



MINISTERIO DE EDUCACIÓN  
DIRECCIÓN NACIONAL DE EDUCACIÓN  
GERENCIA DE SEGUIMIENTO A LA CALIDAD  
DEPARTAMENTO DE EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

GOBIERNO DE

EL SALVADOR

UNÁMONOS PARA CRECER

PRUEBA DE APRENDIZAJE Y APTITUDES PARA EGRESADOS DE EDUCACIÓN MEDIA

PAES

**Matemática**

Boletín de Resultados  
PAES 2014

**Informe para docentes**

## CRÉDITOS

Carlos Mauricio Canjura Linares  
Ministro de Educación

Francisco Humberto Castaneda  
Viceministro de Educación

Erlinda Hándal Vega  
Viceministra de Ciencia y Tecnología

Renzo Uriel Valencia Arana  
Director Nacional de Educación

Juan Carlos Arteaga Mena  
Gerente de Seguimiento a la Calidad

Hilda Dolores Álvarez Aguilar  
Jefa del Departamento de Evaluación de los Aprendizajes

## DISEÑO Y ELABORACIÓN

Equipo Técnico del Departamento de Evaluación de los Aprendizajes

## DIAGRAMACIÓN

Nalda Alcira Garay de Santos

Edwin Salvador Ramírez Rivera

## Contenido

Presentación	4
1. Resultados generales de la PAES 2014	5
1.1 Población evaluada en PAES 2014	5
1.2 Resultados nacionales, global y por asignatura, PAES 2014	6
1.3 Porcentaje de estudiantes en cada nivel de logro	7
2. Análisis de resultados en la asignatura de Matemática.	8
2.1 Descripción y Análisis de las competencias evaluadas.	8
2.2 Descripción de conocimientos y habilidades en cada nivel de logro	17
3. Análisis de los ítems de Desarrollo	18
4. Recomendaciones generales	54

## Presentación

En diversas oportunidades se ha mencionado que los resultados de la Prueba de Aprendizaje y Aptitudes para Egresados de Educación Media, PAES, constituyen un indicador de la calidad de la educación que se brinda a los estudiantes de este país.

Sin embargo, para que la información generada a partir de esta Prueba, tenga un efecto de mejora del sistema educativo, es necesario que los resultados sean utilizados por parte de los equipos directivos y docentes de los centros educativos, así como por las diversas Unidades Técnicas del Ministerio de Educación.

Con este propósito, el Departamento de Evaluación de los Aprendizajes, como responsable de administrar esta evaluación en educación media, año con año genera una variedad de reportes y documentos con los principales resultados y su respectivo análisis, para que sean tomados en cuenta en la toma de decisiones orientadas a mejorar o elevar el nivel de aprendizajes de los estudiantes.

Cada centro educativo cuenta con su reporte institucional por sección y modalidad; adicionalmente en el presente año se les han brindado los siguientes documentos: “Porcentaje de respuestas de las opciones de cada ítem” y el documento “ítems de la PAES 2014 y Justificaciones de las opciones de respuesta”, en los que se da a conocer cuál fue el comportamiento de los estudiantes de la institución en cada uno de los ítems incluidos en la prueba y donde es que presentaron mayores dificultades.

Además de los documentos anteriores, se hace entrega del presente Boletín de resultados PAES 2014, elaborado para cada asignatura evaluada, el cual está dirigido a los docentes, pues en el se hace una descripción de cómo se evaluó cada competencia en la prueba, con el correspondiente análisis de los resultados; se dan a conocer algunos ítems representativos de las competencias con su análisis. Asimismo, se presentan los conocimientos y habilidades por nivel de logro y se incluye un capítulo referido al proceso de codificación y análisis de los ítems de desarrollo que se presentaron en la prueba.

Se incorpora en el primer apartado, información general sobre la población evaluada a nivel nacional y por departamento, así como los resultados nacionales: global y por asignatura y los porcentajes de estudiantes que se ubicaron en cada nivel de logro.

Con el análisis de la información proporcionada y la utilización de esta en la planeación y ejecución de planes de mejora, se irá cumpliendo con el reto de elevar la calidad de la educación.

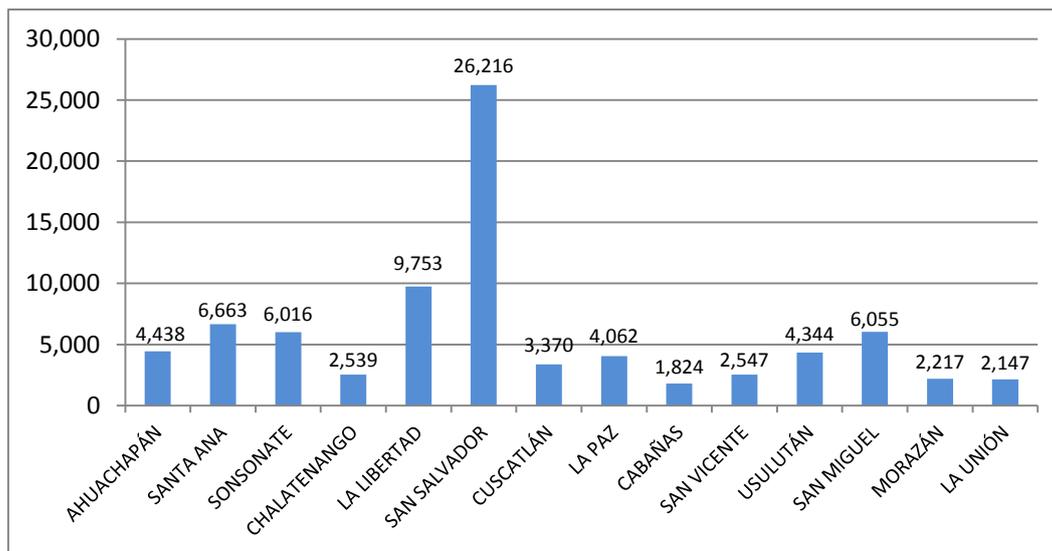
## 1. Resultados generales de la PAES 2014

Para el diseño e implementación de los planes de mejora de los aprendizajes, se debe contar con información que permita identificar las áreas en las que los estudiantes tuvieron más dificultades, para que a partir de ahí se determinen las acciones a realizar.

En este boletín de resultados se presentan datos generales sobre la población evaluada en la PAES 2014 y los principales resultados nacionales y departamentales. Cada institución educativa que atiende educación media cuenta con la información específica de sus estudiantes para hacer el análisis exhaustivo en cada asignatura, considerando los diferentes factores que puedan tener influencia en los resultados.

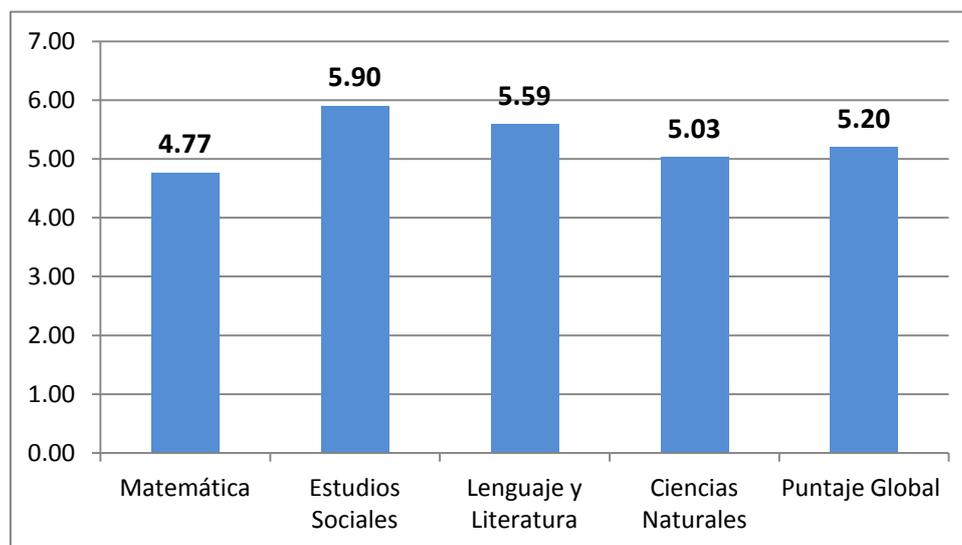
### 1.1 Población evaluada en PAES 2014

No	DEPARTAMENTO	ESTUDIANTES EVALUADOS
1	AHUACHAPÁN	4,438
2	SANTA ANA	6,663
3	SONSONATE	6,016
4	CHALATENANGO	2,539
5	LA LIBERTAD	9,753
6	SAN SALVADOR	26,216
7	CUSCATLÁN	3,370
8	LA PAZ	4,062
9	CABAÑAS	1,824
10	SAN VICENTE	2,547
11	USulután	4,344
12	SAN MIGUEL	6,055
13	MORAZÁN	2,217
14	LA UNIÓN	2,147
	<b>NACIONAL</b>	<b>82,191</b>



El total de estudiantes evaluados fue de 82,191. El departamento de San Salvador es el que cuenta con mayor población estudiantil, el 32% de los evaluados (26,216) corresponden a este departamento, le siguen los departamentos de La Libertad, Santa Ana, San Miguel y Sonsonate.

## 1.2 Resultados nacionales, global y por asignatura, PAES 2014



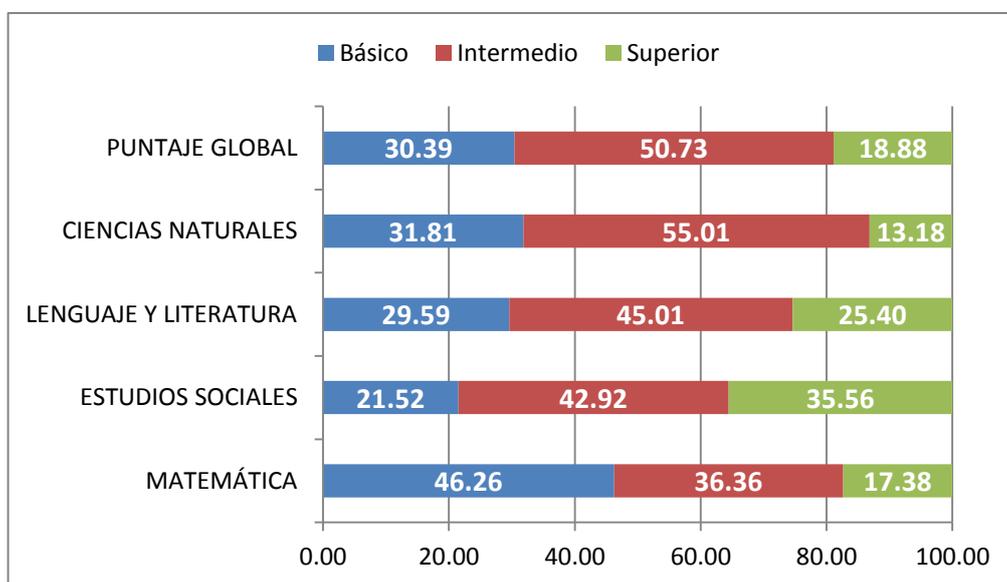
Los resultados nacionales muestran que las asignaturas de Matemática y Ciencias Naturales, son las que presentan mayor dificultad para los estudiantes, esto ha sido constante en las diferentes aplicaciones de la prueba. Sin embargo, en Ciencias Naturales ha habido un leve incremento en relación con el año 2013, donde el puntaje en esta asignatura fue de 4.99. También es importante señalar que Lenguaje y Literatura ha incrementado de 5.32 (2013) a 5.59 en 2014.

### 1.3 Porcentaje de estudiantes en cada nivel de logro

En la PAES, el nivel de logro de los estudiantes está determinado en una escala de 0.0 a 10, que se subdivide así: Nivel Básico, que incluye de 0.0 a 3.75; Nivel Intermedio, de 3.76 a 7.50 y Nivel Superior, de 7.51 a 10.00.

Lo esperado en el Sistema Educativo Nacional es que en el Nivel Básico se ubique una menor cantidad de estudiantes, y que los otros niveles sean los que concentren a la mayor población, ya que son los niveles que alcanzan los estudiantes que tienen mayor dominio de los conocimientos y habilidades exploradas en la prueba.

Los resultados muestran, especialmente en Matemática, los altos porcentajes de estudiantes que alcanzan puntajes igual o menor que 3.75, por lo tanto se ubican en el Nivel Básico.



## 2. Análisis de resultados en la asignatura de Matemática.

A continuación se presenta el análisis por competencia; este incluye lo evaluado en cada competencia en la prueba, el análisis de un ítem a partir de la tendencia de los porcentajes de aciertos de los estudiantes, así como lo más relevante identificado en esta competencia.

### 2.1 Descripción y Análisis de las competencias evaluadas.

#### Ejemplos de ítems

##### Competencia 1: Razonamiento lógico matemático

Esta competencia promueve en los estudiantes la capacidad para identificar, nombrar, interpretar información, comprender procedimientos, algoritmos y relacionar conceptos. Estos procedimientos fortalecen en los estudiantes la estructura de un pensamiento matemático, superando la práctica tradicional que partía de una definición matemática y no del descubrimiento del principio o proceso que le da sentido a los saberes numéricos.

Esta competencia tuvo un promedio del 36% de acierto entre los estudiantes.

La forma en que fue evaluada fue la siguiente: los estudiantes debieron identificar la expresión que modela una sucesión aritmética o geométrica, hacer aplicaciones de fórmulas trigonométricas (ley del seno o del coseno) o estadísticas para calcular una medida de tendencia central, reconocer el proceso lógico de resolución de ecuaciones logarítmicas, o desigualdades cuadráticas. Identificar la ecuación de una línea recta sujeta a condiciones específicas o interpretar la pendiente de la gráfica de una línea.

Las habilidades evaluadas en esta competencia fueron:

- ✚ Identificar las razones trigonométricas y utilizar teoremas para resolver situaciones mediante triángulos rectángulos o triángulos oblicuángulos.
- ✚ Reconocer, analizar e interpretar conceptos, tablas o gráficos estadísticos.
- ✚ Calcular, interpretar y aplicar medidas estadísticas descriptivas de tendencia central, de posición y de dispersión.
- ✚ Determinar el conjunto solución para desigualdades lineales o cuadráticas.
- ✚ Identificar sucesiones aritméticas o geométricas y resolver situaciones utilizando fórmulas afines.
- ✚ Resolver ejercicios aplicando funciones exponenciales o logarítmica
- ✚ Determinar la ecuación de líneas rectas o circunferencias.

A continuación se presenta uno de los ítems que se incluyó en la prueba y que hace referencia a las habilidades mencionadas.

**Habilidad evaluada**

Identificar las razones trigonométricas y utilizar teoremas para resolver situaciones mediante triángulos rectángulos o triángulos oblicuángulos.

**Indicador de logro:** 1.2 Soluciona ejercicios de razones trigonométricas

**Bloque de contenidos:** Trigonometría

**Enunciado y opciones de respuesta:**

23 ¿Cuál es la longitud "H" del siguiente monumento?

A. 20.00      B. 20.78      C. 31.18      D. 38.00

Como puede observarse, es un ítem que requiere que los estudiantes conozcan cómo calcular el valor de las razones trigonométricas, específicamente la que corresponde al seno. El ítem proporciona apoyo gráfico, el triángulo está en posición estándar y la única variante consiste en sumar 2m al valor del cateto opuesto a  $30^\circ$ . Por eso se consideró que sería de complejidad media para los estudiantes.

**Proceso de solución:**

Como la longitud “H” del monumento es la que debe determinarse, eso implica que es el cateto opuesto a  $30^\circ$  el que interesa conocer, porque ya se conocen 2m de esa longitud. Se conoce del triángulo, la hipotenusa, por tanto, el estudiante sabe que de las razones trigonométricas la que relaciona lado opuesto e hipotenusa son el seno y la cosecante, obviamente ha trabajado más con la primera.

$$\text{sen}30^\circ = \frac{x}{36} \rightarrow x = 36\text{sen}30^\circ \rightarrow x = 18 \text{ m}$$

Pero  $H = x + 2m$ ,

Así que  $H = 18m + 2m = 20m$ .

Lo que implica que la longitud “H” del monumento es de 20m.

A continuación se presenta a qué responden las opciones B, C y D.

**Explicación de la selección de las opciones:**

B) Confunde la relación de lados para calcular el valor de la función tangente.

C) Confunde la relación de lados del coseno con los del seno.

D) Desconoce cómo calcular el valor de las razones trigonométricas, por eso suma las longitudes.

A partir de los resultados se obtiene lo siguiente:

Por un lado, los datos indican que para los estudiantes evaluados resultó ser un ítem de dificultad media, tal como se esperaba, pero con tendencia a difícil.

**Porcentaje de respuestas correctas: A) 36%**

**Porcentaje de respuestas de los distractores:**

B) 15%

C) 18%

D) 30%

En primer lugar hay que diferenciar entre confundir y desconocer cómo calcular el valor de una razón trigonométrica; el que confunde, su respuesta es coherente con los cálculos asociados a la razón trigonométrica que eligió. Mientras el que desconoce, su respuesta responde a cálculos no asociados al valor de una razón trigonométrica. En ese sentido, aproximadamente 2 de cada 10 estudiantes confunden la relación de lados que debe realizarse para calcular el valor de la razón trigonométrica coseno.

Lo cual tiene como efecto que un ejercicio que requiere utilizar la razón trigonométrica seno, la relación de estos lados, la asocie al coseno.

La información proporcionada por este ítem es consistente con la tendencia mostrada por los estudiantes cuando a partir de un triángulo rectángulo con sus tres lados conocidos, aproximadamente 2 de cada 10 confundieron cómo se calcula el valor correspondiente al seno con el coseno.

A manera de conclusión, puede evidenciarse que 7 de cada 10 estudiantes saben que los valores de las razones trigonométricas se obtienen de la relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo, pero aproximadamente solo 4 de ellos saben identificarlas y aplicarlas a los ejercicios de dificultad media, los otros 3 las confunden.

El 30% de los evaluados se limitó a sumar algunos de los datos, evidenciando que desconocen como calcular los valores de una razón trigonométrica, hay que tener presente que a los estudiantes se les proporcionó en la representación gráfica toda la información, inclusive el dibujo del triángulo.

En esta competencia, basados en los resultados, se identifican los siguientes aspectos:

- ✚ Cuando los estudiantes deben identificar el término general de una sucesión aritmética cuyos términos son números enteros positivos, aproximadamente 6 de cada 10 de los estudiantes logran realizarlo. El resto de estudiantes, 3 de cada 10 olvidan que se llama sucesión a una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales, por lo tanto  $n = 1, 2, 3, \dots$ , pero ellos comienzan evaluando en 0.
- ✚ Sólo la cuarta parte de los evaluados logra identificar el conjunto solución de desigualdades cuadráticas, cuando el coeficiente principal es igual a 1, y sin necesidad de trasponer términos; es decir, se le presentó en una de sus formas más simples. Las dificultades oscilan entre los que tienen dificultad para decidir los signos del término independiente encontrado en los factores; es decir, si colocan los signos que surgen de la igualación a cero o los signos que tenían estos números al momento de encontrar los factores, alrededor de la mitad de los evaluados tiene esta dificultad. Otra cuarta parte tiene dificultad para elegir entre los tres intervalos encontrados, aquel que hace cierta la desigualdad.

## Competencia 2: Comunicación con lenguaje matemático

Los símbolos y notaciones matemáticas tienen un significado preciso, diferente al utilizado como lenguaje natural. Esta competencia desarrolla habilidades, conocimientos y actitudes que promueven la descripción, el análisis, la argumentación y la interpretación en los estudiantes, utilizando el lenguaje matemático desde sus contextos, sin olvidar que el lenguaje natural es la base para interpretar el lenguaje simbólico.

Esta competencia tuvo un promedio del 37.4 % de acierto entre los estudiantes.

En esta competencia se evaluó con situaciones donde debió identificar la expresión con la cual calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento de un experimento aleatorio binomial. Reconocer el comportamiento de la desviación típica de una variable estadística, cuando los datos de la muestra se alteran agregando o variando por un factor los valores originales. Identificar la expresión que representa la combinación o permutación para calcular la cantidad de formas en que se puede formar un arreglo sujeto a ciertas condiciones. Reconocer los intervalos que representan el dominio y el recorrido de un gráfico. Reconocer la expresión de ley del seno mediante la cual se puede calcular el lado de un triángulo oblicuángulo, cuando otros datos se le han proporcionado. Identificar el valor de una razón trigonométrica en un triángulo rectángulo.

Las habilidades evaluadas en esta competencia fueron:

- ✚ Modelar matemáticamente situaciones concretas utilizando funciones de variable real.
- ✚ Calcular, interpretar y aplicar medidas estadísticas de tendencia central, de posición y de dispersión
- ✚ Determinar la ecuación de líneas rectas o circunferencias
- ✚ Identificar las razones trigonométricas y utilizar teoremas para resolver situaciones mediante triángulos rectángulos o triángulos oblicuángulos.
- ✚ Determinar el conjunto solución para desigualdades lineales o cuadráticas.
- ✚ Aplicar métodos de conteo en ejercicios o problemas.

A continuación se presenta uno de los ítems que se incluyó en la prueba y que hace referencia a las habilidades mencionadas.

#### **Habilidad evaluada**

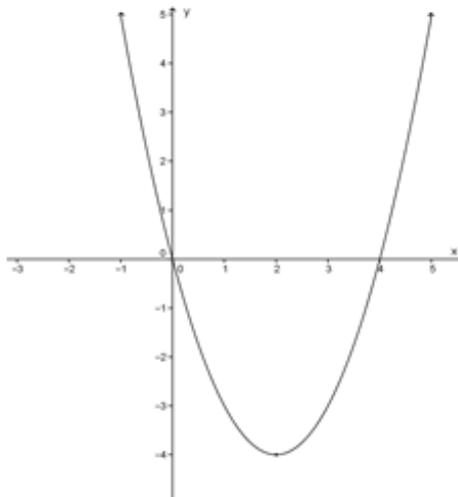
Modelar matemáticamente situaciones concretas utilizando funciones de variable real.

**Indicador de logro:** 4.12 Identifica y explica el dominio y recorrido de las funciones.

**Bloque de contenidos:** Relaciones y funciones

## Enunciado y opciones de respuesta:

21 ¿Cuál es el dominio y recorrido de la siguiente gráfica?



A.  $D = [0, 4]$ ,  $R = [-4, \infty[$

B.  $D = [0, 4]$ ,  $R = [0, \infty[$

C.  $D = \mathbb{R}$ ,  $R = [-4, \infty[$

D.  $D = \mathbb{R}$ ,  $R = [-4, 5]$

En este ítem lo que se pidió a los estudiantes fue que identificaran el dominio y recorrido de una función, concretamente de una parábola, a partir de su gráfica. Como puede notarse es positiva, el ítem no está saturado de gráficos y sin los términos que describen dicha función; es decir, se presenta en una de sus mínimas expresiones para explorar el dominio de los estudiantes.

**Proceso de solución:**

El estudiante identifica correctamente que el dominio son los valores que se toman en el eje x y el recorrido los valores del eje y, por lo tanto,  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $R_f = [-4, \infty[$

**Explicación de la selección de las opciones:**

A) Considera sólo la intersección de la gráfica con el eje x, y el recorrido lo encuentra correctamente.

B) Conoce parcialmente cómo se obtiene el dominio de una parábola, porque sólo considera la intersección de la gráfica con el eje x, semejante idea aplica para el recorrido, con la intersección de la gráfica con el eje y.

D) Encuentra correctamente el dominio. Para el recorrido comete el error de tomar en cuenta solo lo que se aprecia en el gráfico (en el eje y).

A partir de los resultados se obtiene lo siguiente:

Por un lado, los datos indican que para los estudiantes evaluados resultó ser un ítem que se aproxima al límite entre dificultad media y difícil, se esperaba que fuera de dificultad media.

**Porcentaje de respuestas correctas: C) 30%**

**Porcentaje de respuestas de los distractores:**

- A) 29%
- B) 20%
- D) 21%

A pesar de que este ítem, en términos generales, es difícil para los estudiantes, puede inferirse por la distribución que tienen ideas parcialmente correctas sobre el dominio y el recorrido de una función, en este caso de una parábola; posiblemente se deba que la gráfica en sus extremos las flechas indican continuidad y estos les permita inferir que tiende al infinito. También, la tendencia indica que estas nociones parcialmente correctas lo es más para el recorrido que para el dominio.

En esta competencia, basados en los resultados, se identifican los siguientes aspectos:

- ✚ La mitad de los estudiantes logran identificar situaciones cotidianas que son modeladas con desigualdades lineales, cuando estas situaciones son muy cercanas, por ejemplo cálculo de la nota media de un estudiante. La otra mitad de estudiantes el 30% se aproxima a esta identificación; sin embargo, les dificulta la interpretación de  $\leq$  y  $\geq$  en las situaciones cotidianas, es posible que sólo logren leerlas conceptualmente. El 20% que está referido a quienes tienen dificultad con los signos mencionados, pero además, la incógnita no la asocian correctamente con la información dada.

### **Competencia 3: Aplicación de la matemática al entorno**

Es la capacidad de interactuar con el entorno, apoyándose en sus conocimientos y habilidades numéricas. Se caracteriza también por la actitud de proponer soluciones a diferentes situaciones de la vida cotidiana. Su desarrollo implica el fomento de la creatividad, evitando así, el uso excesivo de métodos basados en la repetición.

En esta competencia se les presenta una situación donde se menciona el valor medio de cierta característica medible de un grupo de personas, luego se agregan otras dos personas con su respectiva medida y se pregunta por cuál es el nuevo valor medio. También se les planteó una situación donde debían aplicar adecuadamente la regla de la multiplicación para poder dar respuesta a la situación planteada.

Otro tipo de situación requirió que los estudiantes representaran información en un triángulo rectángulo, y que luego decida la razón trigonométrica adecuada que le permita responder por lo que le pregunta.

Otra situación fue la referida a comprender información de tablas estadística, contrastarla y optar por una decisión de acuerdo con los requerimientos planteados.

Las habilidades evaluadas en esta competencia fueron:

- ✚ Identificar las razones trigonométricas y utilizar teoremas para resolver situaciones mediante triángulos rectángulos o triángulos oblicuángulos.
- ✚ Calcular, interpretar y aplicar medidas estadísticas descriptivas de tendencia central, de posición y de dispersión.
- ✚ Aplicar métodos de conteo en ejercicios o problemas.
- ✚ Calcular probabilidades, haciendo uso de definición clásica de probabilidad o de distribución de probabilidades.
- ✚ Reconocer, analizar e interpreta conceptos, tablas o gráficos estadísticos.

A continuación se presenta uno de los ítems que se incluyó en la prueba y que hace referencia a las habilidades mencionadas.

#### Habilidad evaluada

Calcular probabilidades, haciendo uso de la definición clásica de probabilidad o de distribución de Probabilidades.

**Indicador de logro:** 4.15 Resuelve ejercicios y problemas sobre el cálculo de la probabilidad de eventos.

**Bloque de contenido:** Estadística

#### Enunciado y opciones de respuesta:

10 En una caja hay seis bolígrafos rojos y cuatro bolígrafos negros, ¿cuál es la probabilidad que al sacar un bolígrafo, al azar, este sea rojo?

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{2}{3}$

C.  $\frac{3}{5}$

D.  $\frac{1}{6}$

Este es un ejercicio representativo de la aplicación de la matemática al entorno. En ella los estudiantes deben reconocer el proceso de calcular y expresar la probabilidad de un evento de un experimento aleatorio. Deben saber reconocer todos los casos posibles del experimento aleatorio, así como todos los casos favorables al evento.

Proceso de solución:

Para resolverlo, los estudiantes deben reconocer que hay 10 posibilidades de poder sacar un bolígrafo de la caja, pero que solamente existen 6 posibilidades de poder sacar un bolígrafo rojo, para luego establecer el cociente de  $6/10$  que es equivalente a  $3/5$  que representa la respuesta correcta.

#### Explicación de la selección de las opciones:

- A. Dificultad para identificar casos favorables y posibles.
- B. Confunde la probabilidad de un bolígrafo rojo sobre un conjunto de sólo bolígrafos rojos, con el de un conjunto que hay rojos y negros.
- D. Confunde los casos favorables de los bolígrafos rojos con el de los bolígrafos negros.

**Respuesta correcta: C) 27%**

#### Porcentaje de respuesta de los distractores

- A 11%
- B 12%
- D 50%

Sólo un 27% de los estudiantes acertaron en la respuesta de esta situación, La mitad de la población evaluada considera como la respuesta adecuada el valor de  $1/6$ , la cual permite conjeturar alguna hipótesis explicativa del porqué se comete ese error.

Es posible que los estudiantes no comprenden los términos involucrados en la definición de la probabilidad de un evento y estén traduciendo literalmente la pregunta ¿cuál es la probabilidad que al sacar un bolígrafo, al azar, este sea rojo? Por ello plantean el cociente  $1/6$ , ya que seis son los bolígrafos rojos, y están pidiendo que se escoja uno de ellos. No tienen claridad de cuántas posibilidades hay para sacar un bolígrafo de la caja, la cual es de 10, ni de cuántas posibilidades hay de sacar un bolígrafo rojo la cual es 6.

Una octava parte de los estudiantes evaluados optan por la respuesta  $2/3$ , que es la fracción equivalente de  $4/6$ . Se evidencian dos errores: uno, que los casos favorables al evento los confunde, ya que están considerando 4 casos favorables, lo cual indica que está tomando un bolígrafo negro y no un rojo como le solicitan, y el segundo es que en los casos posibles consideran solamente una parte (6), no tienen claro que hay 10 posibilidades para sacar un bolígrafo de la caja.

Aproximadamente uno de cada diez estudiantes evaluados optan por una respuesta en la que no tienen idea ni de los casos favorables al evento, ni de los casos posibles del espacio muestral. Asocian el valor de 2, porque se habla que hay bolígrafos de dos colores y de los cuales se quiere escoger uno de determinado color, por lo tanto les parece adecuado considerar la fracción  $1/2$ .

Para asegurarse que los alumnos no cometan este tipo de errores, se debe garantizar en el proceso de enseñanza-aprendizaje que el estudiante logre contabilizar las posibilidades del espacio muestral de un evento aleatorio, además de contabilizar las posibilidades en que pueda ocurrir un evento. Para que posteriormente se proceda a establecer la definición de probabilidad de un evento como la razón entre las posibilidades de los casos favorables al evento y las posibilidades de todo el espacio muestral de donde se escogió el evento.

En esta competencia, basados en los resultados, se identifican los siguientes aspectos:

- ✚ Cuando los estudiantes deben hacer uso de diagrama de árbol para identificar los casos posibles de un experimento y los casos favorables al evento para determinar la probabilidad del evento, o hacer uso de la fórmula de la distribución binomial para calcular la probabilidad del evento, es de las habilidades que más dificultad tienen para los estudiantes. Se dice que es difícil porque alrededor del 20% de los estudiantes están respondiendo acertadamente.
- ✚ Aproximadamente 4 de cada 10 estudiantes aciertan en preguntas referidas al cálculo de probabilidades haciendo uso del cálculo de áreas bajo la curva normal o en la interpretación de información en tablas estadísticas.

## 2.2 Descripción de conocimientos y habilidades en cada nivel de logro

### Nivel Superior

- ✚ Interpreta las propiedades de las medidas de dispersión.
- ✚ Calcula la probabilidad de evento simple utilizando diagrama de árbol o fórmula de distribución binomial.
- ✚ Determina la probabilidad de ocurrencia de una variable aleatoria normal.
- ✚ Identifica el conjunto solución de desigualdades cuadráticas, donde el coeficiente principal es uno.
- ✚ Identifica la expresión que represente las permutaciones o combinaciones de un conjunto de elementos.
- ✚ Calcula la probabilidad de ocurrencia de un evento simple aplicando la definición clásica de probabilidad.

### Nivel Intermedio

- ✚ Aplica el principio de la multiplicación en la resolución de problemas.
- ✚ Identifica la conversión de expresión exponencial a logarítmicas o viceversa.
- ✚ Identifica dominio y recorrido de un gráfico.
- ✚ Calcula la media aritmética de datos presentados en tabla de frecuencias.
- ✚ Resuelve problemas de media aritmética.
- ✚ Reconoce la ecuación de una línea recta que cumple ciertas condiciones.

- ✚ Utiliza el teorema del seno, al solucionar ejercicios sobre triángulos oblicuángulos.
- ✚ Reconoce la pendiente de una recta a partir de la gráfica.
- ✚ Resuelve situaciones cotidianas haciendo uso de razones trigonométricas.
- ✚ Resuelve aplicaciones de probabilidad de variable aleatoria normal.
- ✚ Identifica conceptos de variables estadísticas
- ✚ Interpreta información en gráfico o tablas estadísticas.
- ✚ Identifica las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.
- ✚ Reconoce una sucesión geométrica.
- ✚ Resuelve problemas aplicando el teorema del coseno.
- ✚ Utiliza el teorema del seno, al solucionar ejercicios sobre triángulos oblicuángulos

### Nivel Básico

- ✚ Identifica la expresión que representa probabilidad de una variable aleatoria en una distribución binomial.
- ✚ Identifica desigualdades lineales que modelan situaciones cotidianas.
- ✚ Identifica el término general de una sucesión aritmética.

## 3. Análisis de los ítems de Desarrollo

La prueba de matemática se construyó con veinticinco ítems de opción múltiple, y dos ítems de desarrollo. Cada estudiante resolvió en matemática sólo un ítem de desarrollo.

La PAES aplicada el día miércoles 8 de octubre en la asignatura de matemática, incluía dos ítems de desarrollo, de los cuales se esperaba que la mitad de la población evaluada resolviera uno de ellos y la otra mitad el otro ítem.

Para cada grupo de ítems resueltos, se escogieron muestras representativas por departamento, para ser codificadas de acuerdo con una guía de asignación de códigos. Dicha codificación sólo es un recurso para vaciar la información que los estudiantes dejan como evidencia del proceso seguido, que luego se contabiliza para determinar porcentajes de estudiantes que siguen patrones específicos para resolver la situación.

### Información y análisis del primer ítem de desarrollo

**Competencia:** Razonamiento lógico matemático

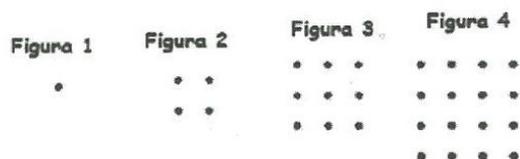
**Habilidad:** Modelar matemáticamente situaciones concretas utilizando funciones de variable real.

**Bloque de Contenido:** Relaciones y funciones.

¿Qué evalúa? El nivel de dominio que poseen los estudiantes para modelar situaciones simples utilizando funciones de variable real.

### Pregunta de desarrollo en Matemática

26 Dada la siguiente secuencia de puntos



Determina lo siguiente:

a) ¿Cuántos puntos formarán la figura cinco?

b) ¿Cuántos puntos formarán la figura diez?

R/ \_\_\_\_\_

c) ¿Cuál es la función que modela el número de puntos que forman la figura “n”?

R/  $f(n) =$  \_\_\_\_\_

d) ¿Qué valor se obtiene para  $f(15)$  en la función encontrada en el literal c?

R/  $f(15) =$  \_\_\_\_\_

e) Grafica en el plano cartesiano la función encontrada en el literal c.

f) Escribe el dominio y el recorrido de lo que graficaste en el plano cartesiano.

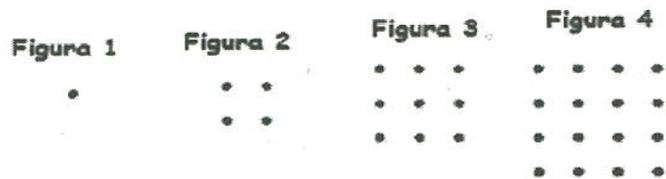
**Dominio:** \_\_\_\_\_

**Recorrido:** \_\_\_\_\_

Se esperaba que a partir de la comprensión del patrón mostrado en las cuatro figuras, su respuesta fuera: 25 o 25 puntos, tal como se muestra a continuación

26

Dada la siguiente secuencia de puntos



Determina lo siguiente:

a) ¿Cuántos puntos formarán la figura cinco?

25

Sin embargo, los estudiantes encuentran en los ítems de desarrollo la oportunidad para expresar sus diferentes grados de dominio matemático, lo cual hace que implementen una variedad de estrategias con el objetivo de resolver la situación que se les plantea.

Esta gama de estrategias aplicadas por los estudiantes genera una variedad de resultados, los cuales pueden brindar insumos para dar respuesta a las siguientes interrogantes: ¿qué saben los estudiantes?, ¿qué nivel de dominio tienen?, ¿qué tipo de dificultades reflejan?, ¿hay algún tipo de patrón en sus respuestas incorrectas?, etc. Pero, ¿cómo lograr dar respuesta a esta y otras preguntas a partir de tanta diversidad de estrategias o respuestas que proporcionan los estudiantes? ¿Cómo perder la menor cantidad de información?

### Definición de códigos

Es así como en matemática se crean algunos códigos para el proceso de recopilación de la información reflejada por los estudiantes en cada una de las papeletas. Los códigos son arbitrarios y tiene como fin, resumir la información para interpretarla mejor.

Los códigos definidos para el literal “a)” constan de dos dígitos, por ejemplo, 11, 12, 13, 14, 15, 16 o NR.

En el caso de 12:

El dígito 1 indica que es el primer literal, “a)”, del ítem de desarrollo, y el dígito 2 indica que es otro tipo estrategia o respuesta que plasmó el estudiante en la papeleta, y así sucesivamente para el resto de códigos.

**NR:** indica que el estudiante dejó en blanco el ítem de desarrollo.

Ahora bien, como es de esperar en toda evaluación hay respuestas correctas e incorrectas y ambas aportan información valiosa que puede ser considerada para la toma de decisiones. Con ese fin, los códigos anteriormente definidos se utilizan de la siguiente manera: los códigos **11, 12 y 13**, se utilizaron para agrupar las estrategias que resolvían la situación; es decir, las respuestas correctas. Los códigos **14, 15 y 16** para registrar aquellas **respuestas incorrectas**, pero que pueden aportar información para identificar necesidades en los estudiantes.

### Análisis por etapa del primer ítem de desarrollo

#### I. Etapa “a)” del ítem de desarrollo:

##### ✓ Respuestas correctas (73.20%).

Los códigos 11, 12 y 13 para las respuestas correctas registran la siguiente información:

**El código 11** resume el trabajo realizado por los estudiantes que evidencian que comprendieron el patrón de la secuencia y escriben como respuesta el número 25, tal como se muestra a continuación:

a) ¿Cuántos puntos formarán la figura cinco?

25 puntos

**El código 12** agrupa las estrategias donde los estudiantes construyeron la figura cinco para determinar cuántos puntos formarán dicha figura, tal como se muestra a continuación:

a) ¿Cuántos puntos formarán la figura cinco?

25



También, se identificó otro tipo de estrategia, que fue registrada con **el código 13**, porque presenta la respuesta correcta de la siguiente manera:



Determina lo siguiente:

a) ¿Cuántos puntos formarán la figura cinco?



Es decir, los estudiantes construyeron la figura cinco sin concluir cuántos puntos la forman.

✓ **Respuestas incorrectas (19.21%).**

Como se mencionó, para este apartado se utilizaron tres códigos: 14, 15 y 16.

**El código 14:** hace referencia a las respuestas donde el estudiante escribió un número distinto a 25, por ejemplo:

a) ¿Cuántos puntos formarán la figura cinco? 20

**El código 15** a quienes tienen incorrecto tanto la figura como el número,

Determina lo siguiente:

a) ¿Cuántos puntos formarán la figura cinco? 19

Y finalmente el **código 16** a quienes sólo construyeron la figura cuadrada de puntos pero estaba incorrecta. Este último código no hubo necesidad de utilizarlo.

**Patrones identificados en las respuestas incorrectas.**

Fue en el **código 14** donde se registró casi la totalidad de las respuestas incorrectas, identificándose que de 19.21% que no escribieron la respuesta correcta aproximadamente un 80% describen algún tipo de tendencia al escribir los siguientes números: 5, 6, 9, 16, 20, 21, 23, 24 o 30.

A continuación se pueden observar cuáles fueron los dos patrones dominantes:

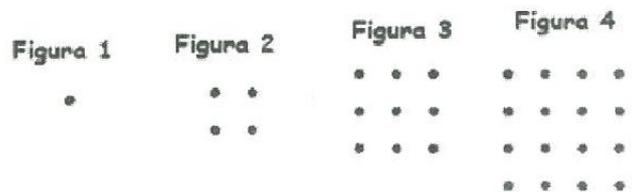
Número escrito	5	6	9	16	20	21	23	24	30
Porcentaje correspondiente	7	6	14	4	26	4	5	7	5

9 y 20 son los dos patrones dominantes identificados en las respuestas incorrectas.

**¿Por qué 9 y 20?**

Antes de buscar las posibles razones, nótese que estos dos patrones de error acumulan el 40% de las respuestas incorrectas de este código. Le sigue el patrón de error 5 y 24, etc.

En general, lo que se observa es que la mayoría de los estudiantes al no lograr identificar ningún tipo de patrón en las figuras proporcionadas, transcriben, cuentan el número de puntos de una figura, suman o multiplican los números observados en las categorías Figura, en el encabezado dado en el ítem de desarrollo:



Por ejemplo, los que escribieron **5**, es posible que sólo transformaran la palabra “cinco” a número. Los que escribieron **16** una de las posibilidades es que contaron el número de puntos de la Figura 4, es posible que algunos sumaron todos los puntos observados en el encabezado del ítem y por eso escriben **30**, los que escribieron **9** porque sumaron los dígitos de las categorías Figura 4 y Figura 5, los que escribieron **20** por multiplicar los dígitos de las categorías Figura 4 y Figura 5, y los que multiplicaron los dígitos de las categorías Figura 1, Figura 2, Figura 3, Figura 4 y por eso escribieron **24**.

Hay un último símbolo utilizado en el proceso de codificación para registrar aquellas papeletas donde los estudiantes no evidencian ningún tipo de trabajo, y la regresaron en blanco.

NR: 7.59 % de los estudiantes dejó en blanco el ítem, tal como le fue entregado.

#### Síntesis de la primera parte, “a”, de este ítem de desarrollo:

1. El 73.20 % de la muestra codificada (1,317 papeletas) muestran un nivel de dominio elemental para identificar patrones que surgen de situaciones simples.
2. Se identificaron tres estrategias utilizadas por los estudiantes para determinar correctamente el número de puntos que formarán la figura cinco: los que brindan una respuesta sólo gráfica (1.06%), los que construyen la figura y escriben la respuesta (14.88%) y aquellos que comprenden el patrón descrito por las figuras y logran prescindir de la figura para escribir la respuesta correcta (57.25%).
3. El restante 28.80% de la muestra codificada, se reparte entre las respuestas incorrectas (19.21%) y el 7.59 % de las papeletas que fueron dejadas en blanco por los estudiantes.
  - ✚ En las respuestas incorrectas (19.21%) se identificaron alrededor de nueve patrones de respuestas incorrectas, de los cuales dos son los patrones dominantes: cuando los estudiantes escriben 9 o 20, siendo este último el más dominante.

- ✚ En esta primer etapa, la más sencilla del ítem de desarrollo, alrededor de un 28.80% (respuestas incorrectas + papeletas en blanco) de los estudiantes al concluir el bachillerato no lograron desarrollar la capacidad para identificar regularidades, ni reconocer un mismo patrón bajo diferentes formas simples ni usar dichos patrones para predecir valores. Es de recordar que para la PAES 2014, los estudiantes contaron con más tiempo para resolver los ítems de la prueba que en otros años, razón por la que los ítems regresados en blanco, pueden valorarse como que no encontraron como resolverlos.

## II. Etapa “b)” del ítem de desarrollo:

### ✓ Respuestas correctas (70.08%).

Los códigos 21, 22 y 23 para las respuestas correctas registran la siguiente información:

**El código 21** resume el trabajo realizado por los estudiantes que comprendieron el patrón de la secuencia y escriben como respuesta el número 100, tal como se muestra a continuación:

b) ¿Cuántos puntos formarán la figura diez?

R/ 100.

**El código 22** agrupa las estrategias donde los estudiantes necesitaron construir la figura diez para determinar cuántos puntos formarán dicha figura, tal como se muestra a continuación:

26 Dada la siguiente secuencia de puntos

Determina lo siguiente:

a) ¿Cuántos puntos formarán la figura cinco?  
25

b) ¿Cuántos puntos formarán la figura diez?

R/ 100

También se identificó otro tipo de estrategia, que fue registrada con **el código 23** porque los estudiantes construyeron la figura diez sin concluir cuántos puntos la forman.

✓ **RESPUESTAS INCORRECTAS (28.09%).**

Para este apartado se utilizaron tres códigos: 24, 25 y 26.

**El código 24:** hace referencia a las respuestas donde el estudiante escribió un número distinto a 100, por ejemplo:

b) ¿Cuántos puntos formarán la figura diez?

R/ 50

**El código 25** a quienes tienen incorrecto tanto la figura como el número,

26 Dada la siguiente secuencia de puntos

Figura 1      Figura 2      Figura 3      Figura 4      Figs      Figs 10

Determina lo siguiente:

a) ¿Cuántos puntos formarán la figura cinco?

b) ¿Cuántos puntos formarán la figura diez?

R/ 50

Y finalmente el **código 26** a quienes sólo construyeron la figura cuadrada de puntos pero estaba incorrecta. Este último código no hubo necesidad de utilizarlo.

### Patrones identificados en las respuestas incorrectas.

Fue en el **código 24** donde se registró casi la totalidad de las respuestas incorrectas, identificándose que de 28.09% que no escribieron la respuesta correcta, aproximadamente un 50% describe algún tipo de tendencia al escribir los siguientes números: 9, 10, 12, 16, 20, 25, 40, 50 o 125.

A continuación se puede observar cuales fueron los dos patrones dominantes:

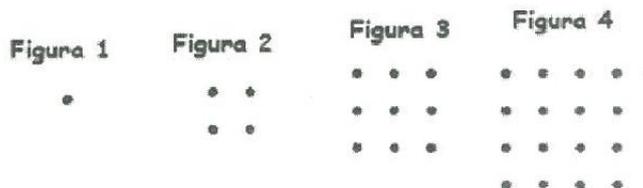
Número	9	10	12	16	20	25	40	50	125
Porcentaje	5	7	3	6	3	3	9	9	3

Como puede observarse 10, 40 y 50 son los números que los estudiantes escribieron como respuestas con mayor frecuencia, siendo los últimos dos, los patrones dominantes identificados en las respuestas incorrectas.

### ¿Por qué 10, 40 o 50?

Antes de buscar las posibles razones, nótese que estos tres patrones de error acumulan el 25% de las respuestas incorrectas de este código. Le sigue el patrón de error 10 y 16, etc.

En general, lo que se observa es que la mayoría de los estudiantes al no lograr identificar ningún tipo de patrón en las figuras proporcionadas, transcriben, cuentan el número de puntos de una figura, suman o multiplican los números observados en las categorías Figura, en el encabezado dado en el ítem de desarrollo:



Por ejemplo, los que escribieron **10**, es posible que sólo transformaran la palabra “diez” a número. Los que escribieron **40** posiblemente duplicaron el producto del número asociado a la Figura 4 con el de la figura 5, es decir,  $4 \times 5 = 20$ , luego  $2 \times 20 = 40$ . Y el **50** es posible que determinó correctamente el número de puntos para la figura cinco, y que por la dificultad que requiere la figura 10, sólo duplicaron los puntos de la figura 5. Los números 9, 16 y 25 posiblemente son producto de comprender incorrectamente la figura requerida, y por ello escriben el número de puntos correspondientes a la Figura 3, 4 y 5 respectivamente.

Hay un último símbolo utilizado en el proceso de codificación para registrar aquellas papeletas donde los estudiantes no evidencian ningún tipo de trabajo, y la regresaron en blanco.

**NR: 1.82 % de los estudiantes dejó en blanco el ítem.**

**Síntesis de la segunda parte, “b)”, de este ítem de desarrollo:**

1. El 70.08 % de la muestra codificada (1,317 papeletas) muestran un nivel de dominio elemental para identificar patrones que surgen de situaciones simples.
2. En términos generales, la dificultad para determinar cuántos puntos formarán la figura 10 y cuántos la figura 5, se observa que es aproximadamente de un 3%, lo que indica que la medida determinada en el literal “a”, de la habilidad para determinar patrones en los estudiantes es prácticamente estable.
3. Además, se mantiene las tres estrategias utilizadas por los estudiantes para determinar correctamente el número de puntos que formarán la figura cinco que con la figura diez: la primera donde el estudiante brindan una respuesta sólo gráfica (0.46%); la segunda, donde el estudiante necesita construir la figura para escribir su respuesta (5.54%) y la tercera, donde el estudiante comprende el patrón descrito por el ítem y logran prescindir de la figura para escribir la respuesta correcta (64.09%).
  - ✚ La primera y segunda estrategia, al compararlas con los resultados de literal “a” del ítem de desarrollo, aproximadamente disminuyen a la mitad, debido a la dificultad que implica determinar los puntos que forman la figura diez en relación con la figura cinco.
  - ✚ La tercera estrategia donde el estudiante comprende el patrón descrito y no necesita apoyo gráfico incrementó aproximadamente un 7%, a pesar del aumento de dificultad del paso de determinar los puntos de la figura 5 a los puntos de la figura 10.
4. Nótese como el porcentaje restante (28.80%) del literal “a)” con el porcentaje restante (29.92) del literal “b)” varía levemente, aproximadamente en un 1%. Indicando la estabilidad del dominio y necesidades de los estudiantes.
5. Este 29.92% restante de la muestra codificada para el literal “b)”, se subdivide en dos categorías: las respuestas incorrectas (28.09%) y el 1.82 % de las papeletas que fueron dejadas en blanco por los estudiantes.
6. Las respuestas incorrectas (28.09%) para el literal “b)”, incrementaron aproximadamente 9% en relación a las del literal “a)”. Además, se identificaron igual número de patrones que los del literal “a)”, de los cuales dos son los patrones dominantes: cuando los estudiantes escriben 10, 40 o 50, siendo los dos últimos los dominantes.
7. En esta primer etapa, la más sencilla del ítem de desarrollo, alrededor de un 29.92% (respuestas incorrectas + papeletas en blanco) de los estudiantes al concluir el bachillerato no lograron desarrollar la capacidad para identificar regularidades, ni reconocer un mismo patrón bajo diferentes formas simples ni usar dichos patrones para predecir valores.

## III. Etapa "c)" del ítem de desarrollo:

## ✓ Respuestas correctas (23.69%).

Los códigos 31 y 32 para las respuestas correctas registran la siguiente información:

**El código 31** resume el trabajo realizado por los estudiantes que comprendieron muy bien el patrón de la secuencia y escriben como respuesta el número  $n^2$ , tal como se muestra a continuación:

26 Dada la siguiente secuencia de puntos

1, 4, 9, 16, 25

Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
•	•• ••	••• ••• •••	•••• •••• •••• ••••

Determina lo siguiente:

a) ¿Cuántos puntos formarán la figura cinco?  
25 puntos

b) ¿Cuántos puntos formarán la figura diez?  
100 puntos

R/ 100 puntos

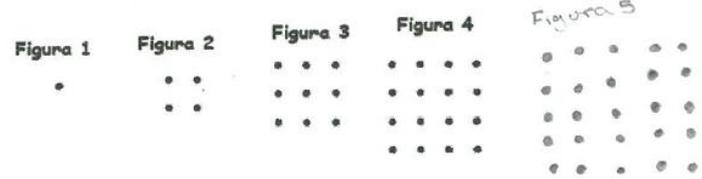
c) ¿Cuál es la función que modela el número de puntos que forman la figura "n"?  
R/  $f(n) = n^2$

La solución brindada por los estudiantes en el literal "c)" refleja muy claro tres cosas: la capacidad para identificar el patrón descrito por las cuatro figuras, generalizar este patrón y adaptar esta generalización para la variable independiente "n", porque  $f$  está descrita por  $f(n)$ . Esto logra realizarlo sólo el 18.30% de la muestra codificada.

Sin embargo, hay un 5.39% que logra casi todo lo anterior, sólo que generalizó el patrón con respecto a la variable "x". Y en relación con todo el dominio mostrado, se ha considerado contabilizar estas respuestas como correctas.

El **código 32** agrupa las estrategias donde los estudiantes generalizan, pero pasan por alto que la variable independiente es "n", tal como se muestra a continuación:

26 Dada la siguiente secuencia de puntos



Determina lo siguiente:

a) ¿Cuántos puntos formarán la figura cinco?  
 25 puntitos      5 x 5

b) ¿Cuántos puntos formarán la figura diez?  
 100 puntitos      10 x 10      R/ 100

c) ¿Cuál es la función que modela el número de puntos que forman la figura "n"?  
 R/  $f(n) = \underline{x^2}$

✓ **Respuestas incorrectas (71%).**

Para este apartado se utilizaron cinco códigos: 33, 34, 35, 36 y 37. Los primeros dos hacen referencia a respuestas en términos de variables, los siguientes dos códigos a números y el último (37) hace referencia a respuestas que no resuelve lo requerido, pero no dejan en blanco la papeleta.

El **código 33**: hace referencia a las respuestas donde el estudiante escribió una respuesta incorrecta, pero hace referencia a una variable, por ejemplo:

c) ¿Cuál es la función que modela el número de puntos que forman la figura "n"?

R/  $f(n) = \underline{n}$

c) ¿Cuál es la función que modela el número de puntos que forman la figura "n"?

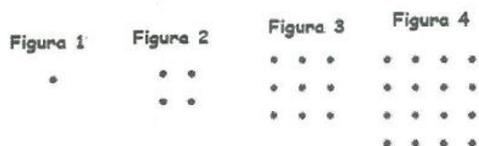
R/  $f(n) = \underline{x}$

El código 34 a quienes escriben como respuesta, expresiones como las siguientes:

c) ¿Cuál es la función que modela el número de puntos que forman la figura "n"?

$$R/ \quad f(n) = \underline{1n + 2}$$

26 Dada la siguiente secuencia de puntos



Determina lo siguiente:

a) ¿Cuántos puntos formarán la figura cinco? 75

b) ¿Cuántos puntos formarán la figura diez? 100

R/ \_\_\_\_\_

c) ¿Cuál es la función que modela el número de puntos que forman la figura "n"?

$$R/ \quad f(n) = \underline{x + 125}$$

Los dos códigos anteriores en total resumen el 19.89% de las respuestas incorrectas, el primero con el 7.14% y el segundo con el 12.76%.

Finalmente los **códigos 35 y 36** acumulan el 46.32% de las respuestas incorrectas que hacen referencia a respuestas numéricas.

El **código 35** resume aquellas respuestas de los estudiantes donde su respuesta es específicamente numérica. Este código captó más de la mitad de las respuestas incorrectas, 40.55%, ejemplo de ellas son las siguientes:

c) ¿Cuál es la función que modela el número de puntos que forman la figura "n"?

$$R/ \quad f(n) = \underline{75}$$

c) ¿Cuál es la función que modela el número de puntos que forman la figura "n"?

$$R/ \quad f(n) = \underline{4}$$

El **código 36** resume las respuestas donde los estudiantes escribieron un par ordenado o algo semejante a un par ordenado:

c) ¿Cuál es la función que modela el número de puntos que forman la figura "n"?

$$R/ \quad f(n) = (2, 2)$$

El 5.77 % de la muestra codificada dio el anterior tipo de respuesta incorrecta.

Finalmente, con el **código 37** se contabilizó aquellas expresiones que no resolvían la situación, pero externaba el no poder abordar este literal, por dos razones, o porque no sabe cómo resolverlo o no recuerda como modelar matemáticamente un patrón, el 4.785 de los estudiantes escribió este tipo de frases.

### Patrones identificados en las respuestas incorrectas.

Fue en el **código 36** donde se registró más de la mitad de las respuestas incorrectas, identificándose que el 40.55% escribió un número en lugar de generalizar el patrón. Las respuestas que aproximadamente describen algún tipo de patrón son: 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 25 o 100.

A continuación se puede observar cuales fueron los dos patrones dominantes:

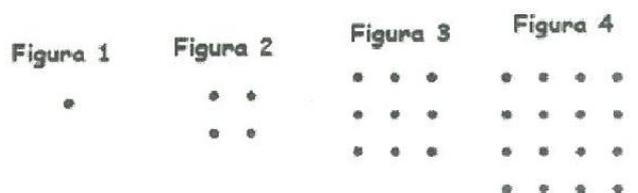
Número	1	2	3	4	5	10	15	25	100
Porcentaje	7	9	5	12	5	6	15	4	6

Claramente de 2, 4 y 15, los dos últimos son los dos patrones dominantes en las respuestas incorrectas.

### ¿Por qué 4 y 15?

Antes de buscar las posibles razones, nótese que estos dos patrones de error acumulan el 27% de las respuestas incorrectas de este código. Le sigue el patrón de error 1 y 2, etc.

En general, lo que se observa es que la mayoría de los estudiantes al no lograr identificar ningún tipo de patrón en las figuras proporcionadas, transcriben, cuentan el número de puntos de una figura, suman o multiplican los números observados en las categorías Figura, en el encabezado dado en el ítem de desarrollo:



Por ejemplo, los que escribieron **2**, es posible que al notar que todas las figuras que se generan a partir de la Figura 2 tienen forma de cuadrado, entonces esta figura dos es la que modela el número de puntos. Los que escribieron **4** posiblemente hacen referencia al número de puntos de la figura 2. Y el **15** es posible al no comprender cómo modelar, retoman el valor observado en  $f(15)$ .

Hay un último símbolo utilizado en el proceso de codificación para registrar aquellas papeletas donde los estudiantes no evidencian ningún tipo de trabajo, y la regresaron en blanco.

**NR: 5.32 % de los estudiantes dejó en blanco el ítem.**

**Síntesis de la segunda parte, “c)”, de este ítem de desarrollo:**

1. El 23.69 % de la muestra codificada (1,317 papeletas) muestran dominio para modelar el patrón descrito por las cuatro figuras formadas por puntos. Hay que tener en cuenta que si resta el 5.39% que en lugar de colocar  $n^2$  escribieron  $x^2$  el porcentaje de aciertos para este literal disminuye a 18.30%.
2. Hay un 5.39% de la muestra que evidencia dominio para identificar el patrón descrito por las figuras, sin embargo, olvida adaptar su modelo en función de la variable que se ha proporcionado en el ítem.
3. El 76.31% de la muestra codificada no logra modelar el patrón de puntos descrito por las figuras proporcionadas.
4. Del porcentaje de estudiantes de la muestra que no logra modelar el patrón de puntos del ítem de desarrollo se identifican 6 grupos, los estudiantes que
  - ✚ escriben  $n$ ,  $x$  u otra variable: 7.14%
  - ✚ relacionan la variable con números u operaciones: 12.76%
  - ✚ escriben un número: 40.55%
  - ✚ escriben un par ordenado o semejante: 5.77%
  - ✚ Expresan: no sé, no recuerdo, etc. : 4.78%
  - ✚ Dejan en blanco la papeleta: 5.32%
5. Un 19.90 % de los estudiantes a pesar de que no logran modelar el patrón descrito por la secuencia de puntos (escriben  $n$ ,  $x$  u otra variable + relacionan la variable con números u operaciones) da muestras de intentar trascender del ámbito numérico al de generalizar. De hecho, la mayoría hizo aproximaciones a relacionar la variable con números y operaciones.
6. Entre las respuestas, incorrectas más de la mitad de ellas, 40.55%, al no saber cómo modelar la secuencia descrita por las figuras, escribió alrededor de unos 55 números de los cuales son: 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 25 o 100 los que se observan con mayor frecuencia, y son 2, 4 y 15 los patrones dominantes.

## IV. Etapa “d)” del ítem de desarrollo:

## ✓ Respuestas correctas (33.33%).

Al igual que en las etapas descritas anteriormente se utilizan códigos, en esta etapa los códigos utilizados son desde el 41 al 48 para registrar el trabajo observado en las papeletas por parte de los estudiantes. También en esta etapa se utiliza NR para contabilizar aquellas papeletas incluidas en la muestra codificada, pero los estudiantes dejan en blanco, tal como se les fue entregada.

Para registrar las respuestas correctas en el manual de codificación se le presentó a los docentes el modelo de respuesta esperada, es decir,

$$R/ f(15) = (15)^2 = 225 \quad \text{o} \quad R/ 225$$

A continuación alguna de las repuestas correctas, la cuales fueron identificadas con el código 41:

d) ¿Qué valor se obtiene para  $f(15)$  en la función encontrada en el literal c?

$$R/ \quad f(15) = \underline{15^2 = 225} \quad R/ \quad f(15) = \underline{225}.$$

$$f(n) = (15)^2 = 225 \quad R/ \quad f(15) = \underline{225}$$

Como puede observarse en el tercer ejemplo mostrado anteriormente, algunos estudiantes colocan  $f(n) = (15)^2 = 225$  en lugar de  $f(15) = (15)^2 = 225$ ; esto permite identificar que inclusive los estudiante que dan muestra del dominio de modelación, la comunicación con el lenguaje matemático le resulta difícil.

Por otro lado, es posible que usted esté preguntándose porque razón en esta etapa “d” del ítem de desarrollo el porcentaje de respuestas correctas es 33.33%, cuando en la etapa “c” las respuestas correctas fueron de 23.69% (o 18.30% al no contabilizar a quienes en lugar de escribir  $n^2$  escribieron  $x^2$ ).

La respuesta es simple, recuerden que las etapa “a” y “b” han proporcionado información sobre la estabilidad del nivel de domino de los estudiantes para identificar y reproducir patrones simples, además, el código 35 de la etapa “c” nos fundamenta que el 40.55% en lugar de modelar el patrón lo siguen reproduciendo, es decir, la tendencia a escribir un número en lugar de una expresión que lo modele. Si observa detenidamente aquellos patrones de números que tiene raíz cuadrada exacta descritos en el código mencionado, acumulan aproximadamente la cuarta parte del 40.55%, lo cual es consistente con la variación de porcentaje de respuestas correctas entre la etapa “c” y “d”.

Como puede observarse los resultados de esta etapa del ítem de desarrollo son semejantes a los obtenidos en la etapa “c”:

d) ¿Qué valor se obtiene para $f(15)$ en la función encontrada en el literal c?  $f(15) = (15)^2 = 225$ R/ 225	Escribe 225 con o sin procedimiento	41	33.33
	Escribe un número generado por errores en la multiplicación (60, 90, 765)	42	0.30
	Escribe una variable con exponente 1, n ó x u otra variable	43	3.64
	Escribe expresiones como $2n$ , $2n-1$ , $3n+1$ , etc	44	5.62
	Escribe otro número resultado de otra operación (7.5, 13, 15, 17, 30)	45	3.87
	Escribe otro número distinto a los anteriores	46	34.85
	Escribe un par ordenado o semejante	47	6.38
	Frases que no resuelven la situación: no sé, no me recuerdo, etc.	48	1.67
	Deja en blanco, tal como le fue entregado	NR	10.33
			100.00

Como los datos los indican los códigos 42, 45 y 46 que se refieren a un tipo de respuestas incorrectas acumulan 39.03%, una tendencia semejante con el código 35 de la etapa “c”.

Semejante comportamiento tiene el código 47 con el código 36 de la etapa “c”.

Aunque los códigos 48, 43 y 44 individualmente captan bajo porcentaje de respuestas en la etapa “d”, al observar las variaciones respectivamente con los códigos 37, 33 y 34 de la etapa “c”, el primero disminuyó aproximadamente en dos terceras parte y los dos últimos en conjunto aproximadamente disminuye la mitad. Fenómeno inverso al comparar NR de la etapa “d” con el NR de la etapa “c”, porque incrementó aproximadamente la mitad.

En general esto indica que a medida que el nivel de dominio requerido va siendo mayor las dificultades de estudiante para dar solución a cada etapa también son mayores, y opta por un lado a reproducir lo que ha comprendido del patrón con error o sin error, tanto nivel numérico como el intento generalizar, hasta darse por vencido y entregar la papeleta en blanco. Por eso notará usted como en la etapa “e” prácticamente se mantiene NR, y en la última etapa (“f”) aproximadamente se duplica.

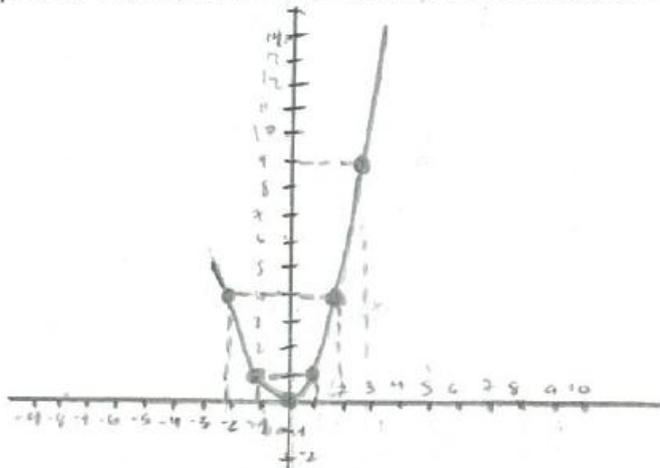
#### V. Etapa “e)” del ítem de desarrollo:

✓ Respuestas correctas (8.43%).

e) Grafica en el plano cartesiano la expresión encontrada en el literal “c”	Traza un plano graduado, luego une los puntos correspondientes a $f(n) = n^2$	51	7.74
	Traza un plano graduado y solo ubica puntos de $f(n) = n^2$	52	0.68
	Traza plano graduado y ubica 3 o 4 puntos de $f(n)$ a la izquierda	53	0.08
	Traza plano graduado y ubica 3 o 4 puntos de $f(n)$ a la derecha	54	3.57
	Traza plano graduado y ubica 3 o 4 puntos cualquiera	55	19.74
	Traza plano graduado	56	14.35
	Traza plano semi graduado y algún bosquejo de gráfica	57	34.32
	Traza plano sin graduar	58	10.02
	Deja en blanco, tal como le fue entregado	NR	9.49
			100.00

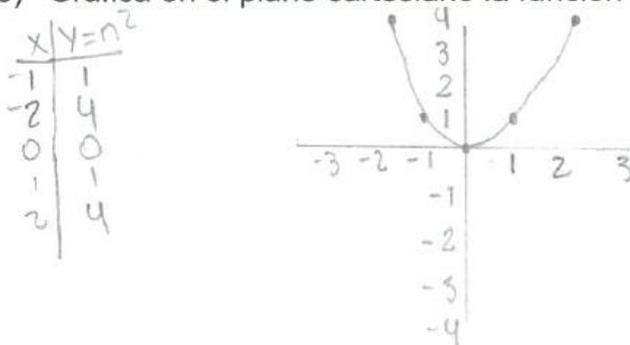
En la tabla resumen anterior, se observa que los códigos 51 y 52, concentran los porcentajes de respuestas correctas, que en su conjunto es del 8.43%. A continuación se presentan dos ejemplos referidos al código 51 y uno al 52 respectivamente:

e) Grafica en el plano cartesiano la función encontrada en el literal c.



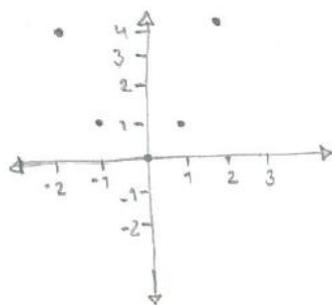
Como puede observarse, muestran diferentes maneras de abordar la construcción de gráfica, la imagen de arriba describe cómo de manera directa el estudiante construye el plano con su respectiva graduación, ubica y une los puntos. Mientras que en la imagen de abajo, organiza los datos en una tabla, realiza los respectivos cálculos para determinar los valores de “y”, utilizando una graduación menos amplia que el primero.

e) Grafica en el plano cartesiano la función encontrada en el literal c.



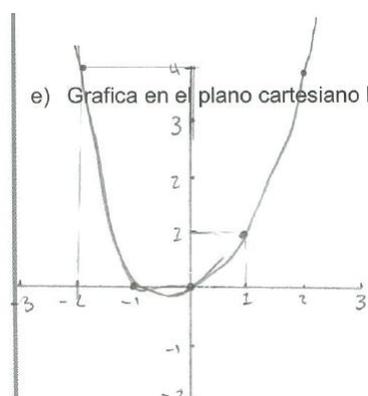
También hay trabajos donde sólo ubican los puntos. Aunque los cálculos son correctos, se observa que se tiene dificultad con la comunicación con el lenguaje matemático, por ejemplo,  $-2^2 = 4$ . Porque no es lo mismo  $-2^2$  y  $(-2)^2$ , puede estar sucediendo que el uso de la calculadora disminuye el efecto de esa dificultad de comunicación con el lenguaje matemático. Un fenómeno que puede observarse desde la escritura del encabezado de la tabla de la parte de los cálculos, tal como se muestra a continuación:

e) Grafica en el plano cartesiano la función encontrada en el literal c.



X	F(x)	(X, y)
-2	$-2^2 = 4$	(-2, 4)
-1	$-1^2 = 1$	(-1, 1)
0	$0^2 = 0$	(0, 0)
1	$1^2 = 1$	(1, 1)
2	$2^2 = 4$	(2, 4)

Aunque el trabajo mostrado no está estrictamente correcto, se ha tomado como tal, por el nivel de exigencia que implicaba el ítem de desarrollo en su conjunto y el esfuerzo mostrado por los estudiantes:



e) Grafica en el plano cartesiano la función encontrada en el literal c.

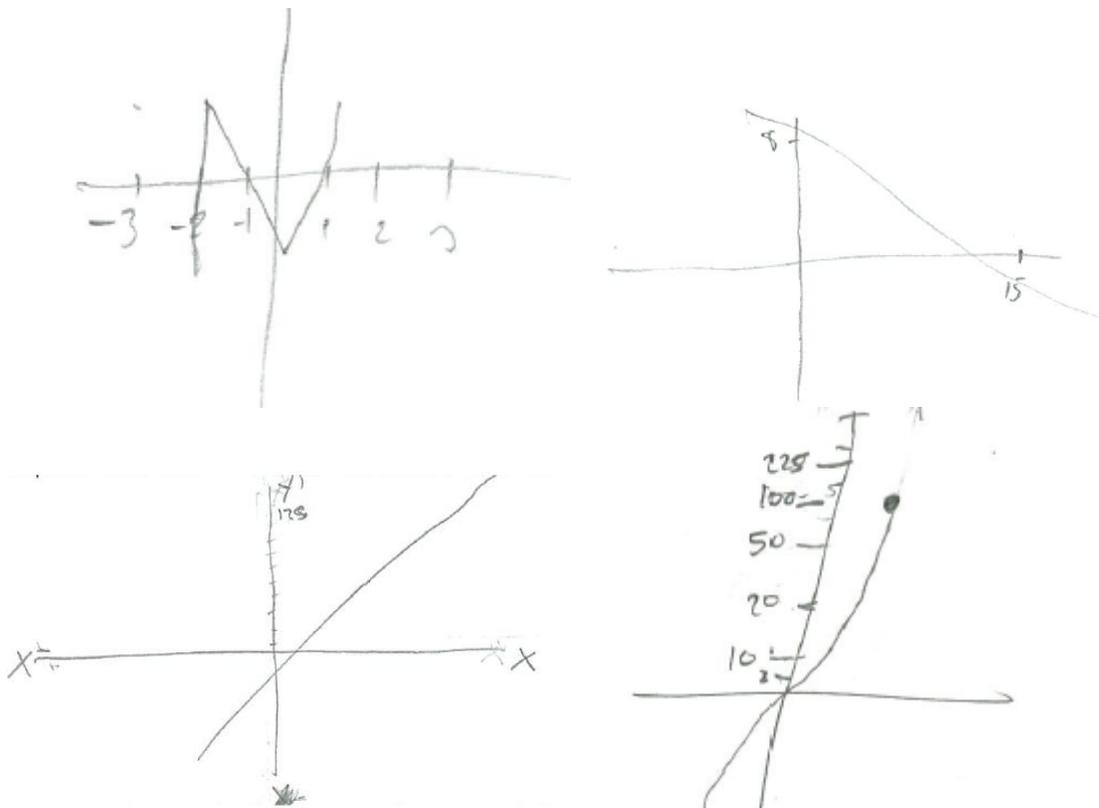
x	f(x) = x <sup>2</sup>
-1	1
0	0
1	1
2	4
-2	4

Nótese que el porcentaje de No Respuesta (NR) tanto de la etapa "d" como la "e" del ítem de desarrollo son aproximadamente el mismo, debido a que ambas etapas hacen referencia al modelamiento realizado en la etapa "c", la cual marca el límite entre la identificación y reproducción del patrón con el modelamiento del mismo.

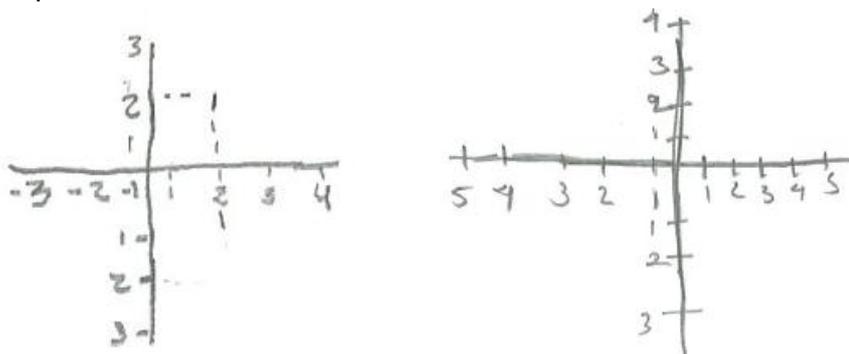
Además, se observa como los códigos 55, 56, 57 y 58 acumulan el 78.43% de los trabajos realizados por los estudiantes en la muestra codificada; prácticamente estos códigos proporcionan el nivel de dominio de aquellos estudiantes que se alejaban de la respuesta esperada. Por ejemplo, el código 58 indican los trabajos donde los estudiantes sólo realizaron un medio bosquejo de plano cartesiano y dejaron casi en blanco la papeleta



Le sigue el código 57, con el que se han registrado aquellos trabajos donde a pesar que no se observa algún tipo bien definido de graduación del plano cartesiano, sí presenta algún bosquejo de gráfica



Sin embargo en el código 56, a pesar de que no se observan bosquejos de una gráfica, aparece definida la graduación del plano cartesiano, aunque dicha graduación no sea precisamente correcta:



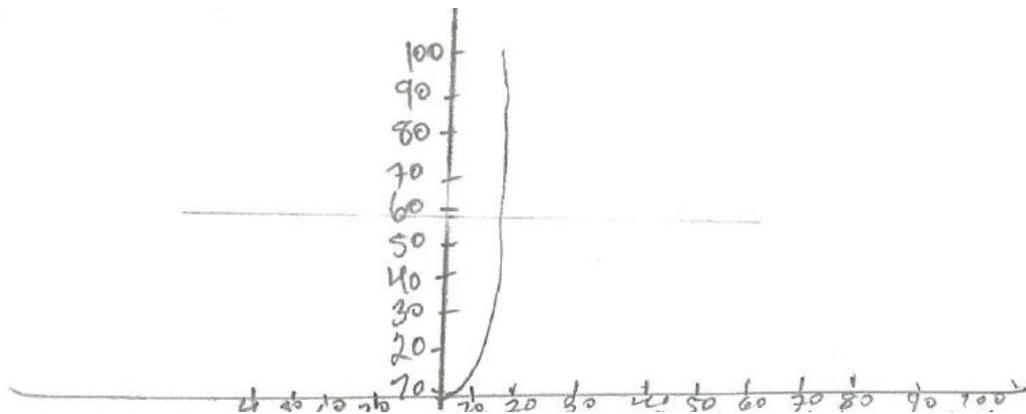
En el código 55, el plano se observa graduado y claramente se observan 3 o 4 puntos cualesquiera ubicados, tal como se muestra a continuación:

e) Grafica en el plano cartesiano la función encontrada en el literal c.



Nótese como los códigos 55 y 56 acumulan en conjunto lo que acumula el código 57, además, estos tres códigos captan 68.41% de la muestra codificada.

A continuación se presentan un ejemplo referido al código 54, donde puede observarse que un porcentaje muy bajo de los estudiantes trabajan solo al lado derecho del plano cartesiano,

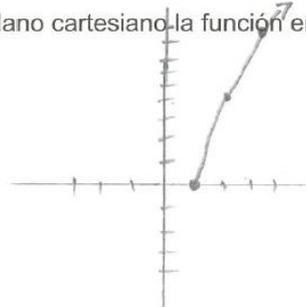


## VI. Etapa "f)" del ítem de desarrollo:

- ✓ Respuestas correctas (Dominio: 16.80% Recorrido: 6.18%).

Finalmente la etapa "f)" del ítem de desarrollo explora más el dominio que el estudiante posee para identificar el dominio y recorrido de lo que haya graficado en la etapa "e", sin considerar que responda o no lo construido a lo largo de las etapas anteriores.

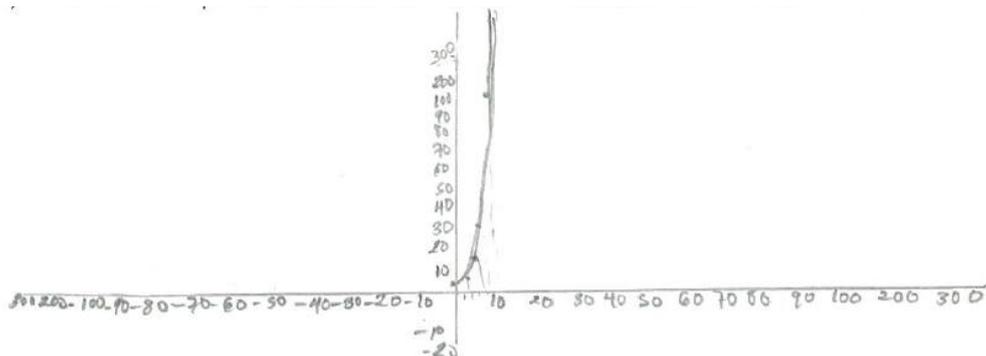
- e) Grafica en el plano cartesiano la función encontrada en el literal c.



- f) Escribe el dominio y el recorrido de lo que graficaste en el plano cartesiano.

Dominio:  $[1, \infty[$

Recorrido:  $[0, \infty[$

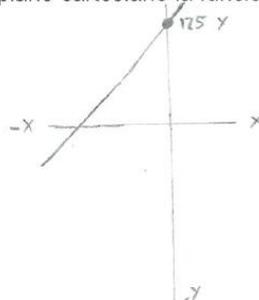


- f) Escribe el dominio y el recorrido de lo que graficaste en el plano cartesiano.

Dominio:  $D = [1, \infty[$

Recorrido:  $[1, 100]$

- e) Grafica en el plano cartesiano la función encontrada en el literal c.



- f) Escribe el dominio y el recorrido de lo que graficaste en el plano cartesiano.

Dominio:  $]0, +\infty[$

Recorrido:  $]0, +\infty[$

En General, lo que se observa es que a los estudiantes les resulta más fácil identificar el dominio que el recorrido.

A continuación se presenta una papeleta completa que describe el trabajo completo realizado por un estudiante de bachillerato.

26 Dada la siguiente secuencia de puntos

Figura 1    Figura 2    Figura 3    Figura 4

Determina lo siguiente:

a) ¿Cuántos puntos formarán la figura cinco?  
25 puntos

b) ¿Cuántos puntos formarán la figura diez?  
R/ 100

c) ¿Cuál es la función que modela el número de puntos que forman la figura "n"?  
R/  $f(n) = n^2$

d) ¿Qué valor se obtiene para  $f(15)$  en la función encontrada en el literal c)?  
R/  $f(15) = 15^2 = 225$

e) Grafica en el plano cartesiano la función encontrada en el literal c.

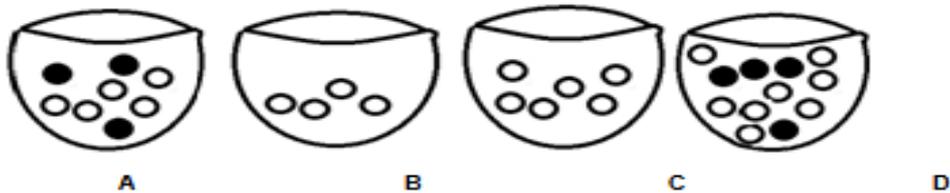
f) Escribe el dominio y el recorrido de lo que graficaste en el plano cartesiano.  
Dominio:  $\mathbb{R}$     Recorrido:  $[-5, 100]$

### Análisis del segundo ítem de desarrollo

Uno de los ítems propuestos es el referido al cálculo de probabilidad. Se codificaron 1622 procedimientos de los estudiantes. Dicho ítem se enmarca en la competencia de Razonamiento lógico matemático y buscaba indagar sobre la habilidad de "Calcular probabilidades, haciendo uso de la definición clásica de probabilidad o de distribución de probabilidad".

El ítem se presentó a los estudiantes como se muestra a continuación.

Se muestran cuatro botes identificados con letras. Se pide realizar los siguientes procesos



- i) Si se saca una bola al azar del bote "A". ¿cuál es la probabilidad que esta sea negra? R/ \_\_\_\_\_
- ii) Pinta con tu lápiz una bola del bote "B" y luego, calcula la probabilidad que al sacar una bola al azar, de dicho bote esta sea negra. R/ \_\_\_\_\_
- iii) Pinta con tu lápiz dos bolas del bote "C" y luego, calcula la probabilidad que al sacar una bola al azar de dicho bote esta sea negra R/ \_\_\_\_\_
- iv) ¿De cuál de los cuatro botes es más probable sacar una bola negra? \_\_\_\_\_
- v) Explica el porqué de la conclusión del literal anterior.

El estudiante debía dejar evidencia de cinco procesos, cada uno de los cuales tenía un nivel de dificultad ascendente. El primer proceso es un cálculo inmediato de probabilidad para un evento simple. En los procesos ii y iii, el estudiante debía sombrear los casos favorables, contabilizar todos los posibles y luego calcular la probabilidad. En el cuarto proceso se debe comparar los cuatro valores de probabilidad y decidir de cuál de los botes era más probable sacar una bola de color. En el quinto apartado el estudiante debe dar una explicación de cómo había llegado a la conclusión de cuál de los botes era más probable escoger una bola de color.

**Etapas i.** Los estudiantes debían calcular la probabilidad que al sacar una bola del bote "A" esta fuera negra. Es un cálculo que involucra utilizar el enfoque clásico de la probabilidad para un evento simple; hay que reconocer los casos favorables, los casos posibles y la respuesta estará correcta si se presenta en cualquiera de las tres formas:  $\frac{3}{8}$ , 0.375 o 37.5%. A cada una de estas respuestas se le asocia un código: 11, 12 o 13, para efectos de contabilizar los porcentajes de estudiantes que optan por una forma u otra de expresar la respuesta.

Se tuvieron otros dos códigos: el 14 y el NR.

El código 14, se utilizó para contabilizar respuestas incorrectas de diferente tipo, aunque al interior de este se contabilizó los porcentajes de errores frecuentes que los estudiantes cometen.

El código NR, indica la ausencia de respuesta a lo que se le solicitó al estudiante.

Se muestran a continuación los resultados de la muestra nacional para el proceso i

Se muestran cuatro botes identificados con letras.  
Se pide realizar los siguientes procesos



i) Si se saca una bola al azar del bote "A", ¿cuál es la probabilidad que esta sea negra?	Código	% Nacional
Escribe el resultado como fracción $\frac{3}{8}$	11	23.9
Escribe el resultado como decimal 0.375	12	8.1
Escribe respuesta en porcentaje 37.5%	13	4.1
Otro valor ¿cuál?	14	62
No responde	NR	1.3

Estos porcentajes según la muestra nacional de 1622 estudiantes, evidencian lo siguiente:

- Un 36% a nivel nacional lo responden correctamente.
- Aunque de este 36%, la gran mayoría expresa su respuesta con un valor de  $\frac{3}{8}$ , un porcentaje menor da su respuesta en notación decimal y todavía un porcentaje menor en forma porcentual.

Se muestran a continuación dos ejemplos de producción de lo que hacen los estudiantes

- i) Si se saca una bola al azar del bote "A", ¿cuál es la probabilidad que esta sea negra?

$$R/ \frac{3}{8} = 0.375\%$$

Si se saca una bola al azar del bote "A", ¿cuál es la probabilidad que esta sea negra?

$$R/ \underline{3 \text{ de } 8}$$

Es de mencionar que los departamentos de San Miguel, Morazán y San Salvador, superan el 40% de acierto en este tipo de procedimiento. Pero llaman considerablemente la atención los departamentos de Sonsonate y San Vicente que presentan menos del 20% de aciertos, a partir de la muestra que se escogió de cada uno de estos departamentos.

**Respuestas incorrectas.**

Nótese que un 62% a nivel nacional está respondiendo erróneamente ante un tipo de cálculo que se considera de nivel muy básico desde la perspectiva del docente. Entre el tipo de respuestas erróneas que los estudiantes están proporcionando se observan con mayor frecuencia las de  $3/5$ ,  $1/3$ ,  $3$ ,  $5/3$ .

Si se saca una bola al azar del bote "A", ¿cuál es la probabilidad que esta sea negra?

$$R/ \frac{1}{3}$$

Si se saca una bola al azar del bote "A", ¿cuál es la probabilidad que esta sea negra?

$$\begin{aligned} P(CB) &= P(CN) \\ P(CS) &= P(C3) = P \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$R/ \frac{3}{5}$$

Si se saca una bola al azar del bote "A", ¿cuál es la probabilidad que esta sea negra?

$$R/ \frac{5}{3}$$

Se consideran a continuación posibles errores conceptuales que los estudiantes evidencian al optar por estas respuestas.

- ✚ Para llegar a la respuesta de  $3/5$ , el estudiante interpreta o contabiliza correctamente los casos favorables al evento (3), pero se equivoca al contabilizar los casos posibles (5). No se tiene claridad de cómo escoger todos los casos posibles, que en este debe ser incluido todo tipo de bola dentro del bote, blanca o negra lo cual totaliza 8 casos posibles. Si este aspecto es tratado con detenimiento por parte del docente, se logrará disminuir el porcentaje de error considerablemente ya que es el procedimiento erróneo que mayor frecuencia presentan los estudiantes.
- ✚ Al responder  $1/3$  en este caso no comprende que hay 8 posibilidades de escoger una bola, confunde el espacio muestral con los casos posibles y además interpreta literalmente la expresión " si se saca al azar una bola del bote "A" ..."
- ✚ Los estudiantes que dan como respuesta 3, es porque desconocen el concepto de probabilidad; contabilizan únicamente las bolas negras que hay en el bote, sin aplicar ningún proceso para calcular la probabilidad de un evento.

- Los estudiantes que responden con el valor  $5/3$ , desconocen los valores entre los que oscila la probabilidad de un evento, que es entre 0 y 1. Está cercano a calcular la probabilidad de obtener una bola blanca, pero desconoce que en el denominador deben ser considerados todos los casos posibles que están en el bote, es un error equivalente a los que plantean que la probabilidad es de  $3/5$ , aunque su error se agrava porque dan por respuesta un valor que es superior a uno, lo cual viola uno de los axiomas de la probabilidad, que dice que toda probabilidad debe oscilar entre cero y uno, con ambos extremos inclusive.
- Un porcentaje muy limitado de estudiantes 1.3%, que representan aproximadamente 21 estudiantes de la muestra no hicieron nada ante la interrogante planteada.

**Etapá ii.** Los estudiantes debían atender la indicación de pintar una bola negra, luego se le pide que calcule la probabilidad que al sacar una bola del bote "B" esta sea negra. Se requiere que el estudiante vuelva a interpretar cuáles son sus casos favorables y cuáles sus casos posibles, luego hacer el cálculo, la respuesta estará correcta si se presenta en cualquiera de las tres formas: sólo coloca  $1/4$ , pinta y coloca  $1/4$ , pinta y coloca 0.25. A cada una de estas respuestas se le asocia un código: 21, 22 o 23, para efectos de contabilizar los porcentajes de estudiantes que optan por una forma u otra de expresar la respuesta.

Se tuvieron otros dos códigos: el 24 y el NR.

El código 24, se utilizó para contabilizar respuestas incorrectas de diferente tipo, aunque al interior de este, se contabilizó los porcentajes de errores frecuentes que los estudiantes cometen.

El código NR, indica la ausencia de respuesta a lo que se le solicitó al estudiante.

**Se muestran a continuación los resultados de la muestra nacional para la etapa ii.**

Se muestran cuatro botes identificados con letras.  
Se pide realizar los siguientes procesos



ii) Pinta con tu lápiz una bola del bote "B" y luego, calcula la probabilidad que al sacar una bola al azar de dicho bote, esta sea negra.	Código	% Nacional
sólo coloca $1/4$	21	2.3
pinta y calcula $1/4$	22	25.2
pinta y calcula 0.25	23	16
pinta y coloca otro número ¿cuál?	24	53.5
no responde	NR	2.6

Estos porcentajes según la muestra nacional de 1622 estudiantes, evidencian lo siguiente:

Un 43.5% a nivel nacional lo responden correctamente. Los estudiantes de los departamentos de de Morazán y Chalatenango tienen los porcentajes más altos en este procedimiento alcanzando un 50% o más en los procedimientos correctos.

Un 7.5% de estudiantes extras lo responde correctamente respecto del numeral anterior, una posible causa de este incremento lo puede explicar que entre los casos favorables sólo hay uno.

Aunque de este 43.5%, la gran mayoría atiende las dos indicaciones, colorear y calcular la probabilidad, un porcentaje mínimo no toma en cuenta que debía colorear una bola del bote.

Se muestra la producción de un estudiante a la pregunta.

ii) Pinta con tu lápiz una bola del bote "B" y luego, calcula la probabilidad que al sacar una bola al azar, de dicho bote esta sea negra.

B = Si se saca una bola negra.

Posibles: 4

Favorables: 1

$$P(B) = \frac{1}{4} = 0.25$$

R/  $\frac{1}{4} = 0.25$

$\frac{4}{12} = 0.333.$

Nótese que un 53.5% a nivel nacional está respondiendo erróneamente a este procedimiento. Entre el tipo de respuestas erróneas que los estudiantes colocan se observan con mayor frecuencia las de:  $1/3$ , 1,  $3/1,4$ .

Se consideran a continuación posibles errores conceptuales que los estudiantes ponen en práctica para optar por este tipo de respuesta.

- ✚ Para llegar a la respuesta  $1/3$ , el estudiante interpreta o contabiliza correctamente los casos favorables al evento (1), pero no interpreta los casos posibles, no lo asocia con todo el espacio muestral. Cuando el docente logre que sus estudiantes determinen correctamente los casos posibles como aquella donde incluye todos los tipos de bolas que están en el bote (negras o blancas), disminuirán considerablemente los errores, ya que es el tipo de error que más frecuentemente se observa.

- ii) Pinta con tu lápiz una bola del bote "B" y luego, calcula la probabilidad que al sacar una bola al azar, de dicho bote esta sea negra.

$$P(W) = P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(1) = P(3)$$

$$R/ \underline{\frac{1}{3}}$$

- ✚ Al responder los estudiantes con un valor de 1, es porque desconocen el concepto de probabilidad, están únicamente contabilizando las bolas negras que hay en el bote. Sin aplicar ningún proceso para calcular la probabilidad de un evento.
- ✚ Los estudiantes que dan por respuesta 3/1: es porque desconocen los valores entre los que oscila la probabilidad de un evento, que es entre 0 y 1. Está cercano a calcular la probabilidad de obtener una bola blanca, pero desconoce que en el denominador deben ser considerados todos los casos posibles que están en el bote, es un error equivalente a los que plantean que la probabilidad es de 1/3, aunque su error se agrava porque dan por respuesta un valor que es superior a uno lo cual viola uno de los axiomas de la probabilidad, que dice que toda probabilidad debe oscilar entre cero y uno, con ambos extremos inclusive.
- La conclusión de que la respuesta final es 4, es porque los estudiantes desconocen el concepto de probabilidad, están únicamente contabilizando las bolas que hay en el bote. Sin aplicar ningún proceso para calcular la probabilidad de un evento.

- ii) Pinta con tu lápiz una bola del bote "B" y luego, calcula la probabilidad que al sacar una bola al azar, de dicho bote esta sea negra.

$$R/ \underline{4}$$

- ii) Pinta con tu lápiz una bola del bote "B" y luego, calcula la probabilidad que al sacar una bola al azar, de dicho bote esta sea negra.

$$\frac{C \cdot F}{C \cdot P} = \frac{4}{1}$$

$$R/ \underline{\frac{4}{1}}$$

- Un porcentaje muy limitado de estudiantes 2.6%, que representan aproximadamente 42 estudiantes de la muestra no hicieron nada ante la interrogante planteada.

**Etapa iii.** Los estudiantes debían atender la indicación de pintar dos bolas negras, luego se le pide que calcule la probabilidad que al sacar una bola del bote “C” esta sea negra. Se requiere que el estudiante vuelva a interpretar cuáles son sus casos favorables y cuáles sus casos posibles, luego hacer el cálculo, la respuesta estará correcta si se presenta en cualquiera de las tres formas: sólo coloca  $2/6$ , pinta y coloca  $2/6$ , pinta y coloca  $0.33$ . A cada una de estas respuestas se le asocia un código: 31, 32 ó 33, para efectos de contabilizar los porcentajes de estudiantes que optan por una forma u otra de expresar la respuesta.

Se tuvieron otros dos códigos: el 34 y el NR.

El código 34, se utilizó para contabilizar respuestas incorrectas de diferente tipo, aunque al interior de éste, se contabilizó los porcentajes de errores frecuentes que los estudiantes cometen.

El código NR, indica la ausencia de respuesta a lo que se le solicitó al estudiante.

**Se muestran a continuación los resultados de la muestra nacional para la etapa iii.**

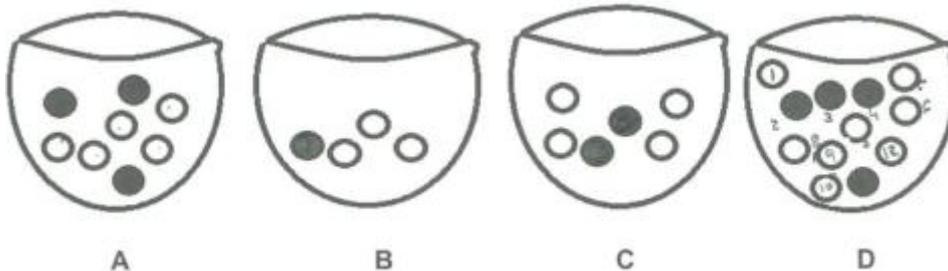
Se muestran cuatro botes identificados con letras.  
Se pide realizar los siguientes procesos



	Código	% Nacional
iii) Pinta con tu lápiz dos bolas del bote “C” y luego, calcula la probabilidad que al sacar una bola al azar de dicho bote esta sea negra		
sólo coloca $2/6$	31	1.1
pinta y calcula $2/6$	32	20.5
pinta y calcula $0.33$	33	11.8
pinta y coloca otro número ¿cuál?	34	63.1
no responde	NR	3.1

Estos porcentajes según la muestra nacional, evidencian lo siguiente:

Un 33.4% a nivel nacional lo responden correctamente. Aunque de este 33.4%, la gran mayoría atiende las dos indicaciones, colorear y calcular la probabilidad. Un porcentaje mínimo no toma en cuenta que debía colorear una bola del bote. Los departamentos de Chalatenango y Morazán siguen presentando los porcentajes más altos en este procedimiento alcanzando promedios superiores al 40% de aciertos en la muestra de cada departamento.



- iii) Pinta con tu lápiz dos bolas del bote "C" y luego, calcula la probabilidad que al sacar una bola al azar de dicho bote esta sea negra

$$\frac{2}{6} \rightarrow 0.3333 \times 100 = 33.33\%$$

R/ 33.33%

Es de notar que un porcentaje similar respondía al primer apartado y 10% menos respecto del segundo apartado, puede deberse a que los casos favorables son mayores de uno, como se presentaba en el apartado i.

Un 63.1% a nivel nacional responde erróneamente a este procedimiento. Entre el tipo de respuestas erróneas que los estudiantes responden se observan con mayor frecuencia las de:  $2/4$ ,  $1/2$ ,  $2$  o  $1/6$ .

Se consideran a continuación posibles errores conceptuales que los estudiantes ponen en práctica para optar por este tipo de respuesta.

- ✚ Para llegar a una respuesta de  $2/4$  ó  $1/2$ , el estudiante interpreta o contabiliza correctamente los casos favorables al evento (2), pero no interpreta los casos posibles, no lo asocia con todo el espacio muestral, sino que con el complemento de los casos favorables o posibles. Debe asegurarse que el estudiante interprete adecuadamente los casos posibles, como todo el espacio muestral.

- iii) Pinta con tu lápiz dos bolas del bote "C" y luego, calcula la probabilidad que al sacar una bola al azar de dicho bote esta sea negra

$$R/ \frac{1}{2}$$

- ✚ Los estudiantes que dan por respuesta 2, es porque desconocen el concepto de probabilidad, están únicamente contabilizando las bolas negras que hay en el bote. Sin aplicar ningún proceso para calcular la probabilidad de un evento.
- ✚ Al responder  $1/6$ , es porque los estudiantes no comprenden cuantos casos favorables hay del evento, están interpretando literalmente "si se saca al azar una bola del bote ..." Es por ello que da una respuesta de la forma  $(1/6)$ .
- ✚ Un porcentaje muy limitado de estudiantes 3.1%, que representan aproximadamente 50 estudiantes de la muestra no hicieron nada ante la interrogante planteada.

**Etapa iv.** Los estudiantes debían para responder, calcular la probabilidad de sacar una bola negra del bote “D”, considerando la misma lógica de los apartados anteriores, luego comparar cuál de los valores de probabilidad calculados es el mayor y poder decidir a qué bote corresponde, en este caso sólo había una respuesta correcta colocar la letra “A”. A esta respuesta se le asocia el código 41 para efectos de contabilizar los porcentajes de estudiantes que optan por una forma u otra de expresar la respuesta.

Se tuvieron otros dos códigos: el 42, 43 y el NR.

El código 42, se utilizó para contabilizar respuestas incorrectas colocando otra letra distinta de “A”.

El código 43, se utilizó para contabilizar respuestas incorrectas pero en este caso los estudiantes responden con enunciados distintos a la letra solicitada, colocan algún valor numérico,

El código NR, indica la ausencia de respuesta a lo que se le solicitó al estudiante.

**Se muestran a continuación los resultados de la muestra nacional para la etapa iv.**

Se muestran cuatro botes identificados con letras.  
Se pide realizar los siguientes procesos



iv) ¿De cuál de los cuatro botes es más probable sacar una bola negra?	Código	% Nacional
coloca la letra A	41	30.9
Otra letra ¿cuál?	42	59.9
Respuesta distinta a letra	43	6.7
no responde	NR	2.3

Estos porcentajes según la muestra nacional evidencian lo siguiente:

Casi un 31% a nivel nacional responden correctamente. Lo cual implicaba seguir el proceso lógico mencionado anteriormente; es decir, calcular la probabilidad del sacar una bola negra del cuarto bote y comparar en cuál de ellos el valor de probabilidad es mayor. Morazán, San Miguel, Chalatenango y Ahuachapán, superan un 40% de respuestas correctas.

Aproximadamente un 59% a nivel nacional responde con una letra diferente de la “A”, entre éstas letras, colocadas en orden descendente de frecuencia aparecen “D”, “B”, “C”.

Se consideran a continuación posibles errores conceptuales que están poniendo en práctica los estudiantes para optar por este tipo de respuesta.

- ✚ Para llegar a la respuesta D, el estudiante opta porque observa la mayor cantidad de bolas negras en el bote D, no hace ningún cálculo que le permita evidenciar en qué “bote” es más probable sacar una bola negra.

iv) ¿De cuál de los cuatro botes es más probable sacar una bola negra? D

- ✚ Los estudiantes que responden con esta letra B, sólo consideraron las probabilidades de los primeros tres botes, además estos cometen un error adicional, considerar que el valor de  $\frac{1}{4}$  es mayor que el de  $\frac{2}{6}$ .

iv) ¿De cuál de los cuatro botes es más probable sacar una bola negra? B

- ✚ Los estudiantes que responden con la letra C, no toman en cuenta la probabilidad del cuarto bote, pero al menos reconocen que  $\frac{1}{4}$  es menor que  $\frac{2}{6}$ .

- ✚ Un porcentaje de casi 7% dan por respuesta algo distinto al formato que se le pide para el caso se le pide nombrar una letra y está respondiendo con un valor numérico. Como se muestra a continuación:

iv) ¿De cuál de los cuatro botes es más probable sacar una bola negra?  $\left(\frac{4}{1}\right)$

iv) ¿De cuál de los cuatro botes es más probable sacar una bola negra? 30

**Etapa v.** Los estudiantes debían argumentar o justificar de forma numérica o expresándolo de forma escrita con sus propias palabras el porqué consideraban que en el bote tal era más probable obtener una bola negra. Se permitía dar una respuesta comparando el valor de la probabilidad expresada de forma fraccionaria, o bien comparando los valores decimales de probabilidad u otro proceso lógico que le permitiera evidenciar que la probabilidad de obtener bola negra en uno de los botes es la mayor. A cada una de estas respuestas se le asocia un código: 51, 52 ó 53, para efectos de contabilizar los porcentajes de estudiantes que optan por una forma u otra de expresar la respuesta.

Se tuvieron otros dos códigos: el 54 y el NR.

El código 54, se utilizó para contabilizar respuestas incoherentes que los estudiantes escribían.

El código NR, indica la ausencia de respuesta a lo que se le solicitó al estudiante.

**Se muestran a continuación los resultados de la muestra nacional para la etapa**

V.

Se muestran cuatro botes identificados con letras.  
Se pide realizar los siguientes procesos



v) Explica el porqué de la conclusión del literal anterior.	Código	% Nacional
Explicación con fracciones	51	4
Explicación con decimales	52	1.4
Otra explicación coherente	53	4.6
Explicación incoherente	54	84.1
no explica	NR	5.9

Estos porcentajes según la muestra nacional de estudiantes, evidencian lo siguiente: Nótese como un 84% de los estudiantes, tienen una limitada capacidad de poder argumentar el porqué escogieron el bote en que consideraban era más probable sacar una bola de color negro. Quiere decir que del 31% que respondieron que en el bote “A” es más probable obtener una bola negra, solamente un 15% logra justificar de forma coherente tal afirmación.

La mayoría de estudiantes dan respuestas incoherentes. Sin hacer uso de argumentos numéricos, y en su mayoría son apreciaciones visuales de la disposición de las bolas negras en cada uno de los botes. Además es una práctica común de una clase de matemática la ausencia casi total de una metodología que justifique el por qué se hace un procedimiento, se enseña cómo hacer el procedimiento, pero nunca como docentes nos preocupamos por que nuestros estudiantes desarrollen la capacidad justificativa o argumentativa.

A continuación se presenta una muestra de justificaciones incoherentes que se dan los estudiantes con el fin de explicar por qué en un bote determinado es más probable sacar una bola negra.

En el bote “B” porque son menos bolas.

En el bote “A” por la variedad.

En el bote “D”, porque se encuentran doce bolas 4 negras y 8 blancas.

La probabilidad de sacar una negra es porque en el recipiente hay menos espacio y nos da facilidad por ese motivo.

En el bote “A” porque está más arriba que las otras bolas de los otros botes.

En el bote “B” porque hay menos bolas y es más fácil decidir que bola tomar.

- v) Explica el porqué de la conclusión del literal anterior.

Porque las 2 negras están encima de las blancas entonces la probabilidad es mayor.

- v) Explica el porqué de la conclusión del literal anterior.

Considero que hay menos bolas que en todos los botes. Hay más probabilidad de sacar la negra porque hay menos bolas.

Un caso muy curioso de como el estudiante procura justificar que en el bote "A" es más probable sacar una bola negra se presenta a continuación:

Se muestran cuatro botes identificados con letras. Se pide realizar los siguientes procesos

Si se saca una bola al azar del bote "A", ¿cuál es la probabilidad que esta sea negra?

R/  $\frac{3}{8}$

El estudiante hizo arreglos en cada bote, donde para cada bola negra asoció dos bolas blancas, quedando que en el bote A después de descartar combinaciones le queda asociada una bola negra con la blanca, mientras que en el bote B, le queda una bola negra asociada con tres bolas blancas.

- iv) ¿De cuál de los cuatro botes es más probable sacar una bola negra? A

- v) Explica el porqué de la conclusión del literal anterior.

Porque hay una menor cantidad por cada bola negra.

Casi un 6%, aproximadamente 100 estudiantes no responde a esta situación.

**Conclusiones.**

- ✚ A los estudiantes se les vuelve accesible identificar los casos favorables, pero en los casos posibles tienen mucha dificultad y por lo tanto, el planteamiento de la fracción que debe medir la probabilidad resulta errónea. El docente debe asegurar que sus estudiantes tengan claridad para determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio.
- ✚ Muchos estudiantes desconocen que la probabilidad debe ser como máximo uno, así que a veces asignan valores mayores de uno para la probabilidad de un evento, quizá producto del conteo de los casos favorables, pero desconocen que debe dividirse entre los casos posibles.
- ✚ La dificultad mayor de los estudiantes se evidenció en la justificación o argumentación de por qué habían optado por “tal” bote, donde era mayor la probabilidad de obtener una bola negra. Es de considerar como una falencia en desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura, el que los estudiantes aprenden conceptos y realizan procesos mecánicos y se llegan a resolver ejercicios de aplicación que involucran la aplicación de conceptos y procedimientos. Pero no se reflexiona del porqué se hace un proceso de determinada forma, o bien procurar el estimular que los estudiantes propongan otras alternativas de cómo se puede hacer.
- ✚ No se estimula la práctica de la metacompreensión de los procedimientos seguidos en la resolución de los problemas.
- ✚ Los porcentajes de aciertos en los apartados i e iii, son muy similares a los obtenidos en los resultados globales por los estudiantes cuando se les evalúan mediante un ítem de selección múltiple la habilidad para determinar la probabilidad de un evento simple.
- ✚ Los departamentos de Morazán, San Miguel y Chalatenango demuestran con la muestra escogida, tener un porcentaje mayor de acierto en los diferentes procesos solicitados.

## 4. Recomendaciones generales

Tomando en cuenta los diferentes puntos que se observan deficientes en los estudiantes, se propone introducir gradualmente en cada unidad o contenido del programa de estudio las etapas que se describirán posteriormente. La finalidad de esta propuesta es desarrollar en los estudiantes habilidades para plantear y resolver problemas, para minimizar que realicen procesos sin entender lo que están haciendo y evitar disociaciones entre el objeto matemático y su significado.

La resolución de problemas en matemática no es sólo un objetivo general, sino un instrumento metodológico importante que constituye uno de los ejes medulares de la asignatura a lo largo de toda la educación básica.

Por esa razón se debe tener presente que el estudio y análisis de casos concretos de la vida diaria, enseñar a organizar los datos, asociar los conceptos para la resolución de las tareas planteadas, expresar y justificar, oral y por escrito las operaciones y los resultados obtenidos, son pautas que no deben perderse de vista en cada actuar en el aula.

Se sugiere, a partir de los contextos y los recursos con lo que se cuenta, desarrollar las siguientes fases:

### 1. Lectura comprensiva del problema

Prestar atención a los datos del problema y al texto, para inferir si tiene o no solución. Esta lectura comprensiva del problema establece cuál es la meta, los datos y condiciones del problema. Esto minimiza que los estudiantes respondan en una prueba de opción múltiple por azar.

Para lograr lo anterior, en las clases de la asignatura debe considerarse que los estudiantes logren una fijación del contenido de tipo conceptual, procedimental y actitudinal, lo cual debe evidenciarse mediante aplicación de lo aprendido en situaciones específicas cercanas al contenido o en aplicaciones más generales de resolución de problemas.

En la secuencia didáctica de la clase debe considerarse tanto el trabajo individual como el grupal (pequeño y gran grupo).

El trabajo individual es anterior a cualquier otra forma de trabajo y consiste en que cada estudiante haga la lectura de la situación problema, la analice y plantee el orden que seguirá. Los conceptos, diagramas o esquemas que combinará para tratar de resolver la situación propuesta.

Posteriormente, comentan en pequeños grupos, pueden ser con sus compañeros cercanos o con los grupos organizados. Si surgen planteamientos con error se sugiere compartir con el resto de la clase. La idea es corregir en ese momento y no cuando el estudiante hizo todo el proceso. En un momento posterior debe estimularse a la explicación del proceso o procesos seguidos en la resolución de problemas, de tal forma que el estudiante desarrolle un estilo argumentativo de resolver los problemas. No limitarse a seguir procedimientos sin saber en muchos casos el porqué debe hacerlo de esa manera.

A continuación se presentan algunas pautas que se deben seguir al abordar la

resolución de problemas.

1. **Lectura comprensiva del problema** prestarención a los datos del problema y al texto, para inferir si tiene o no solución. Esta lectura comprensiva del problema establece cuál es la meta, los datos y condiciones del problema.
2. **Elección de las herramientas adecuadas** En esta fase los estudiantes reflexionan sobre qué herramientas de las vistas en bachillerato corresponde de acuerdo con el plan concebido, a partir de las relaciones detectadas entre los datos.  
Cada herramienta debería reflexionarse sobre lo que hace y por qué lo hace.
3. **Dar soluciones y comprobarlas** Resolver las situaciones planteadas correctamente de forma individual. Porque pueden aparecer diferentes procesos en la aplicación de algoritmos.

Se comentan los resultados obtenidos en el equipo; si el docente lo considera necesario (por si tienen errores) y si no se hizo la socialización anteriormente, se comparte con todos.

En esta etapa los estudiantes dan una explicación (escrita) comprobatoria de la solución, y explica por qué la solución es correcta, es decir, si la respuesta es razonable.

Debe tenerse especial cuidado que la respuesta debe cumplir las condiciones planteadas.

Se sugiere no perder de vista que al presentar los contenidos con los estudiantes se puede hacer uso de distintos tipos de recurso, ya que no todos tienen las mismas formas de hacer suyo el conocimiento, entre estas se proponen algunas:

### **Manipulativas**

Presentar a los estudiantes objetos, materiales de la vida real o simulada que se quiere resolver, para que operen en un contexto significativo. La manipulación es necesaria para que los estudiantes perciban, a través de sus acciones concretas, cuáles son las operaciones aritméticas o algebraicas que debían utilizar. Una vez realizado el problema de manera manipulativa deben relatar lo que han realizado.

### **Gráficas**

Representar lo manipulado en dibujos o esquemas gráficos.

### **Simbólico-numérica (escrita)**

Valiéndose de los símbolos numéricos y del texto escrito, iniciar con problemas cortos directos y gradualmente cambiar a las situaciones donde es necesario reorganizar o inferir alguna información.

**Dirección Nacional de Educación  
Gerencia de Seguimiento a la Calidad  
Departamento de Evaluación de los Aprendizajes**

**Alameda Juan Pablo II y Calle Guadalupe  
Centro de Gobierno, Plan Maestro,  
Edificio A-3, 3<sup>er</sup> Nivel**