por ejemplo, para la primera clase del Problema inicial los límites de clase son 5 y 10, el límite inferior es 5, el límite superior es 10 y el ancho de clase es 5. El número que está en el centro de cada clase se llama **punto medio**, se denota por Pm y se determina mediante la ecuación:

$$Pm = \frac{\textit{Límite superior + Límite inferior}}{2}$$

El punto medio de la primera clase es: $Pm = \frac{5 + 10}{2} = 7.5$

En dos comunidades de Morazán se hace un estudio sobre la edad de los menores de 21 años, obteniendo los siguientes resultados:

Comunidad 1					
9	14	15	14	19	16
11	18	9	12	20	12
12	11	10	19	14	13
15	12	11	18	11	16
14	16	17	12	13	17

Comunidad 2					
14	13	9	17	15	9
9	14	15	20	18	12
13	10	9	11	10	13
16	12	12	11	10	13
18	11	14	10	19	9

a) Clasifica las edades de los menores de 21 años de cada comunidad en 4 grupos de 3 en 3, inicia en 9 y termina en 21.
b) Organiza los datos en una tabla de distribución de frecuencias.
c) Con la tabla creada, agrega otra columna donde se muestre el punto medio de cada clase.

Indicador de logro

1.5 Organiza datos en una tabla de distribución de frecuencias.

Secuencia

En octavo los estudiantes aprendieron a agrupar en clases una serie de datos, por lo que ya tienen nociones de este trabajo, en esta clase se orienta para que recuerden lo realizado anteriormente.

Propósito

Ⓟ Las tablas presentadas en el literal a) de la Solución no se escriben en la pizarra porque quitan tiempo para el desarrollo de la clase, por lo que será mejor verificar la respuesta de los estudiantes directamente con las del libro de texto.

Solución de algunos ítems:

a)

Comunidad 1

	13		
	12		
	14		
	12		
11	13	17	
11	14	17	
10	12	16	18
11	12	16	19
9	12	15	20
11	14	16	18
9	14	15	19
De 9 a 12	**De 12 a 15**	**De 15 a 18**	**De 18 a 21**

Comunidad 2

9			
10			
11	14		
10	13		
11	12		
10	12		
11	13		
9	13		
10	12	16	19
9	14	15	18
9	13	15	18
9	14	17	20
De 9 a 12	**De 12 a 15**	**De 15 a 18**	**De 18 a 21**

b) y c)

Años	Cantidad de menores de 21 años	Pm
9 a 12	7	10.5
12 a 15	11	13.5
15 a 18	7	16.5
18 a 21	5	19.5
TOTAL	**30**	

Años	Cantidad de menores de 21 años	Pm
9 a 12	12	10.5
12 a 15	10	13.5
15 a 18	4	16.5
18 a 21	4	19.5
TOTAL	**30**	

Observación:
En el literal a) los datos están ordenados, sin embargo, es más práctico colocarlos según el orden de la tabla original.

Fecha: **U8 1.5**

Ⓟ Con el registro mostrado en el libro de texto:

a) Clasifica el número de cuadernos vendidos en 6 grupos de 5 en 5, inicia en 5 y termina en 35.

b) Organiza los grupos en una tabla y determina el total de datos en cada grupo.

Ⓢ b)

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días	
	Carlos	Antonio
5 a 10	3	4
10 a 15	7	8
15 a 20	10	9
20 a 25	8	8
25 a 30	1	1
30 a 35	1	0
TOTAL	**30**	**30**

Ⓡ a) Comunidad 1

	14		
	14		
	14		
11	14		
11	13		
11	13	17	
11	12	17	20
11	12	16	19
10	12	16	19
9	12	15	18
9	12	15	18
De 9 a 12	De 12 a 15	De 15 a 18	De 18 a 21

Comunidad 2

11			
11			
11	14		
10	14		
10	14		
10	13		
10	13		
9	13		
9	13	17	20
9	12	16	19
9	12	15	18
9	12	15	18
De 9 a 12	De 12 a 15	De 15 a 18	De 18 a 21

b) y c)

Años	Cantidad de menores de 21 años	Pm
9 a 12	8	10.5
12 a 15	11	13.5
15 a 18	6	19.5
18 a 21	5	19.5
TOTAL	30	

Años	Cantidad de menores de 21 años	Pm
9 a 12	12	10.5
12 a 15	10	13.5
15 a 18	4	19.5
18 a 21	4	19.5
TOTAL	30	

Tarea: página 172 del Cuaderno de Ejercicios.

1.7 Varianza para datos agrupados

P

En la tabla aparecen los datos correspondientes a la cantidad de cuadernos vendidos por Carlos durante 30 días:

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días Carlos (f_C)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f\,(Pm - \mu)^2$
5 a 10	3	7.5	22.5	−10	100	300
10 a 15	7	12.5	87.5			
15 a 20	10	17.5	175.0			
20 a 25	8	22.5	180.0			
25 a 30	1	27.5	27.5			
30 a 35	1	32.5	32.5			
TOTAL	30					
Media aritmética (μ)	**17.5**					

a) Completa la tabla y calcula la suma de los datos de la última columna.
b) ¿Cómo podrías calcular la varianza para esta serie de datos agrupados?

S

a) La tabla completa se presenta a continuación:

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días Carlos (f_C)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
5 a 10	3	7.5	22.5	−10	100	300
10 a 15	7	12.5	87.5	−5	25	175
15 a 20	10	17.5	175.0	0	0	0
20 a 25	8	22.5	180.0	5	25	200
25 a 30	1	27.5	27.5	10	100	100
30 a 35	1	32.5	32.5	15	225	225
TOTAL	**30**					
Media aritmética (μ)	**17.5**					

La sumatoria de los datos de la última columna, $f(Pm - \mu)^2$, es:

$$300 + 175 + 0 + 200 + 100 + 225 = 1\,000$$

b) Para calcular la varianza, basta dividir entre el número total de datos el resultado de la suma calculada en el literal a), es decir:

$$\sigma^2 = \frac{1\,000}{30} \approx 33.33$$

Igual que en las series de datos no agrupados, la varianza se encuentra expresada en unidades cuadradas. Para este caso serían "días al cuadrado".

Por lo tanto, $\sigma^2 \approx 33.33$.

b) Para el caso de Carlos la última clase que posee frecuencia distinta de cero es la clase de 30 a 35, que tiene frecuencia igual a 1 cuyo límite superior es 35, y la primera clase que posee frecuencia distinta de cero es la clase de 5 a 10 (tiene frecuencia 3) cuyo límite inferior es 5.

Primera clase con frecuencia distinta de cero.

Última clase con frecuencia distinta de cero.

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días
	Carlos (f_C)
5 a 10	3
10 a 15	7
15 a 20	10
20 a 25	8
25 a 30	1
30 a 35	1
TOTAL	30

De igual forma se identifican las dos clases para el caso de Antonio:

Primera clase con frecuencia distinta de cero.

Última clase con frecuencia distinta de cero.

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días
	Antonio (f_A)
5 a 10	4
10 a 15	8
15 a 20	9
20 a 25	8
25 a 30	1
30 a 35	0
TOTAL	30

c) Para la serie de Carlos la diferencia es: 35 − 5 = 30.
Y para la serie de Antonio la diferencia es: 30 − 5 = 25.

Por lo tanto, los datos de la serie de Carlos se encuentran más dispersos.

C

El **rango** para una serie de datos agrupados es la diferencia del límite superior de la última clase con frecuencia distinta de cero y el límite inferior de la primera clase con frecuencia distinta de cero. La **media aritmética** para series de datos agrupados se calcula así:

$$\mu = \frac{\textit{Suma de los productos } f\times Pm}{\textit{Número de datos}}$$

En un centro escolar se registra el tiempo, en minutos, que los estudiantes de octavo y noveno grado miran televisión al día, los datos se muestran en la siguiente tabla de distribución de frecuencia:

Minutos	8° grado (f_1)	9° grado (f_2)	Pm	$f_1\times Pm$	$f_2\times Pm$
30 a 40	0	3	35	0	105
40 a 50	10	8	45	450	360
50 a 60	11	9	55	605	495
60 a 70	12	12	65	780	780
70 a 80	11	10	75	825	750
80 a 90	6	8	85	510	680
TOTAL	50	50			

8.°: μ = 63.4
9.°: μ = 63.4
Las medias son iguales

a) Completa la tabla, encuentra la media aritmética para cada una de las series de datos y compáralas.
b) Comparando los rangos, determina en cuál serie los datos se encuentran más dispersos.
8.°: 50; 9.°: 60

Indicador de logro

1.6 Calcula la media aritmética e identifica la dispersión de distribuciones de datos, utilizando el rango para datos agrupados.

Secuencia

Anteriormente se trabajó el rango, la media aritmética y la agrupación de un conjunto de datos. Por lo que ya se puede trabajar con la media aritmética y rango para datos agrupados. Vale aclarar que en octavo grado también se trabajó con la media aritmética para datos agrupados por lo que este tema servirá como un recordatorio para los estudiantes.

Solución de algunos ítems:

a)

Pm	$f_1 \times Pm$	$f_2 \times Pm$
35	0	105
45	450	360
55	605	495
65	780	780
75	825	750
85	510	680

Media 8.°.

$$\mu = \frac{0 + 450 + 605 + 780 + 825 + 510}{50}$$

$$\mu = \frac{3170}{50}$$

$\mu = 63.4$

Media 9.°.

$$\mu = \frac{105 + 360 + 495 + 780 + 750 + 680}{50}$$

$$\mu = \frac{3\,170}{50}$$

$\mu = 63.4$

Las medias de 8.° y 9.° son iguales.

b)
Para 8.°
90 – 40 = 50
Para 9.°
90 – 30 = 60

Como en 9.° los datos tienen un mayor rango entonces están más dispersos.

Fecha: **U8 1.6**

Ⓟ Separadamente, para los datos de Carlos y Antonio:
a) Completa la tabla y calcula la media, ¿qué ocurre?
b) Identifica los limites superior e inferior de la última y primera clase respectivamente, que tengan frecuencia distinta de cero.
c) Resta el límite inferior del superior determinado en b. ¿Cuáles datos están más dispersos?

Ⓢ a) Carlos: $\mu = 17.5$ Antonio: $\mu = 16.5$
b)

	Límite superior	Límite inferior
Carlos:	35	5
Antonio:	30	5

c) Carlos: 35 – 5 = 30 Antonio: 30 – 5 = 25

La serie de Carlos se encuentra más dispersa.

Ⓡ a) Pm: 45, 55, 65, 75, 85
$f_1 \times Pm$: 450, 605, 780, 825, 510
$f_2 \times Pm$: 360, 495, 780, 750, 680
8.°: $\mu = 63.4$ minutos
9.°: $\mu = 63.4$ minutos
Las medias son iguales.

b) 8.°: 50 minutos;
9.°: 60 minutos.

Tarea: página 174 del Cuaderno de Ejercicios.

1.7 Varianza para datos agrupados

P

En la tabla aparecen los datos correspondientes a la cantidad de cuadernos vendidos por Carlos durante 30 días:

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días Carlos (f_c)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
5 a 10	3	7.5	22.5	−10	100	300
10 a 15	7	12.5	87.5			
15 a 20	10	17.5	175.0			
20 a 25	8	22.5	180.0			
25 a 30	1	27.5	27.5			
30 a 35	1	32.5	32.5			
TOTAL	30					
Media aritmética (μ)	**17.5**					

a) Completa la tabla y calcula la suma de los datos de la última columna.
b) ¿Cómo podrías calcular la varianza para esta serie de datos agrupados?

S

a) La tabla completa se presenta a continuación:

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días Carlos (f_c)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
5 a 10	3	7.5	22.5	−10	100	300
10 a 15	7	12.5	87.5	−5	25	175
15 a 20	10	17.5	175.0	0	0	0
20 a 25	8	22.5	180.0	5	25	200
25 a 30	1	27.5	27.5	10	100	100
30 a 35	1	32.5	32.5	15	225	225
TOTAL	**30**					
Media aritmética (μ)	**17.5**					

La sumatoria de los datos de la última columna, $f(Pm - \mu)^2$, es:

$$300 + 175 + 0 + 200 + 100 + 225 = 1\,000$$

b) Para calcular la varianza, basta dividir entre el número total de datos el resultado de la suma calculada en el literal a), es decir:

$$\sigma^2 = \frac{1\,000}{30}$$

$$\approx 33.33$$

Igual que en las series de datos no agrupados, la varianza se encuentra expresada en unidades cuadradas. Para este caso serían “días al cuadrado”.

Por lo tanto, $\sigma^2 \approx 33.33$.

C La varianza de una serie de datos agrupados se calcula de la siguiente forma:

$$Varianza = \frac{\text{Suma de los productos } f\,(Pm - \mu)^2}{\text{Número de datos}}$$

es decir,

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma\, f(Pm - \mu)^2}{n}$$

Donde n es el número total de datos, Σ es el símbolo de sumatoria, f es la frecuencia de cada clase, Pm es el punto medio de cada clase y μ es la media aritmética de la serie de datos.

Cuanto mayor sea la varianza, más dispersos se encontrarán los datos con respecto a su media aritmética.

1. Completa la tabla y calcula la varianza para la cantidad de cuadernos vendidos por Antonio. Luego determina en cuál serie los datos se encuentran más dispersos, comparando las varianzas.

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días Antonio (f_c)	Punto medio (Pm)	$f \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
5 a 10	4	7.5	30.0	−9	81	324
10 a 15	8	12.5	100.0	–4	16	128
15 a 20	9	17.5	157.5	1	1	9
20 a 25	8	22.5	180.0	6	36	288
25 a 30	1	27.5	27.5	11	121	121
30 a 35	0	32.5	0.0	16	256	0
TOTAL	**30**					
Media aritmética (μ)	**16.5**					

2. Con las series de datos agrupados de las dos comunidades de Morazán de la clase 5 realiza lo siguiente:

a) Completa la siguiente tabla y calcula la varianza de los datos de la comunidad 1:

Edad en años	Cantidad de personas	Punto medio (Pm)	$f_i \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_i(Pm - \mu)^2$
	Comunidad 1 (f_i)					
De 9 a 12	7	10.5	73.5	−4	16	112
De 12 a 15	11	13.5	148.5	−1	1	11
De 15 a 18	7	16.5	115.5	2	4	28
De 18 a 21	5	19.5	97.5	5	25	125
TOTAL	**30**					
Media aritmética (μ)	**14.5**					

b) Elabora una tabla como la anterior para la comunidad 2 y calcula la varianza de sus datos.
c) Con base a lo anterior responde, ¿en cuál comunidad los datos se encuentran más dispersos?

Como los datos de la comunidad 2 tienen mayor varianza entonces están más dispersos.

Indicador de logro

1.7 Calcula la varianza para datos agrupados.

Secuencia

Los estudiantes ya conocen la forma de agrupar en clases una serie de datos así como calcular la varianza de un conjunto de datos no agrupados, por lo que ahora se calculará esta medida para datos agrupados.

Propósito

Ⓟ En el literal b) del Problema inicial se espera que el estudiante relacione la forma de cálculo de la varianza para datos agrupados con la de datos no agrupados, y así determinar que la suma solicitada en el literal a) se tenga que dividir por el total de datos.

Solución de algunos ítems:

1.
$\Sigma f(Pm - \mu)^2$
$= 324 + 128 + 9 + 288 + 121 + 0$
$= 870$
$\sigma^2 = \frac{870}{30}$
$\sigma^2 = 29$
Como la varianza del conjunto de datos correspondientes a Carlos es mayor, entonces están más dispersos.

b) Para la comunidad 2 (observar la tabla de la izquierda)
$\Sigma f(Pm - \mu)^2$
$= 108 + 0 + 36 + 144$
$= 288$
$\sigma^2 = \frac{288}{30}$
$\sigma^2 = 9.6$

c) Como los datos de la comunidad 2 tienen mayor varianza entonces están más dispersos.

2.
a)
$\Sigma f(Pm - \mu)^2$
$= 112 + 11 + 28 + 125$
$= 276$
$\sigma^2 = \frac{276}{30}$
$\sigma^2 = 9.2$

Comunidad 2.

	f_2	Pm	$f_2 \times Pm$	$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_2(Pm - \mu)^2$
	12	10.5	126	−3	9	108
	10	13.5	135	0	0	0
	4	16.5	66	3	9	36
	4	19.5	78	6	36	144
Total	30					
μ	13.5					

Fecha: **U8 1.7**

Ⓟ Con base a la información presentada en la tabla:
a) Complétala y calcula la suma de los datos de la columna $f(Pm - \mu)^2$.
b) ¿Cómo podrías calcular la varianza para esta serie de datos agrupados?

Ⓢ a) $\Sigma f(Pm - \mu)^2 = 300 + 175 + 0 + 200 + 100 + 225 = 1\,000$

b) Dividir entre el número total de datos el resultado de la suma calculada en a).

$\sigma^2 = \frac{1\,000}{30}$
$\sigma^2 \approx 33.33$

Ⓡ
1.
$Pm - \mu$: −9, −4, 1, 6, 11, 16
$(Pm - \mu)^2$:81, 16, 1, 36, 121, 256
$f(Pm - \mu)^2$:324, 128, 9, 288, 121, 0
$\sigma^2 = 29$
Como la varianza del conjunto de datos correspondiente a Carlos es mayor, entonces están más dispersos.

Tarea: página 176 del Cuaderno de Ejercicios.

1.8 Desviación típica para datos agrupados

P

Calcula la desviación típica de la serie de datos correspondientes a la cantidad de cuadernos vendidos por Carlos y Antonio durante 30 días y justifica en cuál de ellas los datos se encuentran más dispersos.

Cantidad de cuadernos vendidos	Número de días	
	Carlos (f_C)	Antonio (f_A)
5 a 10	3	4
10 a 15	7	8
15 a 20	10	9
20 a 25	8	8
25 a 30	1	1
30 a 35	1	0
TOTAL	**30**	**30**
Media aritmética (μ)	**17.5**	**16.5**
Varianza (σ^2)	33.33	29

S

Para datos agrupados en clases, la desviación típica sigue siendo igual a la raíz cuadrada de la varianza.
Para la serie de datos de Carlos:

$$\sigma = \sqrt{33.33}$$
$$\approx 5.77$$

Y para la serie de datos de Antonio:

$$\sigma = \sqrt{29}$$
$$\approx 5.39$$

Como la desviación típica de la distribución de Carlos es mayor a la de Antonio, se concluye que los datos de la distribución de Carlos se encuentran más dispersos, con respecto a su media aritmética 17.5.

C

La desviación típica de una serie de datos agrupados se calcula:

$$\textit{Desviación típica} = \sqrt{\textit{varianza}}$$

Es decir,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(Pm - \mu)^2}{n}}$$

Donde n es el número total de datos, Σ es el símbolo de sumatoria, f es la frecuencia de cada clase, Pm es el punto medio de cada clase y μ es la media aritmética de la serie de datos. Tanto para datos agrupados como no agrupados, la desviación típica siempre es un número mayor que cero o igual a cero (en su defecto), nunca será un número negativo.

Con base al ejercicio 2 de la clase anterior. Calcula la desviación típica (σ) de las series de datos agrupados de las dos comunidades de Morazán y responde con base a esta medida, ¿en cuál comunidad los datos se encuentran más dispersos?

Los datos de la comunidad 1 tienen una mayor desviación típica. Por tanto, están más dispersos.

174

Indicador de logro

1.8 Calcula la desviación típica para datos agrupados.

Secuencia

Al igual que se trabajó la desviación típica para datos no agrupados, la desviación típica para datos agrupados se obtiene a partir de la varianza calculada para datos previamente agrupados.

Propósito

Ⓟ Se espera que el estudiante determine que el conjunto de datos distribuidos en clases, con mayor desviación típica es el que posee mayor dispersión, según lo aprendido en la clase 1.4 de esta unidad.

Solución de algunos ítems:

Para la comunidad 1.

$\sigma^2 = 9.2$
$\sigma = \sqrt{9.2}$
$\sigma \approx 3.03$

Para la comunidad 2.

$\sigma^2 = 9.6$
$\sigma = \sqrt{9.6}$
$\sigma \approx 3.10$

Los datos de la comunidad 1 tienen una mayor desviación típica. Por tanto están más dispersos.

Fecha: **U8 1.8**

Ⓟ Para las series de datos de Carlos y Antonio, separadamente, calcula la desviación típica. Luego justifica cuál de ellas se encuentra más dispersa.

Ⓢ Para datos agrupados en clases la σ sigue siendo la raíz cuadrada de la varianza.

Carlos: $\sigma = \sqrt{33.33}$
$\sigma \approx 5.77$

Antonio: $\sigma = \sqrt{29}$
$\sigma \approx 5.39$

Como 5.77 > 5.39, entonces los datos de Carlos son más dispersos.

Ⓡ Para la comunidad 1.

$\sigma^2 = 9.2$
$\sigma = \sqrt{9.2}$
$\sigma \approx 3.03$

Para la comunidad 2.

$\sigma^2 = 9.6$
$\sigma = \sqrt{9.6}$
$\sigma \approx 3.10$

Los datos de la comunidad 2 tienen una mayor desviación típica. Por tanto están más dispersos.

Tarea: página 178 del Cuaderno de Ejercicios.

1.9 Practica lo aprendido

1. Los siguientes datos representan las estaturas de 8 estudiantes en centímetros:
163, 162, 164, 163, 164, 162, 161, 185.

   a) Calcula la media aritmética, la mediana y el rango de la serie de datos.
   b) ¿Cuál de las medidas, media o mediana, escogerías para representar la distribución? Justifica tu respuesta.

   μ = 165.5 cm, Mediana: 163 cm, Rango: 185 – 161 = 24 cm

2. Con los datos presentados en la siguiente tabla, determina cuáles de las series de datos B, C y D tienen igual desviación típica que la serie de datos de A. Justifica tu respuesta.

A	B	C	D
25	30	35.5	28
24	29	34.5	27
25	30	35.5	28
26	31	36.5	29
23	28	33.5	26
21	26	31.5	21
25	30	35.5	28
24	29	34.5	27
23	28	33.5	23
22	27	32.5	22

A: $\sigma \approx 1.47$ B:
$\sigma \approx 1.47$
C: $\sigma \approx 1.47$
D: $\sigma = 2.7$

Según los cálculos solo la serie D posee una desviación diferente a la de A.

3. Observa las siguientes series de datos no agrupados:

	Serie A
1	30
2	25
3	11
4	20
5	14
6	26

	Serie B
1	18
2	20
3	19
4	21
5	22

$\sigma \approx 6.73$
$\sigma \approx 1.41$

   a) Calcula las desviaciones respecto a su media aritmética de cada serie y la desviación típica.
   b) Comparando las desviaciones típicas, determina en cuál serie los datos se encuentran más dispersos. Según las desviaciones típicas de cada una de las series, se concluye que la serie A está más dispersa.

4. Los siguientes datos representan el peso en libras de 9 personas que trabajan en una oficina.
160 l, 200 l, 164 l, 130 l, 140 l, 162 l, 161 l, 185 l, 154 l.

   μ = 161.78 libras, Mediana: 161 libras, Rango: 200 – 130 = 70 libras

   a) Calcula la media aritmética, la mediana y el rango de la serie de datos.
   b) ¿Cuál de las medidas, media o mediana, escogerías para representar la distribución? Justifica tu respuesta. En los casos que la media y la mediana casi coinciden se elige la media porque es una medida más sensible a la variación de los datos de la serie y fácil a tratar.

Indicador de logro

1.9 Resuelve problemas correspondientes a la dispersión de un conjunto de datos.

Solución de algunos ítems:

1.

a) Media:

$\mu = \frac{163 + 162 + 164 + 163 + 164 + 162 + 161 + 185}{8}$

$\mu = \frac{1\,324}{8}$

$\mu = 165.5$ cm

Mediana:

161, 162, 162, 163, 163, 164, 164, 185

$\frac{163 + 163}{2} = 163$ cm

Rango:

185 – 161 = 24 cm

b) Se debe elegir la mediana porque 185 es un dato muy diferente a los demás y hace que la media sea de 165.5, aún cuando ninguno de los 7 datos restantes es al menos 165.

2.

Desviación típica para la serie:

A: $\mu = 23.8$, $\sigma^2 = \frac{21.6}{10} = 2.16$, $\sigma \approx 1.47$

B: $\mu = 28.8$, $\sigma^2 = \frac{21.6}{10} = 2.16$, $\sigma \approx 1.47$

C: $\mu = 34.3$, $\sigma^2 = \frac{21.6}{10} = 2.16$, $\sigma \approx 1.47$

D: $\mu = 25.9$, $\sigma^2 = \frac{72.9}{10} = 7.29$, $\sigma = 2.7$

Según los cálculos solo la serie D posee una desviación diferente a la de A.

3.

a) Desviación típica para la serie:

A: $\mu = 21$, $\sigma^2 = \frac{272}{6} \approx 45.33$, $\sigma \approx 6.73$

B: $\mu = 20$, $\sigma^2 = \frac{10}{5} = 2$, $\sigma \approx 1.41$

b) Según las desviaciones típicas de cada una de las series, se concluye que la serie A está más dispersa.

4.

a) $\mu = \frac{1\,456}{9} \approx 161.78$ libras

Mediana.

130, 140, 154, 160, 161, 162, 164, 185, 200

Mediana: 161 libras

Rango: 200 – 130 = 70 libras

b) En los casos que la media y la mediana casi coinciden, se elige la media porque es una medida más sensible a la variación de los datos de la serie.

Tarea: página 180 del Cuaderno de Ejercicios.

1.10 Practica lo aprendido

1. Una tienda de ropa tiene dos sucursales A y B. En 100 días registran la cantidad de clientes atendidos en cada sucursal, los datos se presentan en la siguiente tabla:

Cantidad de clientes	Cantidad de días	
	Sucursal A	Sucursal B
50 a 60	15	17
60 a 70	20	21
70 a 80	24	27
80 a 90	22	20
90 a 100	19	15

a) Calcula la varianza para cada una de las sucursales. Sucursal A $\sigma^2 = 177$ Sucursal B $\sigma^2 = 168.75$

b) Con base a la varianza, ¿en cuál sucursal los datos se encuentran más dispersos?

Según la varianza, los datos de la sucursal A tienen una mayor dispersión.

2. Se realizó un estudio sobre el peso, en libras, de los estudiantes de noveno grado de un centro escolar. Los resultados se presentan en la siguiente tabla:

Peso en libras	Sección A	Sección B
120 a 130	7	5
130 a 140	12	9
140 a 150	13	12
150 a 160	10	14
160 a 170	8	10

Utiliza la desviación típica para determinar en cuál de las secciones los pesos se encuentran más dispersos, con respecto a su media aritmética.

Sección A $\sigma \approx 12.81$ libras

Sección B $\sigma \approx 12.53$ libras

Según la desviación, los datos de la sección A tienen una mayor dispersión.

3. La estatura en pulgadas de cierto grupo de personas se muestra en la siguiente tabla. Sabiendo que $\mu = 67.45$

Estatura	f	Pm
60 - 62	1	61
62 - 64	4	63
64 - 66	8	65
66 - 68	30	67
68 - 70	37	69

a) Calcula la varianza.

b) Calcula la desviación típica.

Indicador de logro

1.10 Resuelve problemas correspondientes a la dispersión de un conjunto de datos.

Solución de algunos ítems:

1.

a)

Pm	$f_1 \times Pm$	$f_2 \times Pm$
55	825	935
65	1 300	1 365
75	1 800	2 025
85	1 870	1 700
95	1 805	1 425

Sucursal A

$\mu = \frac{7\,600}{100} = 76$ personas

$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_2(Pm - \mu)^2$
–21	441	6 615
–11	121	2 420
–1	1	24
9	81	1 782
19	361	6 859

$\sigma^2 = \frac{17\,700}{100} = 177$

Sucursal B

$\mu = \frac{7\,450}{100} = 74.5$ personas

$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f_1(Pm - \mu)^2$
–19.5	380.25	6 464.25
–9.5	90.25	1 895.25
0.5	0.25	6.75
10.5	110.25	2 205
20.5	420.25	6 303.75

$\sigma^2 = \frac{16\,875}{100} = 168.75$

b) Según la varianza, los datos de la sucursal A tienen una mayor dispersión.

3.

$\mu = \frac{5\,396}{80} = 67.45$ pulgadas

$Pm - \mu$	$(Pm - \mu)^2$	$f(Pm - \mu)^2$
–6.45	41.6	41.6
–4.45	19.8	79.2
–2.45	6.0	48
–0.45	0.2	6
1.55	2.4	88.8

a) $\sigma^2 = \frac{263.6}{80} \approx 3.3.$

b) $\sigma \approx 1.82$ pulgadas.

Tarea: página 181 del Cuaderno de Ejercicios.

Lección 2 Propiedades de la desviación típica

2.1 Desviación típica de una variable, más una constante

P

En una empresa se aumenta $50 al salario de 10 trabajadores; en la tabla de la derecha se muestran los salarios anteriores y el salario actual.

a) ¿Cuál es la media aritmética de ambas series de datos?
b) Calcula la desviación típica para ambas series de datos y compáralas, ¿qué ocurre?
c) ¿Qué pasaría con la desviación típica de los datos del salario actual si el aumento fuera de $60?

Trabajador	Salario anterior (en dólares)	Salario actual (en dólares)
1	485	535
2	488	538
3	486	536
4	489	539
5	486	536
6	485	535
7	488	538
8	487	537
9	500	550
10	486	536

S

a) La media aritmética de los salarios anteriores se calcula:

$$\mu = \frac{485 + 488 + 486 + 489 + 486 + 485 + 488 + 487 + 500 + 486}{10}$$

$$= 488$$

Si a los datos de una serie A se les suma una constante dando como resultado otra serie B, entonces la media de B es igual a la media de A más la constante.

De manera similar se calcula la media aritmética de los salarios actuales, cuyo resultado es 538. Por lo tanto, la media aritmética de los salarios anteriores es $488 y la de los salarios actuales es $538.

b) En la tabla se muestran las desviaciones, de los salarios anteriores, con respecto a su media aritmética $488 y sus respectivos cuadrados:

Trabajador	Salario anterior (en dólares)	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
1	485	−3	9
2	488	0	0
3	486	−2	4
4	489	1	1
5	486	−2	4
6	485	−3	9
7	488	0	0
8	487	−1	1
9	500	12	144
10	486	−2	4
Media (μ)	**488**		

Luego, la desviación típica se calcula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{9+0+4+1+4+9+0+1+144+4}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{176}{10}}$$

$$= 4.2$$ ← **Corrección:** Debe ser ≈ en lugar de =.

De manera similar se calcula la desviación típica de los salarios actuales, cuyo resultado también es 4.2; es decir, la desviación típica a diferencia de la media aritmética, no se vio afectada al sumar 50 a cada uno de los datos.

c) Si el aumento fuera de $60, entonces la desviación típica sería igual a la calculada para el salario anterior, o sea 4.2.

C

Si a cada uno de los datos de una distribución A se les suma la misma constante c (c es un número cualquiera) dando como resultado otra distribución B, entonces la desviación típica de la distribución B es igual a la desviación típica de la distribución A.

1. Observa la tabla con dos series de datos A y B, ¿tienen ambas distribuciones la misma desviación típica? Justifica tu respuesta y calcula el valor de la misma.

	Serie A	Serie B
1	25.1	37.1
2	26.4	38.4
3	27.5	39.5
4	20.7	32.7
5	21.2	33.2

Sí, tiene la misma desviación típica. La serie B básicamente es la serie A con un aumento de 12 unidades para cada dato.

2. En la residencial Centroamérica aumentarán $5 a la tarifa mensual por el servicio de agua potable. ¿Cuál será el valor de la desviación típica de la distribución teniendo en cuenta este cambio?

Casa	Tarifa a cancelar (en dólares)
1	10.50
2	10.60
3	12.20
4	11.50
5	12.90
6	11.40
7	12.60
8	12.50
9	11.30
10	35.50

Al sumar una constante a cada dato de una serie, la desviación típica de la serie original no es afectada. Por tanto, basta con calcular la desviación de la serie original. $\sigma \approx 7.18$ dólares.

Indicador de logro

2.1 Calcula la desviación típica de distribuciones cuyos datos son la suma de una constante y una variable.

Secuencia

Así como en octavo grado se estudiaron las propiedades de la media aritmética, en noveno grado se trabajarán dos propiedades de la desviación típica. Para esta clase se estudia la desviación típica de una variable más una constante. Para ilustrar las propiedades se utilizan series simples para que facilite la comprensión a los estudiantes.

Propósito

Ⓟ En el literal a) de la Solución se puede hacer referencia a la propiedad de la media aritmética vista en octavo grado, la cual establece que "al sumar una constante a un conjunto de datos, la media de los datos originales aumenta en esa constante".

Solución de algunos ítems:

1. Serie A

Serie A		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
25.1	0.92	0.85
26.4	2.22	4.93
27.5	3.32	11.02
20.7	–3.48	12.11
21.2	–2.98	8.88

$\mu = 24.18$

$\Sigma\,(x - \mu)^2$

$\approx 0.85 + 4.93 + 11.02 + 12.11 + 8.88$

$= 37.79$

$\sigma^2 \approx \frac{37.79}{5}$

$\sigma^2 \approx 7.56$

$\sigma \approx \sqrt{7.56} \approx 2.75$

Serie B

Serie B		
x	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
37.1	0.92	0.85
38.4	2.22	4.93
39.5	3.32	11.02
32.7	–3.48	12.11
33.2	–2.98	8.88

$\mu = 36.18$

$\Sigma\,(x - \mu)^2$

$\approx 0.85 + 4.93 + 11.02 + 12.11 + 8.88$

$= 37.79$

$\sigma^2 \approx \frac{37.79}{5}$

$\sigma^2 \approx 7.56$

$\sigma \approx \sqrt{7.56} \approx 2.75$

2. Dado que al sumar una constante a cada dato de una serie, la desviación típica de la serie original no es afectada, basta con calcular la desviación de la serie original.

$\mu = 14.1$ dólares

$\Sigma\,(x - \mu)^2$

$= 12.96 + 12.25 + 3.61 + 6.76 + 1.44 + 7.29 + 2.25 + 2.56 + 7.84 + 457.96$

$= 514.92$

$\sigma^2 = \frac{514.92}{10}$

$\sigma^2 \approx 51.49$

$\sigma \approx \sqrt{51.49} \approx 7.18$ dólares

Fecha: **U8 2.1**

Ⓟ A partir de los datos de la tabla en el libro de texto; calcula:

a) La media de cada serie.

b) La desviación típica de cada serie y compáralas, ¿qué ocurre?

c) La desviación típica de cada serie si el aumento fuera de \$60.

Ⓢ a) Salarios anteriores: $\mu = 488$ Salarios actuales: $\mu = 538$

b) Salarios anteriores: $\sigma = 4.2$ Salarios actuales: $\sigma = 4.2$

c) La desviación típica sería igual, o sea $\sigma = 4.2$.

Ⓡ Serie A:

1. $\sigma \approx 2.75$
   Serie B:
   $\sigma \approx 2.75$
   Sí, tiene la misma desviación típica. La serie B básicamente es la serie A con un aumento de 12 unidades para cada dato.
2. Al sumar una constante a cada dato de una serie, la desviación típica de la serie original no es afectada. Por tanto basta con calcular la desviación de la serie original. $\sigma \approx 7.18$

Tarea: página 182 del Cuaderno de Ejercicios.

2.2 Desviación típica de una variable multiplicada por una constante

P

Cinco corredores deciden que para el mes de febrero aumentarán al doble las longitudes que recorren cada semana para entrenar. En la tabla se presenta la longitud recorrida en enero y la longitud que se recorrerá en febrero.

a) Calcula la desviación típica de ambas series de datos.

b) Efectúa el cociente entre la desviación típica de febrero y la desviación típica de enero, ¿cuál es la relación entre ambos datos?

Corredores	Longitud recorrida en metros	
	Enero	Febrero
1	150	300
2	160	320
3	145	290
4	165	330
5	150	300

S

a) Para calcular la desviación típica es necesario tener la media aritmética de cada serie de datos. Para enero la media es:

$$\mu = \frac{150 + 160 + 145 + 165 + 150}{5} = 154.$$

Se calculan los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media aritmética 154 m, los resultados se presentan en la siguiente tabla:

Corredores	Enero	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$
1	150	–4	16
2	160	6	36
3	145	–9	81
4	165	11	121
5	150	–4	16
Media (μ)	**154**		

$$\sigma = \sqrt{\frac{16 + 36 + 81 + 121 + 16}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{270}{5}}$$

$$= 7.35$$ **Corrección:** Debe ser ≈ en lugar de =.

La desviación típica de enero es 7.35.

Para los datos de febrero: como las longitudes se han aumentado al doble, (se han multiplicado por 2) entonces la media aritmética de febrero también aumenta al doble, o sea 308 m. La desviación típica se calcula de manera similar a la de enero, dando como resultado 14.7.

Unidad 8

b) El cociente es:

$$\frac{\textit{Desviación típica de febrero}}{\textit{Desviación típica de enero}} = \frac{14.7}{7.35} = 2$$

Es decir, la desviación típica de febrero es el doble de la desviación típica de enero. Cuando los datos se multiplican por un número positivo, la desviación típica también se multiplica por ese número.

C

Si a cada uno de los datos de una distribución A se les multiplica por la misma constante c (c es un número positivo), dando como resultado otra distribución B, entonces la desviación típica de la distribución B es igual a multiplicar la desviación típica de la distribución A por la constante c.

1. En la tabla de abajo se presentan tres series de datos:

   a) ¿Cuál es el número por el que se tienen que multiplicar los datos de la serie A para obtener la serie B?, ¿y para obtener la serie C?

   Serie B: se multiplica la serie A por 1.5. Serie C: se multiplica la serie A por 0.4.

   b) Calcula la desviación típica de la serie A, con base a ella calcula la desviación típica de las series B y C.

A	B	C
12.5	18.75	5.0
11.0	16.5	4.4
11.5	17.25	4.6
12.8	19.2	5.12
12.2	18.30	4.88

Serie A: $\sigma \approx 0.66$
Serie B: $0.66 \times 1.5 = 0.99$
Serie C: $0.66 \times 0.4 \approx 0.26$

2. En una serie de datos, la media aritmética de la distribución es 35 y la desviación típica es 17.07; si cada uno de los datos se reduce a la mitad, ¿cuál será el valor de la nueva desviación típica?

   Reducir a la mitad es equivalente a multiplicarlo por $\frac{1}{2}$, por tanto la nueva σ es: $17.07 \times \frac{1}{2} = 8.54$.

3. Una librería registra la cantidad de libros vendidos, de lunes a viernes, durante dos semanas.

   a) ¿Cuál es el número por el que se tienen que multiplicar los datos de la semana 1 para obtener los de la semana 2? Se tienen que multiplicar por 3.

   b) Calcula la desviación típica para ambas semanas.

Días	Cantidad de libros vendidos	
	Semana 1	Semana 2
lunes	8	24
martes	9	27
miércoles	5	15
jueves	7	21
viernes	11	33

Para la semana 1:
$\sigma = 2$

Para la semana 2:
$\sigma = 2 \times 3 = 6$

180

Indicador de logro

2.2 Calcula la desviación típica de distribuciones cuyos datos son el producto de una constante por una variable.

Secuencia

Para la clase 2.2 se da continuidad a la presentación y trabajo de las propiedades de la desviación típica. Se trabaja con la desviación típica de una variable por una constante.

Propósito

Ⓟ En el literal a) de la Solución se puede hacer referencia a la propiedad de la media aritmética vista en octavo grado, que establece que "al multiplicar un conjunto de datos por una misma constante la media aritmética de los datos originales queda multiplicada por dicha constante".

Solución de algunos ítems:

1.
a) Para obtener la serie B:
Se calculará el cociente entre un dato de la serie B y el correspondiente en la serie A.

$$\frac{\text{Serie B}}{\text{Serie A}} = \frac{18.75}{12.5} = 1.5$$

Para obtener la serie C:
Se calculará el cociente entre un dato de la serie C y el correspondiente en la serie A.

$$\frac{\text{Serie C}}{\text{Serie A}} = \frac{5}{12.5} = 0.4$$

b) $\mu = 12$
$\Sigma(x - \mu)^2$
$= 0.25 + 1 + 0.25 + 0.64 + 0.04$
$= 2.18$
$\sigma^2 = \frac{2.18}{5}$
$\sigma^2 \approx 0.44$
$\sigma \approx \sqrt{0.44} \approx 0.66$
Por tanto, la desviaciones para las otras series son:
Para B
$0.66 \times 1.5 = 0.99$
Para C
$0.66 \times 0.4 \approx 0.26$

2. Reducir a la mitad cada dato es equivalente a multiplicarlo por $\frac{1}{2}$, por tanto la nueva desviación típica será:

$$17.07 \times \frac{1}{2} \approx 8.54$$

3.
a) Para obtener la semana 2.
Se calculará el cociente entre un dato de la semana 2 y el correspondiente en la semana 1.

$$\frac{\text{Semana 2}}{\text{Semana 1}} = \frac{24}{8} = 3$$

b) Para la semana 1:
$\mu = 8$
$\Sigma(x - \mu)^2$
$= 0 + 1 + 9 + 1 + 9$
$= 20$
$\sigma^2 = \frac{20}{5}$
$\sigma^2 = 4$
$\sigma = \sqrt{4} = 2$ libros.
Por tanto, la desviación para la semana 2 es:
$2 \times 3 = 6$ libros.

Fecha: **U8 2.2**

Ⓟ A partir de los datos de la tabla en el libro de texto; calcula:
a) La desviación típica de cada serie.
b) El cociente entre la desviación típica de febrero y la desviación típica de enero. ¿Cuál es la relación entre ambas series?

Ⓢ a) Enero: $\sigma = 7.35$ Febrero: $\sigma = 14.7$

b) $\frac{\textit{Desviación típica de febrero}}{\textit{Desviación típica de enero}} = \frac{14.7}{7.35} = 2$

La desviación típica de febrero es el doble de la desviación típica de enero.

Ⓡ 1.
a) Serie B: Se multiplica la serie A por 1.5
Serie C: Se multiplica la serie A por 0.4
b) Serie A: $\sigma \approx 0.66$
Serie B: $0.66 \times 1.5 = 0.99$
Serie C: $0.66 \times 0.4 \approx 0.26$

2.
Reducir a la mitad es equivalente a multiplicarlo por $\frac{1}{2}$, por tanto la nueva σ es:
$17.07 \times \frac{1}{2} = 0.99$.

Tarea: página 184 del Cuaderno de Ejercicios.

Anexos

Análisis de resultados
Cuando finalice el trimestre se pueden utilizar los cuadros para el análisis de los respectivos resultados.

Jornalización
Se presentan hojas para realizar la planificación anual en la asignatura de matemática, en ella se deben colocar las clases a impartir durante cada día lectivo.

Pruebas
Se proporcionan las pruebas de cada unidad, así como la prueba de trimestre, para que los docentes las fotocopien y apliquen a los estudiantes cuando corresponda.

Análisis de resultados del primer trimestre					
	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba de trimestre
Promedio obtenido					
n.° de estudiantes con promedio menor que 6					
n.° de estudiantes con promedio entre 6 y 8					
n.° de estudiantes con promedio mayor que 8					
Análisis de resultados del segundo trimestre					
	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba de trimestre
Promedio obtenido					
n.° de estudiantes con promedio menor que 6					
n.° de estudiantes con promedio entre 6 y 8					
n.° de estudiantes con promedio mayor que 8					
Análisis de resultados del tercer trimestre					
	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba U__	Prueba de trimestre
Promedio obtenido					
n.° de estudiantes con promedio menor que 6					
n.° de estudiantes con promedio entre 6 y 8					
n.° de estudiantes con promedio mayor que 8					

Jornalización año: 2020											
	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Sept.	Oct.	Nov.
1		X	X					X			X
2		X			X			X			
3					X					X	
4	X			X			X			X	
5	X			X			X		X		
6						X			X		
7			X			X					X
8		X	X					X			X
9		X			X			X			
10					X					X	
11	X			X			X			X	
12	X			X			X		X		
13						X			X		
14			X			X					X
15		X	X					X			X
16		X			X			X			
17					X					X	
18	X			X			X			X	
19	X			X			X		X		
20	U1 1.1					X			X		
21	1.2		X			X					X
22		X	X					X			X
23		X			X			X			
24					X					X	
25	X			X			X			X	
26	X			X			X		X		
27						X			X		
28			X			X					X
29		X	X					X			X
30					X			X			
31					X					X	

Jornalización año:											
	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Sept.	Oct.	Nov.
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											
22											
23											
24											
25											
26											
27											
28											
29											
30											
31											

GOBIERNO DE
EL SALVADOR

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

JICA

Guía metodológica Tomo 2 Matemática 9