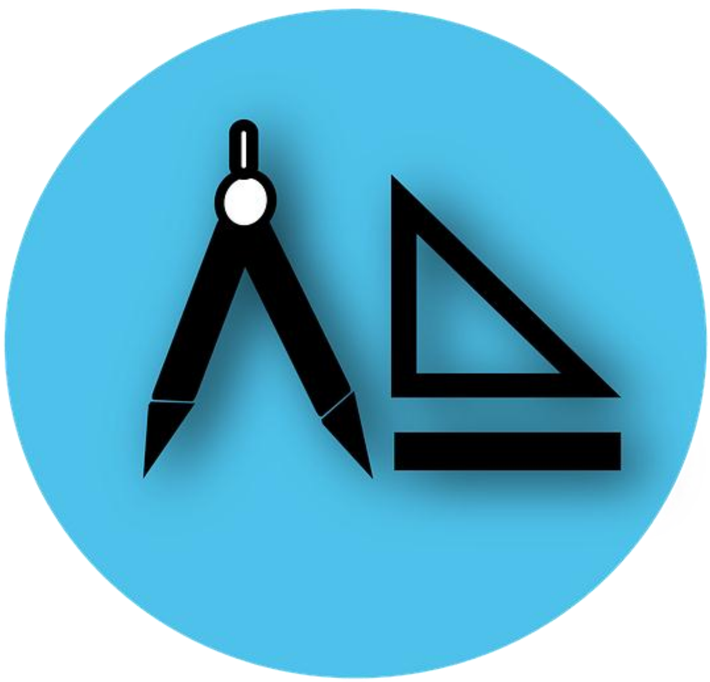
MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DIRECCIÓN NACIONAL DE EDUCACIÓN MEDIA
(TERCER CICLO Y MEDIA)
DEPARTAMENTO DE EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA
GOBIERNO DE EL SALVADOR

DOCUMENTO DE JUSTIFICACIONES TÉCNICAS DE ÍTEMS



MATEMÁTICA

PAES 2018

Presentación

La evaluación de los aprendizajes es un proceso organizado y sistemático, que parte de elementos del Currículo Nacional Vigente (CNV), como el programa de estudio, el enfoque de la especialidad o asignatura, competencias disciplinares, indicadores de logro y la reflexión psicopedagógica en dimensiones del conocimiento y habilidades cognitivas.

En este sentido, la Prueba de Aprendizaje y Aptitudes para Egresados de Educación Media (PAES), busca identificar fortalezas y debilidades del sistema educativo nacional, a partir de los resultados sobre el desempeño de la población estudiantil; los cuales, permiten la reflexión y análisis del quehacer educativo, para tomar decisiones acertadas que potencien el desarrollo de capacidades y habilidades en los estudiantes, para que puedan desempeñarse en situaciones concretas de la sociedad mediante el conocimiento disciplinar.

Por esta razón, el Departamento de Evaluación de los Aprendizajes del Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología, pone a disposición el Documento de Justificaciones Técnicas de los Ítems por asignatura, para que cada director, docente, equipo de evaluación institucional, redes de docentes y asistentes técnicos pedagógicos, puedan apropiarse de la descripción técnica de cada uno de los ítems de la prueba e interpretar los procesos cognitivos que el estudiante ejecutó en cada situación planteada.

En el documento, se presenta sobre cada ítem la siguiente información: indicador de logro, según programa de estudio, habilidad específica, porcentaje de acierto de la opción correcta, justificaciones de la clave y distractores con sentido pedagógico, de esta forma la comunidad educativa podrá conocer qué se evaluó y cuáles son las dificultades de aprendizaje manifestadas.
Seguidamente, se muestra el análisis de las competencias disciplinares, evidenciando la interrelación entre capacidades, indicadores de logro y habilidades específicas, junto con el porcentaje de aciertos. Asimismo, se analiza cualitativamente, el nivel de desempeño de los estudiantes, respecto a qué saben y cómo lo utilizan en situaciones concretas. Lo cual, significa un aporte valioso para orientar el proceso de planeación didáctica y la acción del docente en el aula, permitiendo así, la reflexión sobre las fortalezas en el aprendizaje de los estudiantes y los desafíos a superar.

Finalmente, se hace una propuesta didáctica de la asignatura, para el desarrollo de habilidades cognitivas, a partir de los desafíos en el aprendizaje de los estudiantes, identificados en los resultados de la aplicación de PAES 2018 y, por tanto, enriquecer la práctica pedagógica, ya que es fundamental generar en aula las condiciones adecuadas para estimular el desarrollo de las habilidades cognitivas. Esto, se logra a partir de la organización de una secuencia didáctica, en la que se identifican momentos como la anticipación, construcción y consolidación.

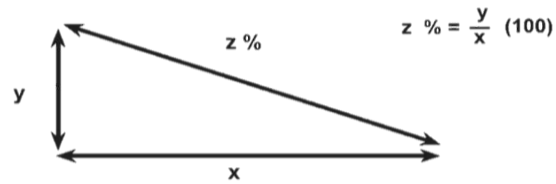
Se espera que esta información que forma parte de los diferentes documentos e informes entregados a las instituciones de Educación Media sobre los resultados en PAES 2018, sea un insumo para la reflexión curricular y pedagógica, asimismo que se generen espacios para analizar y optimizar los planes de mejora institucionales.

Ítem N.° 1

Competencia: Razonamiento lógico matemático.
Indicador de logro: 7.5 Deduce, utiliza y explica la pendiente de una recta con seguridad y confianza.
Habilidad específica: Interpreta el concepto de pendiente en problemas de la vida cotidiana.

Enunciado: Lee la siguiente información y contesta el ítem 1.

En la construcción de inmuebles el porcentaje de inclinación de pendiente "$z\,\%$", se calcula mediante la fórmula siguiente.



Según las normas internacionales de accesibilidad para las personas con discapacidad motora, las rampas de acceso en cualquier edificio deben tener un porcentaje máximo de inclinación de pendiente del $10\,\%$.

¿Cuál debe ser la distancia horizontal de una rampa para que cumpla con las normas internacionales de accesibilidad, si debe alcanzar una altura de 80 cm?

Opciones de respuesta:

A. 460.70 cm
B. 793.73 cm
C. 800.00 cm
D. 806.23 cm

Clave: C
Porcentaje de acierto: 67 %

Justificación de la respuesta correcta
El estudiante comprendió el concepto de pendiente $\frac{y}{x}$ como la razón de cambio entre dos variables, de tal forma que, por cada cambio unitario de la variable independiente, hay una variación en la variable dependiente, así, al observar, tanto el esquema como la fórmula $z\,\% = \frac{y}{x} \times 100$, evidenció que es capaz de interpretar el concepto de pendiente en situaciones de la vida cotidiana.
Determinó que $z\,\% = 10$, la altura $y = 80$ cm, y "x" es la distancia a encontrar. De manera que, para encontrar la distancia solicitada, hizo las sustituciones adecuadas en la fórmula y despejó:

$$10 = \frac{80}{x} \times 100$$

$$x = \frac{8000}{10}$$

$$x = 800$$

de esta forma, determinó que la distancia horizontal de la rampa debe ser de 800.00 cm.

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones muestran que el estudiante no logró interpretar el concepto de pendiente, sin embargo, reconoció que se forma un triángulo rectángulo en la representación gráfica; para el cual, utilizó conceptos trigonométricos y geométricos. Esta dificultad, probablemente, se debe a que en el proceso de enseñanza-aprendizaje no se da relevancia a la interpretación del concepto, sino que se limita a la aplicación mecánica de la formula $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ para encontrar el valor de la pendiente.

A: Aplicó sus conocimientos de razones trigonométricas al utilizar el seno del ángulo, relacionando el cateto opuesto al ángulo, con la altura de la rampa (80 cm), la hipotenusa con el valor buscado (x), y el ángulo con el 10 % de inclinación:

$\text{sen}\, 10° = \frac{80}{x}$, despejó y obtuvo

$x = \frac{80}{\text{sen}\, 10}$

$x = 460.70$

por lo cual, concluyó que 460.70 cm es la distancia buscada.

B: Comprendió que debe encontrar el valor de uno de los lados del triángulo, sin embargo, decidió utilizar el Teorema de Pitágoras ($z^2 = x^2 + y^2$), tomando por hipotenusa 80 cm y relacionó a uno de los catetos con el 10 % confundiéndolo con una cantidad entera y no con su valor en decimal. Despejó uno de los catetos del teorema, sustituyó y obtuvo:

$x = \left(\sqrt{80^2 - 10^2}\right)$

$x = 79.373$

asimismo, consideró el 10 % de inclinación solicitado, sin embargo, omitió la fórmula proporcionada, multiplicando por 10 el resultado anterior:

$x = (79.373) \times 10$

$x = 793.73$

determinó que 793.73 cm es la distancia buscada.

D: Observó que en la figura se forma un triángulo rectángulo, por lo que, erróneamente decidió utilizar el Teorema de Pitágoras, tomando como catetos $x = 80$ y $y = 10$.

$x = \left(\sqrt{80^2 + 10^2}\right)$

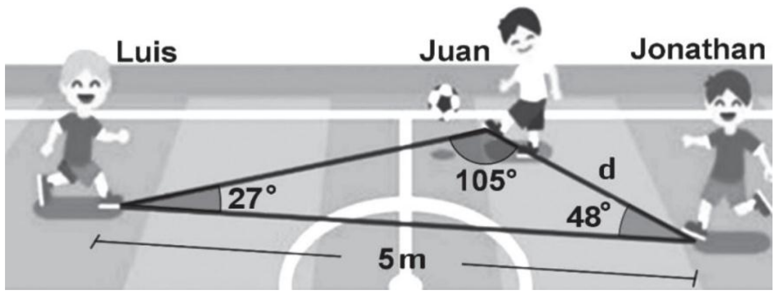
$x = 80.623$

También, consideró el 10 % de inclinación, no obstante, confundió el porcentaje con un número entero y multiplicó por 10 el resultado anterior, obteniendo: $x = 806.23$. Así determinó que esta es la distancia buscada.

Ítem N.° 2

Competencia: Razonamiento lógico matemático.
Indicador de logro: 6.2 Deduce y explica, con seguridad, la expresión que denota el teorema del seno.
Habilidad específica: Reconoce la aplicación del teorema del seno en un triángulo, en situaciones cotidianas.

Enunciado: Juan, Jonathan y Luis juegan fútbol. En un momento del partido se ubican como muestra la figura.



¿Cuál de las siguientes igualdades, permite determinar correctamente la distancia a la que se encuentran Juan y Jonathan?

Opciones de respuesta:

A. $\dfrac{d}{\text{sen } 27°} = \dfrac{5}{\text{sen } 48°}$

B. $\dfrac{d}{\text{sen } 48°} = \dfrac{5}{\text{sen } 27°}$

C. $\dfrac{d}{\text{sen } 105°} = \dfrac{5}{\text{sen } 27°}$

D. $\dfrac{d}{\text{sen } 27°} = \dfrac{5}{\text{sen } 105°}$

Clave: D
Porcentaje de acierto: 51 %

Justificación de la respuesta correcta
El estudiante observó la imagen y comprendió que la posición de los jugadores formaba un triángulo oblicuángulo. Asimismo, identificó los datos que le proporciona la situación planteada: el ángulo en la posición de Jonathan $\measuredangle = 48°$, Juan $\measuredangle = 105°$ al que se opone un lado de $5\ m$ y Luis $\measuredangle = 27°$ al que se contrapone el lado "d", de esta forma, reconoció que debía utilizar el <u>teorema del seno</u>. Estableció la relación de proporcionalidad existente entre las longitudes de los lados del triángulo con los senos de sus ángulos interiores opuestos: $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$. Sustituyó en la expresión y obtuvo:

$$\frac{d}{\text{sen } 27°} = \frac{5}{\text{sen } 105°}$$

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

A continuación, se detalla el proceso realizado por el estudiante en los distractores donde reconoció correctamente el triángulo oblicuángulo que se forma en la situación presentada, porque carece de un ángulo de $90°$. Sin embargo, seleccionó una de las siguientes opciones al no tener claridad sobre la relación existente entre los senos de los ángulos y los lados opuestos del triángulo.

A: Reconoció por medio de los datos que le proporcionó el problema, que debía aplicar el teorema del seno, debido a las características identificadas en el triángulo. Asimismo relacionó correctamente el lado "d" con el seno del ángulo de $27°$, sin embargo, evidenció no tener claro cómo se corresponden los otros lados, con los senos de sus ángulos, al relacionar el lado $5\ m$ con el seno del ángulo de $48°$, planteando la expresión de la siguiente forma:

$$\frac{d}{\operatorname{sen} 27°} = \frac{5}{\operatorname{sen} 48°}$$

B: Determinó que la situación planteada presenta un triángulo oblicuángulo a partir de los elementos que observó. Además, comprendió que debía aplicar el teorema del seno, obtuvo los datos que se le proporcionaron en el problema, sin embargo, estableció una proporción equivocada al relacionar las longitudes de los lados del triángulo, con los senos de sus ángulos adyacente y no con el seno de su ángulo opuesto, obteniendo la expresión:

$$\frac{d}{\operatorname{sen} 48°} = \frac{5}{\operatorname{sen} 27°}$$

C: Logró identificar que debía plantear una proporción entre los lados del triángulo y sus ángulos. Además, reconoció que debía utilizar el teorema del seno; sin embargo, no recordó cómo se relacionan los lados, con los senos de los ángulos opuestos, por lo que, se confundió y planteó la expresión de la siguiente manera:

$$\frac{d}{\operatorname{sen} 105°} = \frac{5}{\operatorname{sen} 27°}$$

Ítem N.° 3

Competencia: Comunicación con lenguaje matemático.
Indicador de logro: 7.13 Construye, utiliza y explica la ecuación de una recta: punto pendiente, valorando su utilidad.
Habilidad específica: Representa fenómenos de la realidad utilizando la ecuación de la línea recta.

Enunciado: Los costos de producción de marcos para fotografías siguen un comportamiento lineal de acuerdo a los datos mostrados en la tabla.

Marcos elaborados (x)	Costo de producción C(x)
10	$220
20	$420

¿Cuál de las siguientes ecuaciones de línea recta, modela el costo de producción en términos de los marcos elaborados?

Opciones de respuesta:

A. $C(x) = 20x + 20$

B. $C(x) = \frac{1}{20}x - 420$

C. $C(x) = 20x - 420$

D. $C(x) = \frac{1}{20}x + 20$

Clave: A
Porcentaje de acierto: 35 %

Justificación de la respuesta correcta
Reconoció en la situación, que debía utilizar la ecuación <u>punto-pendiente:</u> $y - y_1 = m(x - x_1)$ de la línea recta, ya que, el problema plantea que la situación tiene un comportamiento lineal, de esta manera, identificó que la cantidad de marcos es la variable independiente y el costo de producción la variable dependiente, con lo que, relacionó la información de la tabla con los pares ordenados: $P_1(10,220)$ y $P_2(20,420)$.

Además, recordó que puede encontrar el valor de la pendiente por medio de la fórmula: $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, utilizando las coordenadas de los puntos P_1 y P_2, con lo que evidenció que reconoce los elementos necesarios que le permiten representar situaciones de la vida por medio de la línea recta. Después, sustituyó y obtuvo:

$m = \frac{420-220}{20-10}$

$m = 20$

Posteriormente, sustituyó los datos en la ecuación <u>punto-pendiente</u> y operó:

$y - 220 = 20(\,x - 10)$

$y = 20x - 200 + 220$

$y = 20x + 20$, por lo que, determinó que esta es la ecuación buscada.

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones muestran que el estudiante logró comprender que debía utilizar una de las ecuaciones de la línea recta, para representar la situación descrita, por medio de un modelo lineal, ya que relacionó la información de la tabla con los pares ordenados: $P_1(10, 220)$ y $P_2(20, 420)$, sin embargo, se evidenciaron dificultades en la aplicación adecuada de las fórmulas de la pendiente $\left(m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)$ y punto-pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$, esto probablemente, debido a que en el proceso de enseñanza-aprendizaje, para el estudiante, no hay claridad en las características de las ecuaciones de la línea recta, así como, en la relación entre la variable dependiente y la variable independiente.

B: Reconoció en la situación planteada, que debía aplicar una de las ecuaciones de la línea recta, sin embargo, decidió aplicar la ecuación pendiente-ordenada en el origen $(y = mx + b)$ con el intercepto negativo $(-b)$, e identificó el punto $P_2(20, 420)$, como el par ordenado a utilizar, ya que una de las coordenadas, forma parte de la ecuación mostrada en este literal. Asimismo, recordó que debe encontrar la pendiente, no obstante, aplicó, de forma incorrecta, el cociente de la diferencia de las variables dependientes y la diferencia de las variables independientes: $m = \frac{20-10}{420-220} = \frac{1}{20}$.

De esta forma, sustituyó los datos en la fórmula y obtuvo: $y = \frac{1}{20}x - 420$.

C: Utilizó los pares ordenados $(x_0, y_0) = (10, 220)$ y $(x_1, y_1) = (20, 420)$, en la fórmula de la pendiente, para obtener: $m = \frac{420-220}{20-10} = \frac{200}{10} = 20$.

Después, sustituyó esta información en la ecuación punto-pendiente y operó:
$y - 220 = 20(\ x - 10)$
$y - 220 = 20x - 200$; pero al realizar el despeje del término constante – 220, no cambió el signo, por lo que obtuvo
$y = 20x - 200 - 220$
$y = 20x - 420$, así pues, determinó que esta es la ecuación buscada.

D: Reconoció que necesitaba aplicar una de las ecuaciones de la línea recta, no obstante, decidió utilizar la ecuación pendiente-ordenada en el origen, ya que, es la que frecuentemente se utiliza para el modelo lineal.

Para encontrar la pendiente, aplicó de forma incorrecta, el cociente de la diferencia de las variables dependientes y la diferencia de las variables independientes, como se muestra: $m = \frac{20-10}{420-220} = \frac{1}{20}$.

Seguidamente, utilizó el punto $P_2(20, 420)$, porque una de las coordenadas, es parte de la ecuación presentada en la respuesta y sustituyó en la ecuación pendiente-ordenada en el origen para obtener:

$$y = \frac{1}{20}x + 20.$$

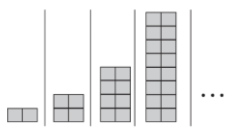
Ítem N.° 4

Competencia: Razonamiento Lógico Matemático.
Indicador de logro: 1.12 Establece con claridad y seguridad, la diferencia entre una sucesión aritmética y una geométrica.
Habilidad específica: Reconoce una sucesión geométrica a partir de un conjunto de sucesiones.

Enunciado: Cada una de las secuencias abajo mostradas, está conformada por una cantidad de figuras semejantes que siguen diferentes patrones de construcción.

¿Cuál de las siguientes secuencias modela una sucesión geométrica?

Opciones de respuesta:

A. 	**C.** 
B. 	**D.** 

Clave: B
Porcentaje de acierto: 60 %

Justificación de la respuesta correcta
El estudiante identificó cada una de las secuencias de las figuras presentadas y la cantidad de elementos que las conforman, por lo que, encontró para la opciones A: $1, 3, 6, 10, \ldots$; B: $2, 4, 8, 16, \ldots$; C: $1, 4, 7, 10, \ldots$; D: $1, 6, 15, 28, \ldots$;. Así mismo, analizó que en una sucesión geométrica existe una razón constante, pues, determinó que la opción B cumple esta característica, al efectuar entre cada pareja de términos consecutivos, el cocientes $\frac{16}{8} = 2,\ \frac{8}{4} = 2, \cdots$ porque existe una razón constante $r = 2$.

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones muestran errores frecuentes que comete el estudiante al no tener claras las características de una sucesión geométrica.

A: Reconoció en la figura la secuencia de números: $1, 3, 6, 10, \ldots$, efectuó restas entre cada pareja de términos, $3 - 1 = \boxed{2}$, $6 - 3 = \boxed{3}$, $10 - 6 = \boxed{4}$ y observó que las diferencias siguen un incremento constante, confundiendo este con el cociente constante de una sucesión geométrica.

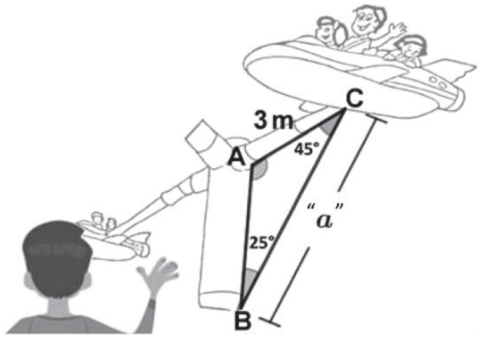
C: Identificó que la secuencia de figuras incrementa en una cantidad constante: $1, 4, 7$ y 10, por lo que, confundió esta secuencia con una sucesión geométrica, sin reconocer que es aritmética.

D: Reconoció que se formaba la serie de números: 1, 6, 15, 28 y efectuó restas entre cada pareja de términos, $6 - 1 = \boxed{5}$, $15 - 6 = \boxed{9}$, $28 - 15 = \boxed{13}$. Además, observó que las diferencias aumentan en una cantidad constante, por lo que, confundió esta característica con la razón de una sucesión geométrica.

Ítem N.° 5

Competencia: Aplicación de la matemática al entorno.
Indicador de logro: 6.4 Resuelve problemas aplicando el teorema del seno.
Habilidad específica: Resuelve situaciones del entorno utilizando el teorema del seno.

Enunciado: Luis asistió a un parque de diversiones, observó desde el suelo a sus amigos que se encontraban en uno de los juegos y decidió calcular la distancia "a". Tomando en cuenta los datos mostrados.



¿Cuál es el resultado del cálculo de Luis?

Opciones de respuesta:

A. 3.99 m
B. 4.24 m
C. 5.02 m
D. 6.67 m

Clave: D
Porcentaje de acierto: 47 %

Justificación de la respuesta correcta
El estudiante reconoció el triángulo oblicuángulo que se forma entre la base y la estructura que sostiene el avión, además, observó que se le presentan dos lados, uno de 3 m y el otro la incógnita a encontrar ($BC = "a"$), asimismo, dos ángulos $\measuredangle B = 25°$, $\measuredangle C = 45°$. Además, para encontrar $\measuredangle A = 110°$, aplicó el teorema de los ángulos internos de un triángulo ($\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$).

De esta forma, reconoció que debía aplicar el teorema del seno $\left(\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}\right)$, para encontrar la distancia representada por el lado "a", ya que en la figura se proporciona la información de dos ángulos y un lado, lo cual demuestra que el estudiante es capaz de reconocer en una situación concreta los elementos necesarios para aplicar el teorema del seno.
Luego, sustituyó los datos y obtuvo:

$$\frac{a}{\text{sen } 110°} = \frac{3}{\text{sen } 25°}$$

$$a = \frac{3 \times \text{sen } 110°}{\text{sen } 25°}$$

$a = 6.67$, así pues, concluyó que el resultado del cálculo de Luis es de 6.67 m.

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones muestran que el estudiante reconoció algunos elementos para utilizar el <u>teorema del seno</u> $\left(\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}\right)$, y así resolver la situación planteada, no obstante, presentó dificultades en su aplicación (relación incorrecta de elementos, problemas de despeje, entre otros). Esto, probablemente, se debe a que, el estudiante tiene dominio parcial de las relaciones entre los lados del triángulo y sus ángulos opuestos, además, en la proporcionalidad presentó dificultades para despejar adecuadamente y así obtener un elemento.

A: Identificó los datos: $AC = 3\ m$, $\measuredangle B = 25°$, $\measuredangle C = 45°$, y $BC =$ "a". Además, por medio de la aplicación del <u>teorema de los ángulos internos,</u> encontró que el ángulo faltante es $\measuredangle A = 110°$. Sin embargo, se le dificultó establecer adecuadamente la proporción entre las longitudes de los lados del triángulo, con los senos de los ángulos opuestos para encontrar el valor de "a", pues, relacionó el lado $AC = 3$ m, con el ángulo adyacente $\measuredangle C = 45°$, obteniendo la siguiente proporción:

$\frac{a}{\text{sen } 110°} = \frac{3}{\text{sen } 45°}$

$a = \frac{3 \times \text{sen } 110°}{\text{sen } 45°}$

$a = 3.99$

por lo que, determinó que el resultado del cálculo de Luis es de 3.99 m.

B: Reconoció que en la figura se forma un triángulo e identificó que debe hacer uso de alguno de los resultados asociados a ellos, sin embargo, no logró diferenciar si para oblicuángulo o rectángulo, por lo que, decidió utilizar <u>la razón trigonométrica seno</u> $\left(\text{sen} \sphericalangle = \frac{cateto\ opuesto}{Hipotenusa}\right)$, no obstante, mostró dificultades en su aplicación, al establecer el ángulo $\measuredangle C = 45°$ y su lado opuesto $b = 3$ m y la hipotenusa como el valor "a", de esta manera planteó:

$\text{sen } 45° = \frac{3}{a}$

$a = \frac{3}{\text{sen } 45°}$

$a = 4.24$, por lo que, concluyó que el resultado del cálculo de Luis es de 4.24 m.

C: Reconoció y extrajo los datos que le proporciona el problema, sin embargo, no identificó que para aplicar el teorema del seno hace falta el ángulo $\measuredangle A$ y utilizó únicamente los datos mostrados, para establecer la proporción de la siguiente forma:

$\frac{3}{sen\ (25°)} = \frac{a}{sen\ (45°)}$, despejó el lado "$a$" y obtuvo:

$a = \frac{3 \times \text{sen } 45°}{\text{sen } 25°}$

$a = 5.02$

por lo que, comprobó que el resultado del cálculo de Luis es de 5.02 m.

Ítem N.° 6

Competencia: Razonamiento lógico matemático.
Indicador de logro: 3.8 Interpreta y explica con interés, los logaritmos como una operación inversa de la potenciación.
Habilidad específica: Revisa ejercicios que contienen expresiones exponenciales y logarítmicas.

Enunciado: Un fabricante de artículos tecnológicos, afirma que la función $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ representa el porcentaje de productos que siguen funcionando después de "x" años.

¿Cuál de los siguientes procesos determina correctamente la cantidad de años"x", en los que el 20 % de los productos del fabricante siguen funcionando?

Opciones de respuesta:

A. $0.20=\left(\frac{4}{5}\right)^x$ $\log 0.20=\log\left(\frac{4}{5}\right)^x$ $\log 0.20=x\log\left(\frac{4}{5}\right)$ $\frac{\log 0.20}{\log\left(\frac{4}{5}\right)}=x$	C. $0.20=\left(\frac{4}{5}\right)^x$ $0.20=\log\left(\frac{4}{5}\right)^x$ $0.20=x\log\left(\frac{4}{5}\right)$ $\frac{0.20}{\log\left(\frac{4}{5}\right)}=x$
B. $0.20=\left(\frac{4}{5}\right)^x$ $\frac{0.20}{\left(\frac{4}{5}\right)}=x$	D. $0.20=\left(\frac{4}{5}\right)^x$ $5(0.20)=4^x$ $5(0.20)-4=x$

Clave: A
Porcentaje de acierto: 43 %

Justificación de la respuesta correcta
El estudiante observó que debía revisar los diferentes procedimientos, para determinar el valor de "x". Identificó que era necesaria la siguiente aplicación de las propiedades de la función logaritmo:

$\log 0.20=\log\left(\frac{4}{5}\right)^x$	Aplicación de la función logaritmo base 10 a ambos lados de la igualdad $0.20=\left(\frac{4}{5}\right)^x$.
$\log 0.20=x\ \log\left(\frac{4}{5}\right)$	Aplicación de la propiedad de la potencia $\log_a u^m = m\log_a u$, en donde, $u=\left(\frac{4}{5}\right)$ y $m=x$, al miembro izquierdo.
$\frac{\log 0.20}{\log\left(\frac{4}{5}\right)}=x$	La expresión $\log\left(\frac{4}{5}\right)$ está multiplicando a x, por lo que pasa a dividir al otro lado de la igualdad.

Concluyó que esta es la forma correcta de despejar la variable x.

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones muestran que el estudiante presentó dificultades en el reconocimiento y aplicación de las operaciones algebraicas de las ecuaciones. Esto, probablemente, se debe a que tiene dominio parcial de la idea de igualdad en las ecuaciones, ya que, en la aplicación de procedimientos algebraicos se evidencia la falta de balanceo en ambos miembros de la igualdad, asimismo, se evidenciaron inconvenientes en reconocer la operación que existen entre cada uno de los elementos de una expresión.

B. Observó la expresión $0.20 = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ y reconoció que debía despejar la variable "x", sin embargo, la asoció con una ecuación algebraica y no con una función exponencial, por lo que, identificó la aplicación de las siguientes operaciones:

$0.20 = \boxed{\left(\frac{4}{5}\right)}^x$	La fracción $\boxed{\frac{4}{5}}$ es una constante que está multiplicando a la variable "x".
$\frac{0.20}{\left(\frac{4}{5}\right)} = x$	La constante $\boxed{\frac{4}{5}}$ pasa a dividir al otro miembro de la igualdad.

Encontró que esta es la forma correcta de despejar la variable "x".

C. Identificó que para encontrar el valor de "x", era necesaria la aplicación de las propiedades de la <u>función logaritmo</u> en el miembro derecho de la ecuación, con lo que evidenció que no tiene claro el significado de la igualdad, de esta manera, identificó la aplicación de las siguientes operaciones:

$0.20 = \log\left(\frac{4}{5}\right)^x$	Aplicación de la función logaritmo base 10 al miembro derecho de la igualdad.
$0.20 = x\ \log\left(\frac{4}{5}\right)$	Aplicación de la propiedad de la potencia $\log_a u^m = m\log_a u$, al miembro derecho de la igualdad.
$\frac{0.20}{\log\left(\frac{4}{5}\right)} = x$	La expresión $\log\left(\frac{4}{5}\right)$ está multiplicando a x, por lo que pasa a dividir al otro lado de la igualdad.

Estableció que esta es la forma correcta de despejar la variable x.

D. Interpretó que debe despejarse "x", sin embargo, no recordó las propiedades de los logaritmos y relacionó la igualdad $0.20 = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ con una ecuación algebraica, así identificó la aplicación de las siguientes operaciones algebraicas:

$0.20 = \left(\frac{4}{5}\right)^x$	La fracción $\boxed{\frac{4}{5}}$ la interpreto como una constante que está multiplicando a la variable "x".
$0.20(5) = 4^x$	El denominador 5 está dividiendo, por lo tanto, pasar a multiplicar al otro miembro de la igualdad.
$0.20(5) - 4 = x$	La constante 4 que representa a la base, se considera como un sumando que debe pasar a restar al miembro izquierdo de la ecuación.

Determinó que esta es la forma correcta de despejar la variable "x".

Ítem N.° 7

Competencia: Comunicación con lenguaje matemático.
Indicador de logro: 2.17 Utiliza la fórmula apropiada para calcular el número de combinaciones o permutaciones de “n” objetos tomados “r” a la vez, en ejercicios de aplicación.
Habilidad específica: Reconoce la fórmula de combinación en situaciones del entorno.

Enunciado: Karla dispone de las siguientes aplicaciones para descargar en su celular.

Si ella decide instalar en su celular siete aplicaciones distintas, ¿cuál de las siguientes expresiones, permite calcular los diferentes grupos de aplicaciones que podrá descargar?

Opciones de respuesta:

A. $\frac{7!}{(12-7)!12!}$

B. $\frac{12!}{(12-7)!}$

C. $\frac{7!}{(12-7)!}$

D. $\frac{12!}{(12-7)!7!}$

Clave: D
Porcentaje de acierto: 31 %

Justificación de la respuesta correcta
Observó que se presentan 12 íconos de aplicaciones diferentes $(n = 12)$, de los cuales debe elegir 7 de ellos $(r = 7)$. Comprendió que el orden de selección no influye y que debía utilizar la fórmula del número combinatorio $\frac{n!}{(n-r)!r!}$, luego sustituyó los datos encontrados y obtuvo: $\frac{12!}{(12-7)!7!}$.

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones muestran que el estudiante presentó dificultades para reconocer la importancia del orden de selección de los elementos, en la situación planteada y de esta manera determinar si debe resolver lo solicitado utilizando una combinación o una permutación.

A. Comprendió que debe hacer uso de la fórmula del número combinatorio, sin embargo, no tuvo claro el significado de cada una de las variables, por lo que, estableció $n = 7$ y $r = 12$, luego sustituyó y obtuvo: $\frac{7!}{(12-7)!12!}$.

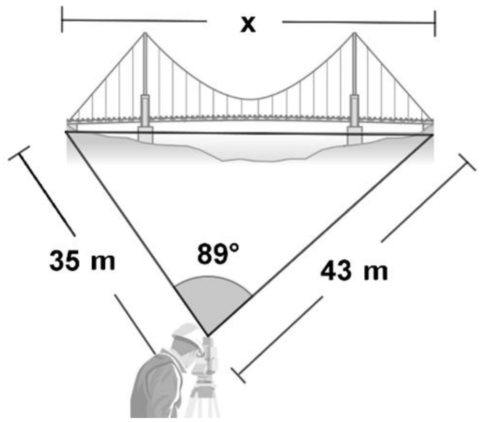
B. Determinó que el orden de descarga de las aplicaciones si influye, por lo que, utilizó la fórmula de las permutaciones $\frac{n!}{(n-r)!}$, sustituyó $n = 12$, $r = 7$ en la fórmula y obtuvo: $\frac{12!}{(12-7)!}$.

C. Asoció la situación con una permutación y no tenía claro el significado de cada una de las variables, estableciendo $n = 7$ y $r = 12$, por lo que sustituyó y obtuvo: $\frac{7!}{(12-7)!}$.

Ítem N.° 8

Competencia: Razonamiento lógico matemático.
Indicador de logro: 6.5 Deduce y explica, con seguridad, la expresión que denota el teorema del coseno.
Habilidad específica: Reconoce la aplicación de la ley del coseno en un triángulo, en situaciones cotidianas.

Enunciado: Un topógrafo necesita calcular la longitud "x" del puente representado en la figura, por lo que, hace las siguientes mediciones.



¿Cuál de las siguientes expresiones determina la longitud "x" del puente?

Opciones de respuesta:

A. $\sqrt{(35)^2 + (43)^2 + 2\,(35)(43)\cos 89°}$ m

B. $\sqrt{(35)^2 + (43)^2 - 2\,(35)(43)\cos 89°}$ m

C. $(35 + 43 + (35)(43)\cos 89°)$ m

D. $(35 + 43 - 2\,(35)(43)\cos 89°)$ m

Clave: B
Porcentaje de acierto: 49 %

Justificación de la respuesta correcta
El estudiante identificó en la imagen de la situación presentada, elementos de un triángulo oblicuángulo. Observó que se le proporcionan dos lados y un ángulo cuyos valores son 35 m, 43 m y $\measuredangle = 89°$, por lo que, reconoció a partir de los datos que debía utilizar el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,(a)(b)\cos\measuredangle.$$

Donde "c" es la longitud del puente, la cual, en la imagen se ha representado con la letra "x"
Sustituyó y obtuvo la siguiente expresión:

$$x^2 = (35)^2 + (43)^2 - 2\,(35)(43)\cos 89° \text{ m}$$

que aplicando raíz cuadrada en ambos miembros se obtiene

$$x = \sqrt{(35)^2 + (43)^2 - 2\,(35)(43)\cos 89°} \text{ m}$$

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones muestran que el estudiante logró reconocer que el triángulo de la imagen es oblicuángulo, ya que, no posee ningún ángulo de 90°, no obstante, se evidenció algunas dificultades en la comprensión de los elementos que conforman la expresión del teorema del coseno:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,(a)(b)\cos\measuredangle$.

A: Identificó en la situación planteada los datos que se le proporcionan en la figura (dos lados y el ángulo comprendido entre ellos) y comprendió que debía utilizar el teorema del coseno. Relacionó correctamente el cuadrado de los lados, sin embargo, en el tercer término se confundió y le cambió el signo al elemento $2\,(a)(b)cos\measuredangle$ (en vez de menos colocó más), después sustituyó en la expresión y obtuvo:

$$x = \sqrt{(35)^2 + (43)^2 + 2\,(35)(43)\cos 89°}\ \text{m}$$

C: Identificó a partir de los elementos de la figura, que para encontrar el valor de "x", debía aplicar el teorema del coseno, pero desconocía que en la expresión se debe considerar el cuadrado de los lados y el doble producto de los mismos, además, confundió el signo del tercer elemento $(2\,ab\,\cos\measuredangle)$ colocándole un signo más en vez del menos, posteriormente sustituyó los datos y obtuvo:

$$x = (35 + 43 + (35)(43)\cos 89°)\ \text{m}$$

D: Reconoció en la figura de la situación presentada un ángulo comprendido entre dos lados, por lo que, determinó a partir de los datos, que debía utilizar el teorema del coseno, sin embargo, recordó la expresión parcialmente, ya que no hizo la correspondencia de los cuadrados de los lados del triángulo y el doble producto de los mismos, obteniendo:

$$x = (35 + 43 - 2\,(35)(43)\cos 89°)\ \text{m}$$

Ítem N.° 9

Competencia: Aplicación de la matemática al entorno.
Indicador de logro: 1.16 Aplica con precisión, la fórmula para la obtención de la suma de los términos de una sucesión geométrica.
Habilidad específica: Resuelve situaciones del entorno utilizando la fórmula de la suma de los elementos de una sucesión geométrica.

Enunciado: Una empresa especializada en la construcción de pozos, cobra $\$1{,}000$ por perforar el primer metro de un pozo e incrementa en $10\ \%$ el precio de cada metro que se perfora respecto al costo del metro anterior.

¿Cuánto cobrará la empresa por perforar un pozo de 5 metros?

Opciones de respuesta:

A. $\$\ 5{,}010.00$ B. $\$\ 5{,}500.00$ C. $\$\ 6{,}105.10$ D. $\$\ 6{,}856.40$

Clave: C
Porcentaje de acierto: 18 %

Justificación de la respuesta correcta
El estudiante identificó que el costo por cada metro perforado $(1{,}000, 1{,}100, 1{,}210, 1{,}331, 1{,}464.1)$ aumenta a una razón constante de 1.1 (debido al $10\ \%$), por lo tanto, estos son los términos de una sucesión geométrica. Además, determinó el costo total, por medio de la fórmula $S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$, que representa la suma de los elementos de una sucesión geométrica, en la cual, sustituyó $a_1 = 1{,}000$, $r = 1.1$ y $n = 5$, operó y obtuvo: $S_n = \frac{1{,}000(1.1^5-1)}{1.1-1} = 6{,}105.1$ (o bien pudo haber sumado todos los términos de la sucesión), concluyendo que un pozo de $5\ \mathrm{m}$ tendría un costo de $\$\ 6{,}105.10$.

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones evidencian que el estudiante reconoció una sucesión en la situación y que debía sumar sus elementos, sin embargo, no logró identificar que la sucesión era geométrica.

A. Observó que el costo por cada metro forma una sucesión, sin embargo, estableció que aumenta en una cantidad constante $(1{,}000, 2{,}000, 3{,}000, \dots)$, sin considerar el $10\ \%$ de incremento, luego sumó los datos $(\$5{,}000)$ y confundió el porcentaje con un valor entero que debía agregar al final obteniendo $\$\ 5{,}000 + \$10 = \$\ 5{,}010$.

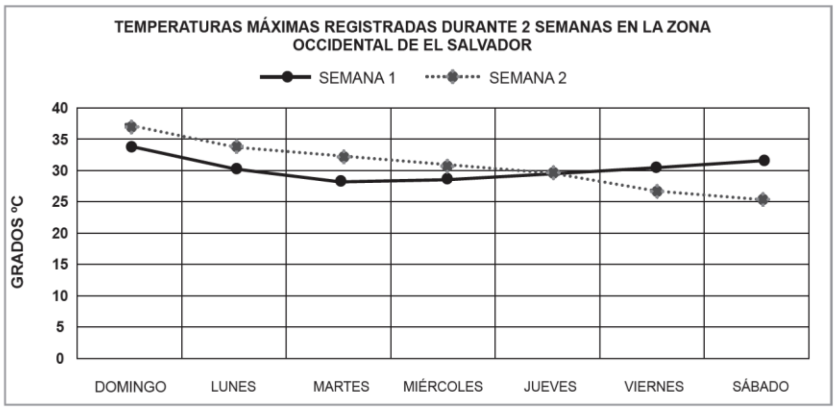
B. Determinó que el costo de perforación forma una sucesión, no obstante, la confundió con una aritmética $(1{,}000, 2{,}000, 3{,}000, \dots)$, ya que no comprendió el aumento del $10\ \%$ por cada metro, luego sumó los términos $(\$5{,}000)$ y a este resultado le aplicó el $10\ \%$, obteniendo $\$\ 5{,}500.00$.

D. Identificó que el costo por cada metro forma una sucesión geométrica con $a_1 = 1{,}000$, $r = 1.1$ y término general $a_n = a_1 r^{n-1}$ y calculó el costo del quinto metro $(a_5 = 1{,}464.1)$, sin embargo, consideró que a_5 era el precio por cada metro después del primero, por ello multiplicó por 4 a a_5 y obtuvo $5{,}856.4$, después le sumó a_1 y obtuvo: $\$\ 5{,}856.40 + \$\ 1{,}000 = \$\ 6{,}856.40$.

Ítem N.° 10

Competencia: Razonamiento lógico matemático.
Indicador de logro: 3.4 Interpreta gráficos de datos referidos a situaciones sociales, ambientales, sanitarias y deportivas.
Habilidad específica: Interpreta información presentada en gráficos estadísticos.

Enunciado: Observa el siguiente gráfico e interpreta.



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?

Opciones de respuesta:

A. En la semana 1 desde el día martes la temperatura aumentó, mientras que en la semana 2 tendió a bajar a partir del día jueves.

B. En la semana 1 el día domingo se registró la mayor temperatura, mientras que en la semana 2 se registró el día sábado.

C. Las temperaturas en la semana 1 desde el día domingo tuvieron un comportamiento idéntico a las presentadas en la semana 2 a partir del mismo día.

D. Las temperaturas en la semana 1 desde el día martes tuvieron un comportamiento contrario a las presentadas en la semana 2 a partir del mismo día.

Clave: D
Porcentaje de acierto: 38 %

Justificación de la respuesta correcta
Observó el gráfico e interpretó que cada una de las líneas representa las temperaturas registradas en dos semanas diferentes. Comprendió que debía establecer un comportamiento (creciente, decreciente o constante). Observó que en la semana 1 a partir del día martes las temperaturas mostraron un comportamiento creciente, mientras que, en la semana 2 fue decreciente a partir del mismo día. Determinó que esta afirmación es correcta, debido a que los comportamientos de las temperaturas son contrarios.

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

A continuación, se describe en cada una de las justificaciones, los posibles procesos cognitivos que el estudiante llevó a cabo para lograr la interpretación de gráficos estadísticos y se menciona puntualmente, algunas dificultades que tuvo al relacionar la información.

A: Logró interpretar que la gráfica que representa a la semana 1, a partir del día martes registró un aumento en la temperatura e identificó en la gráfica para la semana 2, que el jueves ocurrió una disminución, sin observar que toda la semana han ido descendiendo, por lo tanto, consideró que esta afirmación es correcta.

B: Observó la gráfica y comprobó que en la semana 1 la mayor temperatura se registró el día domingo, por lo que, concluyó que esta afirmación es correcta, sin verificar si la segunda proposición era verdadera.

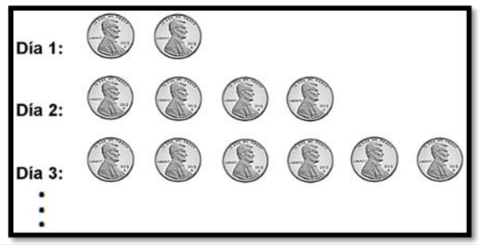
C: Identificó que las tendencias de las temperaturas son similares en algunos días de ambas semanas, sin embargo, no tomó en cuenta que dicho comportamiento es idéntico hasta el día martes, ya que la semana 1 a partir del miércoles las temperaturas tienen a crecer y en la semana 2 continúan decreciendo.

Ítem N.° 11

Competencia: Aplicación de la matemática al entorno.
Indicador de logro: 1.9 Resuelve ejercicios y problemas sobre las sucesiones aritméticas.
Habilidad específica: Resuelve situaciones del entorno utilizando la fórmula de la suma de los elementos de una sucesión aritmética.

Enunciado: Una madre de familia motiva a su hija al hábito de ahorrar, sugiriéndole un plan progresivo de ahorro de monedas de un centavo, como el mostrado en la imagen.

¿Cuántos centavos habrá ahorrado en 30 días?



Opciones de respuesta:

A. 900 B. 930 C. 960 D. 990

Clave: B
Porcentaje de acierto: 46 %

Justificación de la respuesta correcta
El estudiante identificó que, la cantidad de monedas ahorradas a diario $(2, 4, 6, \cdots)$, son los términos de una sucesión aritmética, ya que, cada día incrementa una cantidad constante de 2 centavos. Estableció que necesitaba el término general: $a_n = a_1 + (n-1)d$, para determinar el término a_{30} y la fórmula de la suma: $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$, a fin de encontrar el total de monedas ahorradas. Sustituyó de forma adecuada $(n = 30, a_1 = 2, d = 2)$ en cada una de las fórmulas, operó y encontró que: $a_{30} = 2 + (30-1)2 = 60$ y $S_{30} = \frac{30(2+60)}{2} = 930$, por lo que, habrá ahorrado 930 centavos.

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones muestran que el estudiante reconoció que la situación representa una sucesión aritmética y que, para encontrar la cantidad ahorrada, debía sumar sus elementos, sin embargo, tuvo dificultades en la aplicación de las fórmulas del término general y de la suma.

A. Utilizó el término general para encontrar $a_{30} = 60$, no obstante, recordó equivocadamente la fórmula de la suma, por lo que, encontró que lo ahorrado era: $S_{30} = \frac{30(60)}{2} = 900$ centavos.

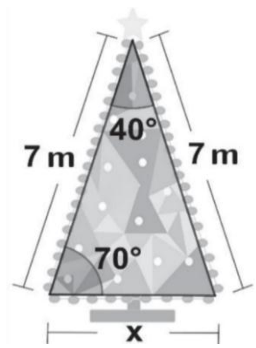
C. Determinó que debía utilizar la fórmula del término general para encontrar a_{30} y la fórmula de la suma, sin embargo, no recordaba algunos de sus términos y utilizó ambas fórmulas como se muestra $a_{30} = 2 + (30+1)2 = 64$, luego calculó que lo ahorrado era: $S_{30} = \frac{30(64)}{2} = 960$ centavos.

D. Identificó que debía encontrar a_{30}, sin embargo, calculó su valor como en la justificación anterior y obtuvo $a_{30} = 64$. Luego, calculó que lo ahorrado era: $S_{30} = \frac{30(2+64)}{2} = 990$ centavos.

Ítem N.° 12

Competencia: Razonamiento lógico matemático.
Indicador de logro: 6.7 Resuelve problemas aplicando el teorema del coseno.
Habilidad específica: Resuelve situaciones del entorno utilizando el teorema del coseno.

Enunciado: Una empresa dispone de una guía de luces de 20 m para decorar un árbol navideño gigante, como el que se muestra en la figura.



¿Alcanzará la guía de luces para decorar el árbol?

Opciones de respuesta:

A. Sí, porque el perímetro es 18.79 m.

B. Sí, porque el perímetro es 19.87 m.

C. No, porque el perímetro es 20.58 m.

D. No, porque el perímetro es 21.00 m.

Clave: A
Porcentaje de acierto: 42 %

Justificación de la respuesta correcta
Identificó a partir de los elementos del triángulo que se forma en el árbol, que podía utilizar el teorema del coseno, ya que tiene dos lados de $7\ m$ y un ángulo de 40° comprendido entre ambos lados. Recordó la expresión: $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,(a)(b)cos\measuredangle$, donde "$c$" es el lado desconocido representado con la letra "x" en la situación planteada. Después, sustituyó en la expresión y obtuvo:

$$c = \sqrt{(7)^2 + (7)^2 - 2(7)(7)\cos 40°}$$
$$c = 4.79$$

Interpretó que para determinar si la guía de luces alcanzará, debía encontrar el perímetro del árbol, por lo que sumó las medidas de los tres lados: $7\text{ m} + 7\text{ m} + 4.79\text{ m} = 18.79\text{ m}$, concluyendo que sí le alcanzará la guía de luces.

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones presentan que el estudiante no diferencia un triángulo oblicuángulo de un triángulo rectángulo, por lo tanto, en la situación presentada no reconoció que debía utilizar el teorema del coseno y aplicó algunos conceptos trigonométricos o geométricos. No obstante, hizo uso adecuado del perímetro de figuras planas.

B: Identificó los datos que le proporciona la situación y consideró que podía utilizar alguna razón trigonométrica para conocer el lado opuesto al ángulo de $40°$, por lo que, equivocadamente utilizó la función tangente de un ángulo: $\tan \sphericalangle = \frac{cateto\ opuesto\ al\ \sphericalangle}{Cateto\ adyacente\ al\ \sphericalangle}$.

Después sustituyó, operó y obtuvo:
$\tan 40° = \frac{x}{7}$
$x = (7)\tan 40° = 5.87\text{ m}$

Luego sumó: $7\text{ m} + 7\text{ m} + 5.87\text{ m} = 19.87\text{ m}$, con lo cual concluyó que sí le alcanzará la guía.

C: Reconoció los datos de la situación planteada y determinó equívocamente que para encontrar el lado "x" podía aplicar la razón trigonométrica seno del ángulo: $\text{sen} \sphericalangle = \frac{Cateto\ opuesto\ al\ \sphericalangle}{Hipotenusa}$, ya que, asoció uno de los lados como cateto opuesto al ángulo de 70° y el lado que desconoce como el adyacente.

Sustituyó con los datos y obtuvo:
$\text{sen } 70° = \frac{x}{7}$
$x = (7)\text{ sen } 70° = 6.58\text{ m}$

Finalmente, sumó las medidas de todos los lados del triángulo: $7\text{ m} + 7\text{ m} + 6.58\text{ m} = 20.58\text{ m}$ y determinó que no alcanzará la guía de luces.

D: Identificó la medida de dos de los lados: 7 m y 7 m, con lo que estableció erróneamente que el otro lado debía medir lo mismo, evidenciando que desconoce las características de un triángulo equilátero, sin embargo, comprendió que debía encontrar el perímetro de la figura, por lo tanto suma la medida de los lados: $7\text{ m} + 7\text{ m} + 7\text{ m} = 21\text{ m}$, con lo cual, comprobó que no alcanzará la guía de luces.

Ítem N.° 13

Competencia: Comunicación con lenguaje matemático.
Indicador de logro: 7.5 Interpreta y ejemplifica desigualdades lineales.
Habilidad específica: Asocia proposiciones cotidianas con desigualdades lineales.

Enunciado: En la siguiente tabla, se presenta la cantidad de calorías que aportan al cuerpo el consumo de alimentos en las porciones mostradas.

PORCIÓN DE ALIMENTOS	CANTIDAD DE CALORÍAS
2 panes	255
2 tortillas	218
½ taza de arroz	354
1 pechuga de pollo	134
½ taza de frijoles	151
1 mango	57
1 naranja	44

Según el Ministerio de Salud (MINSAL) en una dieta balanceada, para el almuerzo deberían consumirse un mínimo de 720 calorías y como máximo 1,000 calorías; de acuerdo a esta información y la presentada en la tabla, ¿cuál de las siguientes propuestas de almuerzo cumple los requerimientos de una dieta balanceada?

Opciones de respuesta:

A. 4 panes, ½ taza de arroz y 1 taza de frijoles.
B. 1 pechuga de pollo, 1 taza de arroz, 2 tortillas y ½ taza de frijoles.
C. 1 pechuga de pollo, ½ taza de arroz, 2 tortillas y 1 mango.
D. 4 panes, ½ taza de frijoles y 1 naranja.

Clave: C
Porcentaje de acierto: 63 %

Justificación de la respuesta correcta
El estudiante asoció el requerimiento energético para un almuerzo balanceado, con la desigualdad lineal: $720 \leq N° \; de \; calorías \; para \; el \; almuerzo \leq 1{,}000$, para la cual, la variable «N° de calorías para el almuerzo» representa la suma de las calorías de cada porción de alimento.

Luego, para calcular el total de calorías y verificar si cumple con la desigualdad planteada, extrajo de la tabla nutricional la información del valor energético de acuerdo a la cantidad de alimento que se especifica en la proposición, así como se muestra en el cuadro ubicado a la derecha. Finalmente, estableció que esta propuesta de almuerzo, cumple con los requerimientos del almuerzo para una dieta balanceada, ya que es superior a 700 y menor de 1,000 calorías como se muestra.

ALIMENTOS POR PORCIÓN	VALOR ENERGÉTICO EN CALORÍAS
1 pechuga de pollo	134
1 porción de arroz	354
2 tortillas	218
1 mango	57
TOTAL	**763**

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones evidencian que el estudiante logró asociar el requerimiento energético para un almuerzo balanceado con una desigualdad lineal. No obstante, tuvo problemas para hacer los cálculos por porción y para establecer los límites de la desigualdad.

A. Comprendió que los alimentos planteados en la propuesta de almuerzo deben cumplir con el requerimiento energético, por lo que, extrajo la información calórica de cada uno de ellos, sin considerar que cuatro panes equivalen a 510 calorías y una taza de frijoles a 302, colocando las cantidades que se muestra en la tabla ubicada a la derecha. De esta manera, determinó que cumple con los requerimientos de un almuerzo para una dieta balanceada, sin notar que las porciones reales superaban 1,000 calorías.

ALIMENTOS POR PORCIÓN	VALOR ENERGÉTICO EN CALORÍAS
4 panes	255
½ taza de arroz	354
1 taza de frijoles	151
TOTAL	**760**

B. Verificó si los alimentos propuestos cumplían con el requerimiento calórico, por lo que, calculó el total de calorías, sin considerar que una taza de arroz equivale a 708 calorías y colocó las cantidades que se muestran en la tabla ubicada a la derecha. De esta manera, estableció que esta propuesta cumple con los requerimientos del almuerzo para una dieta balanceada, sin notar que las porciones reales en realidad representan 1,211 calorías.

ALIMENTOS POR PORCIÓN	VALOR ENERGÉTICO EN CALORÍAS
1 pechuga de pollo	134
1 taza de arroz	354
2 tortillas	218
½ taza de frijoles	151
TOTAL	**857**

D. Extrajo la información calórica de cada uno de los alimentos de acuerdo a lo que se especifica en la propuesta de almuerzo, así como se muestra en la tabla ubicada a la derecha. Sin embargo, no interpretó el significado de la condición «un mínimo de», como límite inferior de la desigualdad, al considerar que las 705 calorías que aportaría este almuerzo, cumplía con los requerimientos del almuerzo para una dieta balanceada, sin observar que la cantidad energética se queda por debajo del límite establecido.

ALIMENTOS POR PORCIÓN	VALOR ENERGÉTICO EN CALORÍAS
4 panes	510
½ taza de frijoles	151
1 naranja	44
TOTAL	**705**

Ítem N.° 14

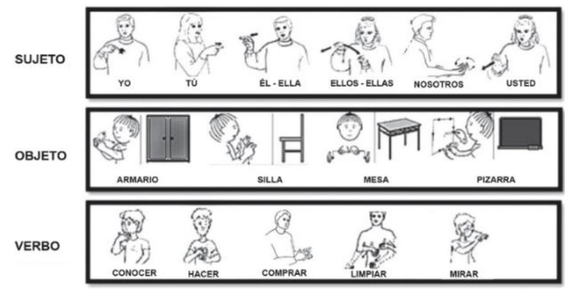
Competencia: Comunicación con Lenguaje Matemático.
Indicador de logro: 2.2 Resuelve problemas, utilizando el principio de la multiplicación.
Habilidad específica: Reconoce fórmulas de conteo en casos concretos.

Enunciado: Observa la imagen referida a la simbología del lenguaje de señas.

Si una oración con el lenguaje de señas tiene la siguiente estructura:

Sujeto – objeto – verbo

¿Cuál de las siguientes expresiones permite determinar la cantidad de oraciones que se pueden formar con los elementos de la imagen?



Opciones de respuesta:

A. $15 + 14 + 13$ B. $6 \times 4 \times 5$ C. $6 + 4 + 5$ D. $15 \times 14 \times 13$

Clave: B
Porcentaje de acierto: 51 %

Justificación de la respuesta correcta
El estudiante reconoció que debía utilizar el principio de la multiplicación para estructurar una oración en lenguaje de señas, ya que cada parte de la oración posee categorías gramaticales diferentes, de esta manera observó que el sujeto tiene 6 formas distintas de ser elegido, además, por cada uno de ellos, hay 4 objetos diferentes, y por cada uno de estos hay 5 verbos, así estableció que la expresión $6 \times 4 \times 5$, le permitiría encontrar la cantidad de oraciones que se pueden formar.

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

A continuación, se dan a conocer los errores cometidos frecuentemente por el estudiante, al momento de aplicar técnicas de conteo, esto probablemente se debe a que confunde el principio de multiplicación con el de adición.

A: Identificó que debía aplicar una técnica de conteo, sin embargo, consideró que la estructura de la oración está formada por tres procesos excluyentes, por lo que, estableció que tenía 15 opciones en total, para colocar la primera parte de la oración, 14 para la segunda y 13 para la última, de esta manera, estableció que la expresión $15 + 14 + 13$, era la indicada.

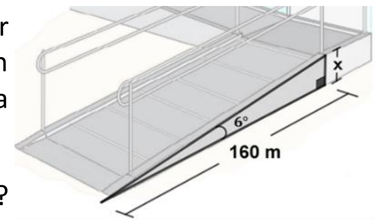
C: Identificó que el sujeto tenía 6 opciones diferentes de ser elegido, el objeto 4 y el verbo 5, sin embargo, estableció que eran mutuamente excluyentes y aplicó el principio de la suma, así, determinó que la expresión: $6 + 4 + 5$ permitiría encontrar lo solicitado.

D: Comprendió que debía determinar la cantidad de oraciones, sin embargo, consideró que el orden no es relevante en la construcción de una oración, por lo que, para formar la primera oración tiene 15 opciones diferentes, 14 para la segunda y 13 para la tercera, por lo tanto: $15 \times 14 \times 13$.

Ítem N.° 15

Competencia: Razonamiento lógico matemático.
Indicador de logro: 1.3 Resuelve problemas utilizando razones trigonométricas.
Habilidad específica: Utiliza conceptos trigonométricos en situaciones del entorno.

Enunciado: En una escuela se construirá una rampa con el fin de facilitar la movilidad a personas con discapacidad motora. Para que cumpla con las medidas de seguridad debe tener un ángulo como el mostrado en la figura.



¿Qué expresión permite encontrar la altura "x" que debe tener la rampa?

Opciones de respuesta:

A. $\frac{160}{\tan 6°}$

B. $160 \cos 6°$

C. $\frac{160}{\cos 6°}$

D. $160 \tan 6°$

Clave: D
Porcentaje de acierto: 47 %

Justificación de la respuesta correcta
El estudiante reconoció que en la figura se forma un triángulo rectángulo y relacionó la distancia horizontal (160 cm), con el cateto adyacente al ángulo $(\sphericalangle = 6°)$ y la altura "x" con el cateto opuesto, por lo tanto, utilizó la función tangente $\left(\tan \sphericalangle = \frac{C.\ opuesto\ al\ \sphericalangle}{C.\ adyacente\ al\ \sphericalangle}\right)$ para relacionarlos, así sustituyó los datos y obtuvo: $\tan 6° = \frac{x}{160}$, luego despejó "x" y encontró que $x = 160 \tan 6°$.

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones muestran los errores frecuentes que comete el estudiante cuando al utilizar las razones trigonométricas, confunde la relación de los lados y los ángulos de un triángulo.

A. Identificó que debía utilizar la función tangente, no obstante, confundió el cateto opuesto con el adyacente al ángulo y al sustituir obtuvo: $\tan 6° = \frac{160}{x}$, luego, despejó encontrando que $x = \frac{160}{\tan 6°}$.

B. Observó que se forma un triángulo rectángulo, sin embargo, relacionó el lado conocido (160 cm) con la hipotenusa y la incógnita "x" con el lado adyacente al ángulo, por lo que, utilizó la función coseno $\left(\cos \sphericalangle = \frac{C.\ adyacente\ al\ \sphericalangle}{Hipotenusa}\right)$, sustituyó los datos: $\cos 6° = \frac{x}{160}$, luego despejó y obtuvo que $x = 160 \cos 6°$.

C. Reconoció que se forma un triángulo rectángulo y que 160 cm es la medida del lado adyacente al ángulo $(\sphericalangle = 6°)$, no obstante, consideró que se puede utilizar la función coseno, al relacionar la incógnita "x" con la hipotenusa, de esta manera, planteó $\cos 6° = \frac{160}{x}$, luego, despejó y obtuvo que $x = \frac{160}{\cos 6°}$.

Ítem N.° 16

Competencia: Aplicación de la matemática al entorno.
Indicador de logro: 5.5 Utiliza la fórmula para el cálculo de la probabilidad de una distribución binomial en solución de ejercicios.
Habilidad específica: Resuelve situaciones cotidianas utilizando la fórmula de distribución binomial.

Enunciado: En una cafetería 6 de cada 10 clientes prefieren desayunar pupusas. Si en una hora llegan siete comensales. ¿Cuál es la probabilidad que cinco desayunen pupusas?

Opciones de respuesta:

A. 0.0774 B. 0.0941 C. 0.2613 D. 0.7143

Clave: C
Porcentaje de acierto: 33 %

Justificación de la respuesta correcta
El estudiante identificó a partir de los datos de la situación, que tiene dos posibles resultados «desayunar pupusas» o «no desayunar pupusas». Recordó la expresión: $p(r) = \binom{n}{r}(p)^r(q)^{n-r}$, que permite calcular la probabilidad de un evento con característica binomial, donde "p" es la probabilidad de éxito (los clientes que prefieren comer pupusas), esta la obtuvo al comprender que 6 de cada 10, equivale al 60 %; y "q" es la probabilidad de fracaso, que es el porcentaje restante que corresponde al 40 % de comensales que no desayunan pupusas. Extrajo los datos del problema y sustituyó $n = 7$ (personas que llegan), $r = 5$ la cantidad de veces que se repite el éxito, $n - r = 2$ cantidad de veces que se repite el fracaso y obtuvo:
$p(r = 5) = \binom{7}{5}(0.60)^5(0.40)^{7-5} = 0.2613.$

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones muestran algunos errores comunes que comete el estudiante al enfrentarse con situaciones de distribución binomial, en donde frecuentemente no comprende los elementos que conforman la expresión $p(r) = \binom{n}{r}(p)^r(q)^{n-r}$

A: Interpretó correctamente las relaciones: 6 de cada 10 = 0.6 (los clientes que comen pupusas en la cafetería) y $1 - 0.6 = 0.4$ (los clientes que no comen pupusas). Sin embargo, no tenía claro cuál de los datos anteriores representa el porcentaje de éxito y el de fracaso, por lo que, los confundió y asoció $p = 0.4$ y $q = 0.6$; sustituyó en la fórmula y obtuvo: $P(r = 5) = \binom{7}{5}(0.4)^5(0.6)^2 = 0.0774$

B: Determinó la probabilidad de éxito (0.60) y de fracaso 0.40. Además, sabía que debía utilizar el combinatorio $\binom{7}{5}$, sin embargo, no tenía claro el significado de las variables "r" y "$n - r$", por lo que, se confundió al sustituir sus valores obteniendo: $P(r = 5) = \binom{7}{5}(0.60)^7(0.40)^2 = 0.0941.$

D: Analizó que la situación está referida a un evento de probabilidad clásica, al considerar que los clientes que llegan a desayunar en una hora en particular (7) son todos los casos posibles y los que eligen comer pupusas (5) son los casos favorables, por lo que obtiene: $\frac{5}{7} = 0.7143$

Ítem N.° 17

Competencia: Comunicación con lenguaje matemático.
Indicador de logro: 1.12 Establece con claridad y seguridad, la diferencia entre una sucesión aritmética y una geométrica.
Habilidad específica: Identifica el término general de una sucesión aritmética o geométrica.

Enunciado: Observa las siguientes figuras construidas con cuadrados de lado uno.

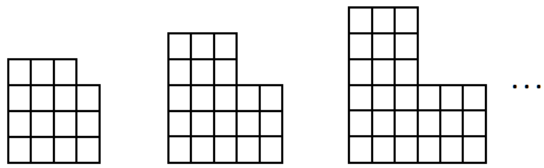


Figura 1 Figura 2 Figura 3

¿Cuál de los siguientes términos a_n modela la cantidad de cuadrados en cada figura?

Opciones de respuesta:

A. $a_n = 16^n - 1$

B. $a_n = 6n + 9$

C. $a_n = 12n + 3$

D. $a_n = 4(2)^n - 1$

Clave: B
Porcentaje de acierto: 44 %

Justificación de la respuesta correcta
El estudiante determinó la cantidad de cuadrados en cada figura $(15, 21, 27, \ldots)$. Además, efectuó restas entre los términos de la secuencia $\left(21 - 15 = \boxed{6}, 27 - 21 = \boxed{6}, \ldots\right)$, reconociendo que existe un incremento constante $(d = 6)$, por lo que, identificó una sucesión aritmética con $a_1 = 15$ y término general: $a_n = a_1 + (n-1)d$, en donde, sustituyó los datos, operó y obtuvo: $a_n = 6n + 9$.

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones muestran los errores frecuentes que comete el estudiante cuando busca el término general de una sucesión aritmética.

A. Determinó la secuencia de números $(15, 21, 27, \ldots)$ que generan las figuras, recordó que el término general reproduce cada uno de estos elementos, por lo que, sustituyó $n = 1$ en la expresión: $a_n = 16^n - 1$ y obtuvo como resultado el primer término, sin embargo, no observó que no se generaban los demás elementos.

C. Recordó que a partir del término general se pueden obtener todos los elementos de una sucesión, por ello, sustituyó $n = 1$ en la expresión: $a_n = 12n + 3$ y obtuvo como resultado el primer término, eligió esta opción sin comprobar si se generan los demás elementos.

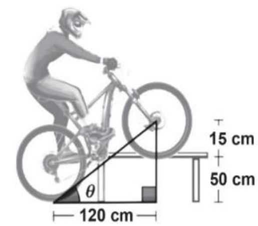
D. Recordó que podía sustituir valores de n para obtener los elementos de la sucesión, sin embargo, no recuerda que esto es válido para los naturales y sustituyó $n = 2$ en la expresión $a_n = 4(2)^n - 1$, obteniendo el primer elemento, por lo que, eligió esta opción sin comprobar para los demás términos.

Ítem N.° 18

Competencia: Aplicación de la matemática al entorno.
Indicador de logro: 1.3 Resuelve problemas utilizando razones trigonométricas.
Habilidad específica: Resuelve situaciones del entorno utilizando conceptos trigonométricos.

Enunciado: Adonay hizo una acrobacia con su bicicleta, como se muestra en la figura.

La medida del ángulo "θ" que se forma al realizar la acrobacia es



Opciones de respuesta:

A. $28.44°$ B. $32.80°$ C. $57.20°$ D. $61.56°$

Clave: A
Porcentaje de acierto: 36 %

Justificación de la respuesta correcta

El estudiante observó que en la imagen se forma un triángulo rectángulo y reconoció en la figura que 120 cm es el lado adyacente al ángulo θ y $50\text{ cm} + 15\text{ cm} = 65\text{ cm}$ el lado opuesto. Comprendió que debía relacionar los lados por medio de una razón trigonométrica ($\sin\theta,\ \cos\theta, \tan\theta$) y concluyó que debía aplicar tangente de un ángulo: $\tan\theta = \frac{lado\ opuesto}{lado\ adyacente}$. Además, recordó que la tangente inversa le permite encontrar el valor de un ángulo, así operó: $\theta = \tan^{-1}\frac{65}{120}$, encontrando que la medida del ángulo que se forma al realizar la acrobacia es de $28.44°$.

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

A continuación, se dan a conocer algunos de los errores que evidenció el estudiante, al encontrar el ángulo en un triángulo rectángulo, esto se debe a que se le dificulta relacionar los lados del triángulo.

B: Comprendió que para encontrar el ángulo debía aplicar el inverso de una razón trigonométrica ($\sin\theta,\ \cos\theta, \tan\theta$), sin embargo, se confundió al relacionar los lados del triángulo y calcular por medio de seno de un ángulo: $\theta = \text{sen}^{-1}\frac{65}{120}$, obteniendo $32.80°$.

C: Determinó que debía utilizar una de las razones trigonométrica y consideró a 120 cm como hipotenusa y 65 cm lado adyacente, con lo que obtuvo el ángulo a partir de la función inversa para el coseno: $\theta = \cos^{-1}\frac{65}{120}$, y encontró que $\theta = 57.20°$.

D: Comprendió que para encontrar el ángulo θ, debe hacer uso del inverso de una razón trigonométrica, pero confundió la relación de las longitudes de los lados, considerando que 120 cm es el lado opuesto y 65 cm es lado adyacente, así resolvió utilizando: $\theta = \tan^{-1}\frac{120}{65}$, y obtuvo $61.56°$.

Ítem N.° 19

Competencia: Razonamiento lógico matemático.
Indicador de logro: 5.2 Resuelve problemas aplicando e interpretando críticamente la media aritmética en datos agrupados y no agrupados.
Habilidad específica: Interpreta las propiedades de la media aritmética en ejercicios o situaciones del entorno.

Enunciado: En una fábrica el sueldo medio mensual es de \$ 300. El empleador dará un incremento a sus trabajadores, ofreciéndoles la alternativa que sea por \$ 30 al sueldo o el 10 % del sueldo.

Los trabajadores se reúnen para discutir **propuestas** de conveniencia del incremento de acuerdo al sueldo, como se muestra:

I. El empleado que gana más del sueldo medio le conviene el incremento de \$ 30.
II. El empleado que gana menos del sueldo medio le conviene el incremento del 10 %.
III. El empleado que gana menos del sueldo medio le conviene el incremento de \$ 30.
IV. El empleado que gana el sueldo medio, cualquiera de los incrementos le conviene.

¿Cuál de los siguientes pares de propuestas discutidas son beneficiosas simultáneamente?

Opciones de respuesta:

A. I y II B. II y III C. III y IV D. I y IV

Clave: C
Porcentaje de acierto: 45 %

Justificación de la respuesta correcta
El estudiante evidenció que conoce y comprende la propiedad de la media aritmética: «si los datos se incrementan en un valor, la media queda aumentada en ese valor», para utilizarla determinó que el $10\ \%$ de 300 es igual a 30, así, para cualquier salario menor a la media, el $10\ \%$ representará una cantidad menor a $\$\ 30$, por lo tanto, para aquellos trabajadores que ganan menos del sueldo medio les conviene el aumento de $\$\ 30$ y para los que ganan el sueldo medio les conviene cualquiera de los incrementos. Así, estableció que las propuestas III y IV, son beneficiosas simultáneamente para los trabajadores.

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones muestran que el estudiante comprendió que debía utilizar las propiedades de la media aritmética, sin embargo, cometió errores en la interpretación de las diferentes situaciones en donde debía hacer uso de esta propiedad.

A. Determinó que el $10\ \%$ de 300 es igual a 30, pero no consideró que el $10\ \%$ de una cantidad mayor a 300, debe ser mayor a 30; y de menos de 300 debe ser menor a 30, por lo tanto, no discrimina el error de sugerir que quien gana más de $\$\ 300$ le conviene el incremento del $10\ \%$ y no de $\$\ 30$ y el que gana menos de $\$\ 300$, le conviene el incremento de $\$\ 30$ y no del $10\ \%$ del sueldo.

B. Encontró que $\$\ 30$ representa el $10\ \%$ del salario medio y observó que tanto la proposición II como la III, le proponen un aumento para los que ganan menos del salario medio, por lo que, equivocadamente determinó que les conviene cualquiera de los dos incrementos.

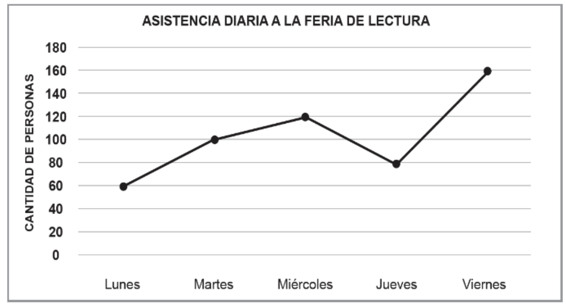
D. Comprendió correctamente que el que gana $\$\ 300$ le conviene cualquier tipo de incremento, pero se equivocó al considerar que el que gana más de $\$\ 300$ le conviene el aumento de $\$\ 30$, ya que si hubiese escogido un aumento de $10\ \%$ al sueldo hubiera recibido más de $\$\ 30$ de aumento.

Ítem N.° 20

Competencia: Razonamiento lógico matemático.
Indicador de logro: 5.2 Resuelve problemas aplicando e interpretando críticamente la media aritmética en datos agrupados y no agrupados.
Habilidad específica: Reconoce la media aritmética para datos agrupados y no agrupados en situaciones del entorno.

Enunciado: Los estudiantes de 2.º año de bachillerato organizaron la semana de lectura y registraron la asistencia de cada día, como se muestra en el gráfico.

¿Cuál fue la cantidad media de asistentes por día?



Opciones de respuesta:

A. 104 B. 110 C. 120 D. 160

Clave: A
Porcentaje de acierto: 46 %

Justificación de la respuesta correcta
El estudiante comprendió la información de la gráfica e identificó que, cada punto indica la cantidad de asistentes por día a la feria de lectura, por lo que, interpretó que debe calcular la media aritmética para datos simples $\left(\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)$, que es la suma de la cantidad de asistentes entre el total de días del evento. Luego sustituyó, operó y obtuvo: $\bar{x} = \frac{60+100+120+60+160}{5} = \frac{520}{5} = 104.$

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

A continuación, se muestran algunos errores frecuentes que comete el estudiante al utilizar la media aritmética para datos simples, al no interpretar el concepto o los elementos necesarios para su cálculo.

B: Observó que debía obtener la media aritmética para datos simples, sin embargo, sumó el mayor al menor y lo dividió entre dos, resultando: $\bar{x} = \frac{160+60}{2} = \frac{220}{2} = 110$

C: Recordó que la media aritmética es una medida de tendencia central, por lo que interpretó que corresponde a los asistentes en el día miércoles, por ser el dato central del evento: $\bar{x} = 120$.

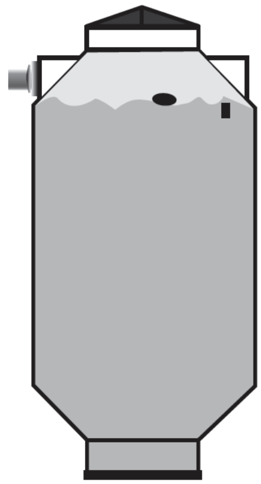
D: Recordó que la media aritmética es un valor representativo, no obstante, evidenció desconocimiento sobre esta medida de tendencia central, ya que consideró que en la situación planteada es el dato mayor, por lo que seleccionó 160.

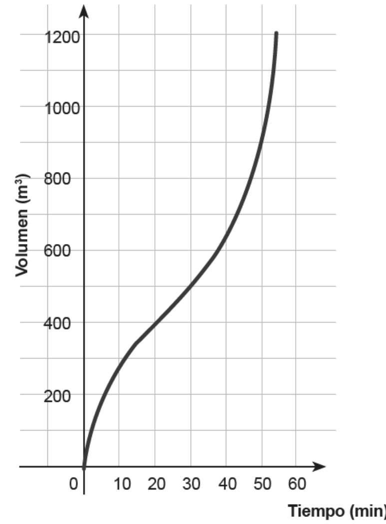
Ítem N.° 21

Competencia: Comunicación con lenguaje matemático.
Indicador de logro: 4.12 Identifica y explica el dominio y recorrido de las funciones.
Habilidad específica: Identifica dominio y recorrido a partir de representaciones gráficas.

Enunciado: Un depósito se llenó con $1200\ \mathrm{m}^3$ de agua como se muestra en la parte izquierda de la figura. En la parte derecha se traza la gráfica de la función que relaciona el volumen alcanzado en el depósito al transcurrir el tiempo.

Encuentra el dominio y recorrido de la función, cuando el volumen del depósito se llenó entre 400 y $900\ \mathrm{m}^3$.





Opciones de respuesta:

A. $\mathrm{Dom}: [0, 1200]$; $\mathrm{Rango}: [0, 60]$

B. $\mathrm{Dom}: [20, 50]$; $\mathrm{Rango}: [400, 900]$

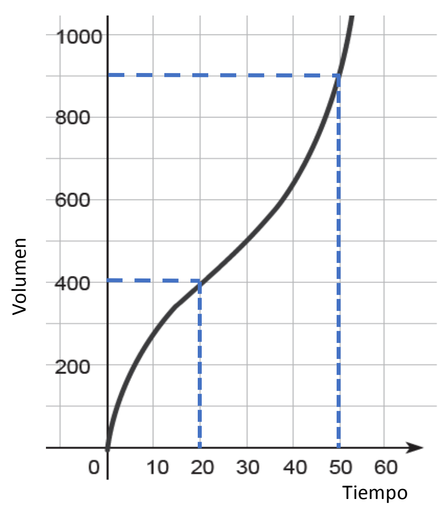
C. $\mathrm{Dom}: [400, 900]$; $\mathrm{Rango}: [20, 50]$

D. $\mathrm{Dom}: [0, 60]$; $\mathrm{Rango}: [0, 1200]$

Clave: B
Porcentaje de acierto: 33 %

Justificación de la respuesta correcta

Recordó que el dominio de una función se relaciona con la variable independiente (el tiempo) y el recorrido o rango se asocia con la variable dependiente (el volumen). Interpretó que la condición «volumen del depósito entre 400 y $900\ \mathrm{m}^3$», es el recorrido de la función, además, identificó que debía buscar el intervalo de tiempo para intervalo de volumen, por lo que, a partir de los valores 400 y 900 en el eje "Y", dibujó líneas paralelas a ellos y líneas perpendiculares desde los puntos de intersección con la gráfica, de esta manera, encontró que sus puntos correspondientes en el eje "X", eran 20 y 50 minutos, con lo que determinó $\mathrm{Dom}: [20, 50]$ y $\mathrm{Rango}: [400, 900]$.



Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones muestran los errores frecuentes que comete el estudiante cuando debe buscar el dominio y el rango de una función. Además, se evidenciaron dificultades para establecer la relación entre la variable independiente con el dominio y la variable dependiente con el rango de la función.

A. Observó que se le pedía encontrar el dominio y el recorrido, pero no reconoció la relación entre la variable independiente y el dominio, así como la relación entre la variable dependiente y el recorrido, además, no tomó en cuenta la condición para el volumen, así estableció que $\text{Dom}: [0, 1200]$ y $\text{Rango}: [0, 60]$.

C. Asoció la condición «volumen del depósito entre 400 y $900\ \text{m}^3$», con el intervalo de volumen $[400, 900]$ en el eje vertical, además, identificó que debía buscar el intervalo de tiempo correspondiente a este, por lo que, a partir de estos los valores 400 y 900 en el eje "Y", encontró que sus puntos correspondientes en el eje "X", eran 20 y 50 minutos, estableciendo el intervalo $[20, 50]$. No obstante, confundió la relación entre la variable independiente y el dominio, así como la relación entre la variable dependiente y el recorrido, por lo que concluyó que $\text{Dom}: [400, 900]$ y $\text{Rango}: [20, 50]$, era la respuesta correcta.

D. Identificó que se le pedía encontrar el dominio y el recorrido, además, recordó que la variable independiente se asocia con el eje horizontal y variable dependiente con eje vertical, por lo que, relacionó el $\text{Dom}: [0, 60]$ y el $\text{Rango}: [0, 1200]$ sin tomar en cuenta la condición para el volumen.

Ítem N.° 22

Competencia: Aplicación de la matemática al entorno**.**
Indicador de logro: 5.2 Resuelve problemas aplicando e interpretando críticamente la media aritmética en datos agrupados y no agrupados.
Habilidad específica: Calcula la media aritmética para datos agrupados en una situación cotidiana.

Enunciado: Los resultados obtenidos por un estudiante en la asignatura de matemática a lo largo de cinco meses son los siguientes:

Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre
5.30	6.40	6.00	6.30	6.50

Si el estudiante se propone para el próximo mes incrementar en un $10\ \%$ su promedio actual, ¿qué promedio deberá obtener?

Opciones de respuesta:

A. 6.10 B. 6.20 C. 6.71 D. 6.75

Clave: C
Porcentaje de acierto: 33 %

Justificación de la respuesta correcta
El estudiante interpretó a partir de los datos que debía efectuar el cálculo la media aritmética para una serie simples $\left(\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)$, en donde sumó todos los valores y dividió por la cantidad de datos sumados, operó y obtuvo: $\bar{x} = \frac{5.30+6.40+6.00+6.30+6.50}{5} = 6.10$. Comprendió que encontró el promedio actual de las notas de los cinco meses anteriores, sin embargo, el contexto del problema especifica que este debe incrementarse en un $10\ \%$, por lo que multiplicó por 1.1, encontrado que $6.10 \times 1.1 = 6.71$ es el valor en el que quedará aumentado el promedio.

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones muestran algunas dificultades que presenta el estudiante en el cálculo de la media aritmética para datos simples y la interpretación de los porcentajes.

A: Comprendió que debía encontrar la media aritmética para una serie simple, aplicó su fórmula y obtuvo $\bar{x} = \frac{5.30+6.40+6.00+6.30+6.50}{5} = 6.10$, sin embargo, no consideró el incremento del $10\ \%$ en el promedio de los cinco meses anteriores, por lo que, concluyó que este promedio era el solicitado.

B: Calculó correctamente la media aritmética de las notas: $\bar{x} = \frac{5.30+6.40+6.00+6.30+6.50}{5} = 6.10$, no obstante, consideró que debía sumar el $10\ \%$ y no multiplicarlo, así obtuvo: $6.1 + 0.10 = 6.20$.

D: Conocía el procedimiento de como calcular la media aritmética para datos simples, pero relacionó el $10\ \%$ de aumento, como una nota más, obteniendo: $\bar{x} = \frac{5.30+6.40+6.00+6.30+6.50+10}{6} = 6.75$.

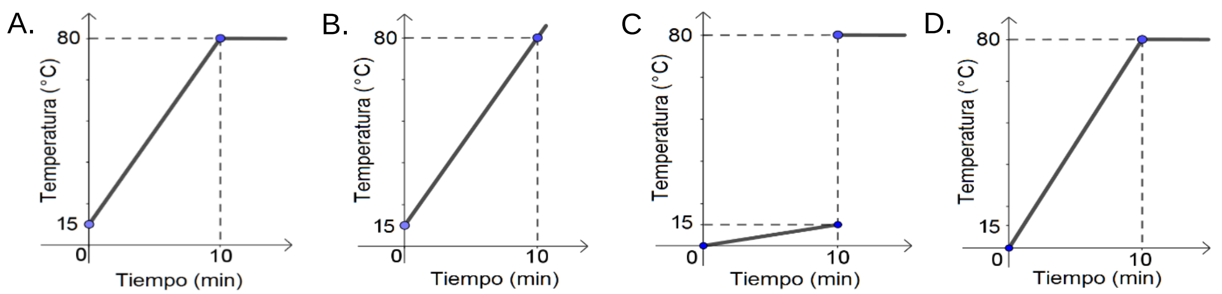
Ítem N.° 23

Competencia: Comunicación con lenguaje matemático.
Indicador de logro: 4.8 Interpreta las propiedades de las funciones y valora su importancia y utilidad al resolver diferentes situaciones relativas al entorno físico.
Habilidad específica: Utiliza funciones para describir situaciones relacionadas con el entorno.

Enunciado: Un recipiente con agua a 15 °C se coloca en el fuego, aumentando su temperatura constantemente hasta 80 °C, durante los primeros 10 minutos. Luego de este tiempo la temperatura se mantuvo constante.

¿Cuál de los siguientes gráficos representa adecuadamente el fenómeno descrito?

Opciones de respuesta:

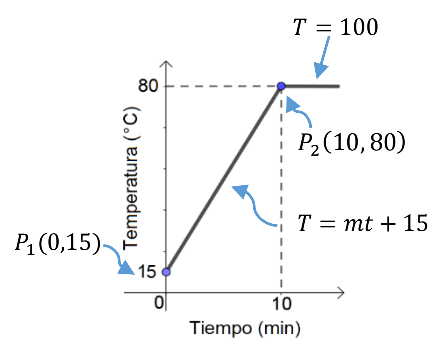


Clave: A
Porcentaje de acierto: 54 %

Justificación de la respuesta correcta
Analizó la situación y determinó que el tiempo es la variable independiente y la temperatura la variable dependiente, por lo que, relacionó los datos como coordenadas cartesianas:
$(t, °\mathrm{C}) = (tiempo\ en\ minutos, temperatura\ alcanzada\ en\ t\ minutos)$.

Además, a partir del fenómeno identificó las siguientes etapas, las cuales se asocian con un comportamiento, en la gráfica:

Temperatura inicial	$P_1(0{,}15)$; el punto donde inicia el fenómeno.
Variación de la temperatura	La variación está dada por una función lineal ($T = mt + 15$), donde m es la razón de cambio entre la temperatura y el tiempo.
Momento en el que el agua alcanza los 80°C	$P_2(10{,}80)$
Estabilización de la temperatura	Una función constante $T = 80$ °C



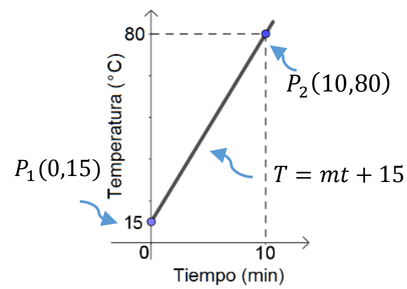
Por lo tanto, estableció que la gráfica de la opción A representa el fenómeno descrito.

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones muestran que el estudiante identificó los datos del problema como coordenadas cartesianas, lo cual le permitió asociar las propiedades de las funciones con el fenómeno, sin embargo, presentó dificultades en la interpretación de la información y por ende en la relación de las funciones con determinadas partes del fenómeno.

B. Estableció las siguientes relaciones asociadas al comportamiento del fenómeno:

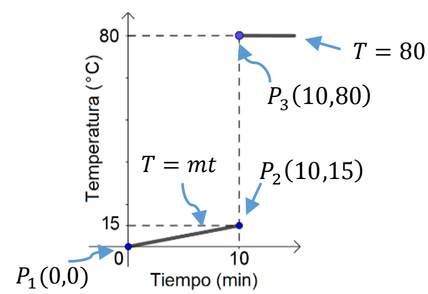
Temperatura inicial	$P_1(0{,}15)$; inició el fenómeno.
Variación de la temperatura	La variación está dada por una función lineal ($T = mt + 15$).
Momento en el que el agua alcanza los 80°C y se estabiliza la temperatura	$P_2(10{,}80)$



Al elegir esta gráfica para representar a el fenómeno, evidencia que no comprendió que la estabilización de la temperatura del agua representa una función constante.

C. Identificó las siguientes etapas, que se asocian con el comportamiento en la gráfica:

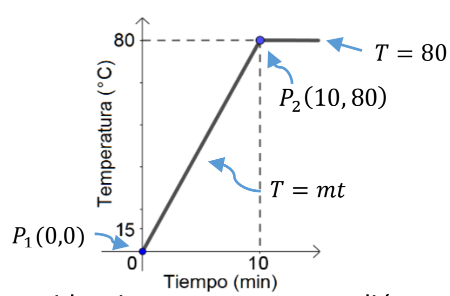
Temperatura inicial	$P_1(0{,}0)$; relaciona el origen con el inicio del fenómeno.
Variación de la temperatura	Reconoce que la variación está dada por una función lineal ($T = mt$).
Momento en el que el agua alcanza los 15°C	$P_2(10{,}15)$; el punto en el que el agua tiene los 15°C que describe el fenómeno.
Estabilización de la temperatura	Una función constante $T = 80$ °C



Concluyó que este gráfico representa el modelo planteado evidenciando que no comprendió que el agua inicialmente tenía (a los 0 minutos) una temperatura de 15° C y que su temperatura incrementó a una razón constante hasta los 80° C.

D. Determinó las siguientes relaciones para establecer el comportamiento de la gráfica:

Temperatura inicial	$P_1(0{,}0)$; inicio del fenómeno.
Variación de la temperatura	Función lineal ($T = mt$).
Momento en el que el agua alcanza los 15 °C	$P_2(10{,}80)$
Estabilización de la temperatura	Función constante $T = 80$ °C



Estableció que esta gráfica representa el fenómeno, lo que evidencia que no comprendió que el agua inicialmente tenía (a los 0 minutos) una temperatura de 15 °C.

Ítem N.° 24

Competencia: Aplicación de la matemática al entorno**.**
Indicador de logro: 4.15 Resuelve ejercicios y problemas sobre el cálculo de la probabilidad de eventos.
Habilidad específica: Resuelve situaciones del entorno utilizando enfoque clásico de eventos simples o compuestos.

Enunciado: Una institución de beneficencia hará la rifa de un carro y solo se venderán 300 boletos. Si una persona quiere tener un 30 % de posibilidades de sacarse el premio, ¿qué cantidad mínima de números debe comprar?

Opciones de respuesta:

A. 10 B. 30 C. 90 D. 100

Clave: C
Porcentaje de acierto: 51 %

Justificación de la respuesta correcta
El estudiante comprendió que la situación estaba referida a una probabilidad con enfoque clásico, en la que, la ocurrencia de un evento está dada por el cociente de los casos favorables respecto a los casos posibles $\left(P(E) = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles}\right)$, en donde, los 300 boletos vendidos son los casos posibles y los casos favorables es la cantidad mínima (x) de boletos a comprar para tener el 30 % de posibilidades de ganar. Así, sustituyó los datos en la fórmula y obtuvo: $\frac{x}{300} = 0.30$, luego despejó la variable y encontró: $x = (300)(0.30) = 90$, así determinó que debe comprar 90 boletos.

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

Las siguientes justificaciones muestran los errores comunes que comete el estudiante, al resolver situaciones calculando la probabilidad con enfoque clásico, en donde la falta de comprensión del problema y la identificación de las características del evento son las dificultades más frecuentes.

A: Comprendió que debía encontrar una probabilidad utilizando enfoque clásico, asimismo identificó los casos posibles (300 boletos), sin embargo, asoció el 30 % con los casos favorables, confundiéndolo con un valor entero (30) y efectuó el cociente $\frac{300}{30} = 10$, para encontrar la cantidad de boletos, evidenciando que no conoce como calcular esta probabilidad.

B: Interpretó que debe calcular la cantidad de boletos a comprar para tener un 30 % de probabilidades de ganar, sin embargo, recupero información textual y confundió el porcentaje con una cantidad entera, al determinar que debían comprarse 30 boletos.

D: Recordó la expresión de la probabilidad con enfoque clásico e identificó los casos posibles (300 boletos) y los casos favorables (x boletos a comprar), sustituyó: $\frac{x}{300} = 0.30$, despejó la variable y encontró: $x = (300)(0.30) = 90$, sin embargo, se confundió al considerar que el porcentaje debía sumarlo como un valor entero, por lo que obtuvo: $90 + 10 = 100$.

Ítem N.° 25

Competencia: Aplicación de la matemática al entorno.
Indicador de logro: 5.10 Resuelve ejercicios y problemas aplicados a la vida cotidiana sobre variables con distribución normal, con seguridad.
Habilidad específica: Calcula la probabilidad para una variable que tenga una distribución normal.

Enunciado: Se ha comprobado que el peso de grupos de ocho personas en un ascensor tiene una distribución normal, con media de 1200 lb y una desviación estándar de 200 lb.

¿Cuál es la probabilidad que un grupo de ocho personas que entran en un ascensor pese más de 1016 lb?

Opciones de respuesta:

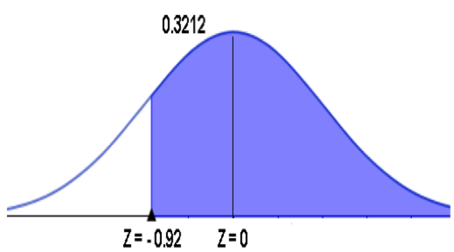
A. 0.1788 B. 0.3212 C. 0.6424 D. 0.8212

Clave: D
Porcentaje de acierto: 28 %

Justificación de la respuesta correcta
Comprendió que, en la situación planteada, debe calcular la probabilidad de distribución normal e identificó los siguientes datos:

Media aritmética: $\mu = 1200$ lb Desviación típica: $\sigma = 200$ lb Variable: $x = 1016$ lb (El grupo de 8 personas que pesa más de 1016 lb).	Estandarizó a través de la expresión: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ Sustituyó: $z = \frac{1016-1200}{200} = \frac{-184}{200} = -0.92$

Utilizó la tabla de distribución normal entre $z = 0$ y $z = -0.92$ para hallar la probabilidad de la variable estandarizada z, que se encuentra a la derecha de -0.92, encontrando que $z = 0.3212$.



Luego sumó 0.5, lo que corresponde a la mitad derecha de la curva:
$P(z > -0.92) = 0.3212 + 0.5 = 0.8212.$

Justificación de los distractores. Posibles causas por las que los estudiantes seleccionaron la opción equivocada.

A continuación, se muestran algunas de las dificultades, que el estudiante enfrentó al resolver una situación, en donde, debe calcularse la probabilidad, utilizando la distribución normal. Los errores más frecuentes, posiblemente, se deben a no saber ubicar el valor en la tabla (en el caso que utilice la tabla de distribución normal entre 0 y z) o que al ubicarlo, no comprende si debe sumar, restar 0.50 al valor encontrado, o multiplicarlo por 2.

A: Recordó que debía estandarizar para determinar el valor a buscar en la tabla. Encontró correctamente que la probabilidad asociada a un valor de $z = -0.92$ es 0.3212, pero interpretó que le solicitan la probabilidad que sea menor a 1016 lb, por lo tanto, le restó 0.5, obteniendo:

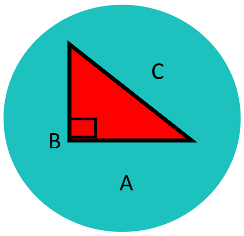
$$0.5 - 0.3212 = 0.1788$$

B. Identificó que debía estandarizar para obtener el valor de z y efectuó correctamente el cálculo, obteniendo $z = -0.92$. Utilizó la tabla de áreas entre z y 0 para buscar el valor de probabilidad asociada a $z = -0.92$ y encontró que corresponde a 0.3212.

Interpretó de forma incorrecta, que este valor que obtuvo en la tabla es la probabilidad que el grupo en elevador pese más a 1016 lb.

C: Utilizó la tabla correctamente para buscar que la probabilidad asociada a un valor de $z = -0.92$, encontró que corresponde a 0.3212, sin embargo, consideró que como el valor que obtuvo es negativo debía multiplicarlo por 2, porque la curva es simétrica: $0.3212 \times 2 = 0.6424$.

❖ Análisis de resultados de la asignatura de Matemática



La Matemática es un área del conocimiento que, por medio de su estructura lógica y secuencial favorece el razonamiento y el pensamiento analítico, lo cual ayuda a la comprensión de otras disciplinas. Por ello, aplicada a la educación permite desarrollar habilidades numéricas, potencia el razonamiento lógico y espacial, para deducir procedimientos, buscar soluciones a problemas reales o cercanos a la vida cotidiana, entre otras prácticas.

En PAES, la asignatura de matemática, evalúo las competencias y los indicadores de logro establecidos en el Currículo Nacional Vigente (CNV) de Educación Media, a través de ítems que exploraron el desarrollo de capacidades y habilidades cognitivas (reconocer, identificar, interpretar, resolver, revisar, entre otras), alcanzadas por los estudiantes, esto permitió identificar algunos de los conocimientos que se espera dominen los estudiantes al finalizar la educación media. Lo anterior se investigó, mayoritariamente, por medio de situaciones problemáticas, utilizando información textual o gráfica contextualizada, que respondió al enfoque de la asignatura, el cual es la resolución de problemas.

Niveles de desempeño evaluados en Matemática

Los niveles de desempeño, permiten conocer el grado de desarrollo de las habilidades cognitivas que utiliza el estudiante al resolver situaciones concretas, que requieren de conocimientos y procesos específicos, según la complejidad del problema que se le presenta. Es importante destacar que, el desarrollo de habilidades es fundamental para el aprendizaje, ya que, permite ordenar el pensamiento y el conocimiento para utilizarlo en la resolución de problemas.

A continuación, se describen los niveles de complejidad evaluados:

- Este nivel involucra la comprensión y uso adecuado de la información presentada en soportes gráficos (tablas, gráficas, figuras) y la manipulacióon de expresiones algebraicas de conceptos fundamentales de las diferentes áreas de la matemática.
- Reconoce teoremas y conceptos trigonométricos.
- Reconoce fórmulas estadísticas.
- Utiliza funciones para describir situaciones relacionadas con el entorno.

NIVEL 1

- Este nivel implica el análisis de la información presentada en soportes gráficos y expresiones algebraicas, a fin de identificar datos trascendentes que permitan interpretar y aplicar procesos matemáticos, para obtener respuestas a problemas o ejercicios planteados.
- Interpreta información estadística.
- Identifica el término general de una sucesión aritmética o geométrica.
- Identifica dominio y recorrido a partir de representaciones gráficas.

NIVEL 2

- Este nivel requiere que se evaluen, revisen y empleen herramientas, procesos y fórmulas matemáticas adecuadamente, para la construcción de soluciones específicas de una situación planteada.
- Revisa ejercicios que contienen expresiones exponenciales y logarítmicas.
- Calcula la probabilidad para una variable que tenga una distribución normal.
- Interpreta las propiedades de la media aritmética.

NIVEL 3

En las siguientes tablas, se presenta el análisis de las competencias evaluadas en la asignatura de Matemática, que contiene: número de ítem, indicadores de logro, habilidades específicas, porcentaje de acierto de cada ítem, así como, una descripción de las fortalezas y desafíos de aprendizaje de los estudiantes.

RAZONAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO

En esta competencia se evaluó la interpretación de información, la comprensión de símbolos abstractos, los procesos deductivos y la capacidad de un estudiante para justificar la validez de un resultado. A continuación, se presentan las habilidades e indicadores de logro que fueron explorados en esta competencia.

N. °	Indicador de logro	Habilidades evaluadas	%	Análisis de resultados
4	1.12 Establece con claridad y seguridad, la diferencia entre una sucesión aritmética y una geométrica.	(N2) Reconoce una sucesión geométrica a partir de un conjunto de sucesiones.	60 %	- **Fortalezas:** En esta competencia se evidenció que los estudiantes son capaces de reconocer y comprender terminología, conceptos, definiciones, fórmulas, teoremas y diversos elementos matemáticos básicos en situaciones cercanas a la realidad. De acuerdo a los resultados obtenidos, el contexto brindado en las situaciones, les permitió relacionar correctamente, en la mayoría de los casos, la información presentada en cada situación, esto lo hicieron por medio de algoritmos o fórmulas conocidas, como reconocer entre un conjunto de sucesiones una geométrica o diferenciar entre el teorema del seno y el coseno, logrando de esta manera trascender del simple uso de las expresiones matemáticas, al razonamiento de los elementos que las componen, y entender circunstancias, condiciones que se encuentran en los problemas planteados. - **Desafíos:** Es importante estimular el pensamiento lógico, para que el estudiante, pueda establecer relaciones entre variables e interpretar información presentada en gráficos estadísticos. Para ello, se pueden utilizar diversos recursos, como acertijos, paradojas, rompecabezas, crucigramas, sudoku, entre otros, de esta forma, se logrará estimular el pensamiento reflexivo y estratégico, sin descuidar la lectura comprensiva. También, es importante hacer énfasis en la relación entre las variables que componen las expresiones que generalizan un fenómeno, para así evitar el uso memorístico de los mismos.
2	6.2 Deduce y explica, con seguridad, la expresión que denota el teorema del seno.	(N1) Reconoce la aplicación del teorema del seno en un triángulo, en situaciones cotidianas.	51 %	
8	6.5 Deduce y explica, con seguridad, la expresión que denota el teorema del coseno.	(N1) Reconoce la aplicación de la ley del coseno en un triángulo, en situaciones cotidianas.	49 %	
15	1.3 Resuelve problemas utilizando razones trigonométricas.	(N1) Utiliza conceptos trigonométricos en situaciones del entorno.	47 %	
19	5.2 Resuelve problemas aplicando e interpretando críticamente la media aritmética en datos agrupados y no agrupados.	(N3) Interpreta las propiedades de la media aritmética en ejercicios o situaciones del entorno.	45 %	
6	3.8 Interpreta y explica, con interés, los logaritmos como operación inversa de la potenciación.	(N3) Revisa ejercicios que contienen expresiones exponenciales y logarítmicas.	43 %	
10	3.4 Interpreta gráficos de datos referidos a situaciones sociales, ambientales, sanitarias y deportivas.	(N2) Interpreta información presentada en gráficos estadísticos.	38 %	

COMUNICACIÓN CON LENGUAJE MATEMÁTICO

Esta competencia evalúo el lenguaje matemático como una forma de comunicación a través de símbolos específicos para realizar cálculos, establecer relaciones entre variables, representar conceptos y elementos, entre otros. Se presentan en la tabla, los resultados por habilidades e indicadores de logro que fueron considerados para esta competencia.

N.º	Indicador de logro	Habilidades evaluadas	%	Análisis de resultados
13	7.5 Interpreta y ejemplifica desigualdades lineales.	(N1) Asocia proposiciones cotidianas con desigualdades lineales.	63 %	- **Fortalezas:** Los resultados muestran que los estudiantes utilizaron el lenguaje simbólico para evaluar escenarios concretos cercanos a la realidad, de esta manera, asociaron proposiciones cotidianas con desigualdades lineales, utilizaron características de las funciones en situaciones contextualizadas, al traducirlas del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático. También lograron identificar expresiones que permitieron dar solución a problemas propuestos, como en los métodos de conteo y establecer reglas de construcción, para determinar el término general de una sucesión aritmética o geométrica. - **Desafíos:** Resulta necesario establecer relaciones entre el lenguaje cotidiano y el lenguaje formal en matemática (símbolos, conceptos, etc.), utilizando situaciones contextualizadas, que permitan aplicar diversos conocimientos, algebraicos, geométricos, entre otros, para que el estudiante pueda traducir y representar simbólicamente determinados contextos, como por ejemplo identificar dominio y recorrido a partir de representaciones gráficas. Además, es importante reforzar el significado, así como uso de los símbolos en el análisis de expresiones matemáticas, en la información presentada en lenguaje común, de esta manera, el estudiante comprenderá el significado real de los símbolos y no solo su representación abstracta, por ejemplo, al establecer diferencias entre una permutación y combinación, logrando así un aprendizaje significativo, que tenga como eje la comprensión del lenguaje matemático.
23	4.8 Interpreta las propiedades de las funciones y valora su importancia y utilidad al resolver diferentes situaciones relativas al entorno físico.	(N1) Utiliza funciones para describir situaciones relacionadas con el entorno.	54 %	
14	2.2 Resuelve problemas, utilizando el principio de la multiplicación.	(N1) Reconoce fórmulas de conteo en casos concretos.	51 %	
17	1.12 Establece con claridad y seguridad, la diferencia entre una sucesión aritmética y una geométrica.	(N2) Identifica el término general de una sucesión aritmética o geométrica.	44 %	
3	7.13 Construye, utiliza y explica la ecuación de una recta: punto pendiente, valorando su utilidad.	(N2) Representa fenómenos de la realidad utilizando la ecuación de la línea recta.	35 %	
21	4.12 Identifica y explica el dominio y recorrido de las funciones.	(N2) Identifica dominio y recorrido a partir de representaciones gráficas.	33 %	
7	2.17 Utiliza fórmula apropiada para calcular el número de combinaciones o permutaciones de “n” objetos tomados “r” a la vez, en ejercicios de aplicación.	(N2) Reconoce la fórmula de combinación en situaciones del entorno.	31 %	

APLICACIÓN DE LA MATEMÁTICA AL ENTORNO

Se exploró habilidades cognitivas, por medio de diferentes situaciones cercanas a la realidad o contextos recreados, que permitieron a los estudiantes solucionar problemas utilizando herramientas matemáticas. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos en esta competencia.

<table>
<tr><th>N. º</th><th>Indicador de logro</th><th>Habilidades evaluadas</th><th>%</th><th>Análisis de resultados</th></tr>
<tr><td>1</td><td>7.5 Deduce, utiliza y explica la pendiente de una recta, con seguridad y confianza.</td><td>(N1) Interpreta el concepto de pendiente en problemas de la vida cotidiana.</td><td>67 %</td><td rowspan="11">- Fortalezas:
Por medio de esta competencia, se logró evidenciar que los estudiantes practicaron diferentes habilidades cognitivas (las que se muestran en la tabla) que pusieron de manifiesto, al comprender conceptos matemáticos como pendiente de una recta, y buscaron herramientas matemáticas para solucionar los problemas propuestos. De esta forma, al presentárseles las situaciones pudieron establecer diferencias en los contextos de la aplicación entre el teorema del seno o coseno, resolver casos utilizando probabilidad con enfoque clásico, aplicar fórmulas o expresiones, interpretando las variables a utilizar en la suma de los elementos de una sucesión aritmética. En algunos casos probablemente para solucionar se auxiliaron de operaciones elementales, al recordar conceptos matemáticos o procesos rutinarios fijados.
- Desafíos:
Es necesario potenciar habilidades cognitivas (resolver, identificar, deducir entre otras), por medio de la creación de problemas que sean de interés para los educandos, que lleven a la resolución de situaciones contextualizadas, cercanas al estudiante o creadas, y permitan conocer diferentes formas de solución; a la vez comprender los elementos que conforman diferentes expresiones o fórmulas matemáticas y estadísticas como al utilizar la suma de una sucesión geométrica, resolver situaciones por medio de distribución binomial y normal, adquiriendo un significado al aplicarlas, evitando aprenderlas de una forma mecánica y sistemática.</td></tr>
<tr><td>24</td><td>4.15 Resuelve ejercicios y problemas sobre el cálculo de la probabilidad de eventos.</td><td>(N2) Resuelve situaciones del entorno utilizando enfoque clásico de eventos simples o compuestos.</td><td>51 %</td></tr>
<tr><td>5</td><td>6.4 Resuelve, problemas aplicando el teorema del seno.</td><td>(N2) Resuelve situaciones del entorno utilizando el teorema del seno.</td><td>47 %</td></tr>
<tr><td>11</td><td>1.9 Resuelve ejercicios y problemas sobre sucesiones aritméticas.</td><td>(N2) Resuelve situaciones del entorno utilizando la fórmula de la suma de los elementos de una sucesión aritmética.</td><td>46 %</td></tr>
<tr><td>20</td><td rowspan="2">5.2 Resuelve problemas aplicando e interpretando críticamente la media aritmética en datos agrupados y no agrupados.</td><td>(N2) Reconoce la media aritmética para datos agrupados y no agrupados en situaciones del entorno.</td><td>46 %</td></tr>
<tr><td>22</td><td>(N3) Calcula la media aritmética para datos agrupados en una situación cotidiana.</td><td>33 %</td></tr>
<tr><td>12</td><td>6.7 Resuelve problemas aplicando el teorema del coseno.</td><td>(N2) Resuelve situaciones del entorno utilizando el teorema del coseno.</td><td>42 %</td></tr>
<tr><td>18</td><td>1.3 Resuelve problemas utilizando razones trigonométricas.</td><td>(N2) Resuelve situaciones del entorno utilizando conceptos trigonométricos.</td><td>36 %</td></tr>
<tr><td>16</td><td>5.5 Utiliza la fórmula para el cálculo de la probabilidad de una distribución binomial en solución de ejercicios.</td><td>(N2) Resuelve situaciones cotidianas utilizando la fórmula de distribución binomial.</td><td>33 %</td></tr>
<tr><td>22</td><td>5.10 Resuelve ejercicios y problemas aplicados a la vida cotidiana sobre variables con distribución normal, con seguridad.</td><td>(N3) Calcula la probabilidad para una variable que tenga una distribución normal.</td><td>28 %</td></tr>
<tr><td>25</td><td>1.16 Aplica, con precisión, la fórmula para la obtención de la suma de los términos de una sucesión geométrica.</td><td>(N3) Resuelve situaciones del entorno utilizando la fórmula de la suma de una sucesión geométrica.</td><td>18 %</td></tr>
</table>

Propuesta didáctica para la resolución de problemas matemáticos: Siguiendo los pasos de Pólya

La resolución de problemas matemáticos requiere de la comprensión de conceptos, expresiones, resultados, así como una serie de pasos didácticos correctamente definidos para el uso, aplicación de los mismos, por lo tanto, resulta importante que el estudiante pueda argumentar de manera lógica y validar los procedimientos que desarrolla, para que estos adquieran un verdadero significado.

El matemático George Pólya (n. Hungría, 1887), en su libro «Cómo plantear y resolver problemas» (1945), presentó un método de 4 pasos para resolver problemas matemáticos. A continuación, se describen cada uno de ellos.

1. Comprensión del problema: Hace referencia a que el estudiante sea capaz de responder una serie de preguntas, tales como: ¿entiendo todo lo que dice el problema?, ¿puedo replantear el problema con mis propias palabras?, ¿cuáles son los datos del problema?, ¿hay suficiente información?, ¿hay información que no es clara?, ¿es este problema similar a algún otro que ya haya resuelto antes?

2. Configuración de un plan: consiste en el cómo o qué estrategia utilizará el estudiante para resolver el problema. Así pues, las estrategias pueden partir desde aplicar pruebas de ensayo y error, hasta plantear toda una táctica que le permita intentar llegar a la solución del mismo.

3. Ejecución del plan: se refiere a la puesta en práctica de lo que el estudiante estableció en la configuración. En este punto puede suceder que, en un momento determinado lo que se planteó no sea pertinente para la solución del problema, razón por la cual, hay que replantear la estrategia y volver a comenzar. Generalmente en la ejecución se usan procesos matemáticos que permitan darle la exactitud que requiere la solución del problema.

4. Examinar la solución: es poderse cuestionar sobre lo que se hizo, ver si el proceso desarrollado permitió en realidad resolver el problema. En este paso, el estudiante debe acudir a sus procesos metacognitivos para revisar si lo que efectuó está bien o está mal y, si es necesario, replantear el proceso de resolución.

Para mayor información consultar: MINED (2017) *Boletín de Resultados PAES 2017*, disponible en: http://bit.do/eDQPA

A continuación, se presenta un ítem de la PAES 2018, con el que se ejemplificará la utilización de los cuatro pasos de George Pólya, para la resolución de problemas.

Objetivo: Resolver un problema matemático, utilizando los aportes del matemático George Pólya, como método en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

❖ **Orientaciones generales para el docente:**

- ✓ Prepare con antelación una situación o problema, y organice a los estudiantes en equipos de trabajo, para que entre iguales puedan ayudarse a solventar cualquier duda y construir un aprendizaje significativo.
- ✓ Oriente cada paso del método y refuerce cada equipo, cuando sea necesario.
- ✓ De acuerdo a la temática que se desee abordar, puede retomar los ítems presentados en este documento como situación de aprendizaje.

Paso 1: Comprensión del problema

- ✓ El docente entrega a cada equipo de trabajo la misma situación problemática y solicita a los estudiantes den lectura.

Enunciado: Una empresa especializada en la construcción de pozos, cobra $1,000 por perforar el primer metro de un pozo e incrementa en 10 % el precio de cada metro que se perfora respecto al costo del metro anterior.

¿Cuánto cobrará la empresa por perforar un pozo de 5 metros?

Haga las siguientes preguntas a los estudiantes, orientadas a verificar la comprensión del problema.

- ¿A qué darás respuesta al resolver el problema?
- ¿Qué conceptos están involucrados en el problema?
- ¿Qué procedimientos te permiten resolver el problema?
- ¿Qué datos proporciona el problema?
- ¿Conoces algún problema similar o relacionado con el que se te presenta? Explique:

- ✓ El docente monitoreará el trabajo de cada equipo, reforzará cuando sea necesario y orientará para que discutan las respuestas y lleguen a un acuerdo.

Ejemplo: ¿A qué darás respuesta al resolver el problema? Al cobro por perforar un pozo de 5 metros.
¿Qué datos proporciona el problema?
Costo del primer metro (M1): $\$ 1000$
Incremento del costo de cada metro después del primero: $10\ \%$ sobre el precio de M1.

- ✓ Solicitar uno o dos voluntarios que den respuesta a las preguntas discutidas en el equipo.
- ✓ Retomar los aportes de los estudiantes y finalizar esta etapa recordando el concepto de sucesiones.

¿Qué es una sucesión?
Una sucesión es un conjunto ordenado de números y objetos, llamados términos, que se establecen de manera constante y predecible, es decir puede aumentarse, disminuirse, multiplicarse o dividirse en una misma cantidad.

Paso 2: Configuración del plan

El docente solicita a los equipos discutan las siguientes preguntas:

- ¿Cómo obtienes el costo del metro 2, a partir del metro 1?
- ¿Cómo obtienes el costo del metro 3, a partir del metro 2?
- ¿Existe alguna forma de encontrar mediante una expresión la cantidad de dinero cobrado por la empresa para perforar el metro n? Explique.

- ✓ De seguimiento al trabajo de cada equipo, discuta brevemente con los estudiantes cómo el lenguaje simbólico permite crear expresiones que generalizan secuencias y facilitan el cálculo del resultado de los elementos en una sucesión.
- ✓ Verifique si entre los equipos han propuesto alguna expresión que les ayude a resolver y luego socialice o refuerce con los estudiantes que por la forma en la que aumenta el costo por cada metro, el problema se comporta como una sucesión geométrica.
- ✓ Para finalizar este paso recuerde junto con los estudiantes las características de una sucesión aritmética y una geométrica y la expresión del término general y de la suma de los primeros n términos para ambos tipos de sucesiones.
- ✓ Aclarar con los estudiantes los conceptos de término general y suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética y de una geométrica:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}, \quad S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

Las sucesiones aritméticas se reconocen por su diferencia constante, mientras las sucesiones geométricas, su característica principal es una razón constante entre sus elementos.

El término general de una sucesión aritmética se obtiene a partir de identificar a_1, que es el primer término y la diferencia d, en que incrementa cada término respecto del anterior. Mientras que en la sucesión geométrica se necesita conocer el término a_1 y la razón r que representa el término por el que hay que multiplicar un término de la sucesión para obtener el siguiente.

Para obtener la suma de n-términos de una sucesión geométrica es necesario conocer la cantidad de términos a sumar, el primer término a_1 y la diferencia d. Mientras que para sumar n términos de una sucesión geométrica es necesario conocer el primer término a_1, la razón r y la cantidad de términos a sumar.

Paso 3: Ejecución del plan

- ✓ El docente solicita a los estudiantes sustituya con los datos identificados en el paso 1, la expresión de la sumatoria de los elementos de una sucesión geométrica expuesta en el paso 2 y verifica la participación de todos los miembros del equipo.
- ✓ Luego elige a un representante de cualquier equipo para que socialice su trabajo y resuelva, ejemplo:

Para encontrar el costo total de lo que cobrará la empresa para perforar 5 metros, debe sustituirse $a_1 = 1000$, $n = 5$ y $r = 1.1$ en la expresión: $S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$, con lo que se obtiene:

$$S_5 = \frac{(1000)(1.1^5-1)}{1.1-1}$$

$$= 6105.1$$

De esta forma se determina que perforar un pozo de $5\ \mathrm{m}$ tendrá un costo de $\$\ 6{,}105.10$

Paso 4: Examinar la solución

- ✓ El docente solicita a los estudiantes verifiquen y analicen, si la expresión aplicada y la solución encontrada, corresponde a lo que solicita el problema.
- ✓ Oriente a los estudiantes a la revisión de los primeros tres pasos para comprobar la solución o verificar si existe otra manera de resolver.

Ejemplo:
En este tipo de problemas puede corroborarse la respuesta encontrada, determinado el valor de cada metro y luego sumar los costos calculados:

M1: $\$\ 1000$
M2: $\$\ 1000 \times 1.1 = \$\ 1100$
M3: $\$\ 1100 \times 1.1 = \$\ 1210$
M4: $\$\ 1210 \times 1.1 = \$\ 1331$
<u>M5: $\$\ 1331 \times 1.1 = \$1464.10$</u>

Costo total del pozo: $\$\ 6{,}105.10$, lo cual verifica que los cálculos realizados en el paso 3 son correctos.

- ✓ Finalice esta etapa despejando las dudas de los estudiantes.

Actividad propuesta:

Siga el ejemplo anterior del uso de los pasos de Pólya y aplíquelo para resolver cualquier ítem de este documento o en alguna otra situación problemática, tomando en cuenta el paso a paso.

DNEM
DIRECCIÓN NACIONAL DE EDUCACIÓN MEDIA
(Tercer Ciclo y Media)
MINISTERIO DE EDUCACIÓN - EL SALVADOR

Dirección Nacional de Educación Media (III Ciclo y Media)
Departamento de Evaluación de los Aprendizajes

Alameda Juan Pablo II y Calle Guadalupe, Centro de Gobierno,
Plan Maestro, Edificio A-3. 3º Nivel
Teléfonos: 2592-3330 * 2592-3325